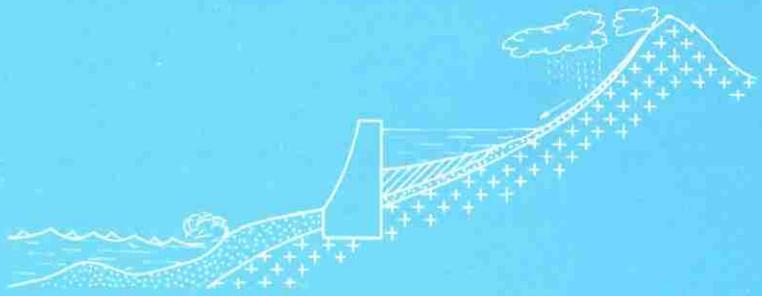




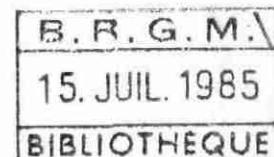
EROSION
TRANSPORTS SOLIDES
SEDIMENTATION



Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique
d'Informatique et d'Hydraulique
de Toulouse

ETUDE DE LA HOULE EN THEORIE LINEAIRE

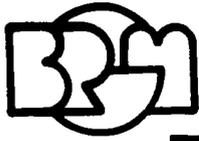
- MODELE DE REFRACTION -



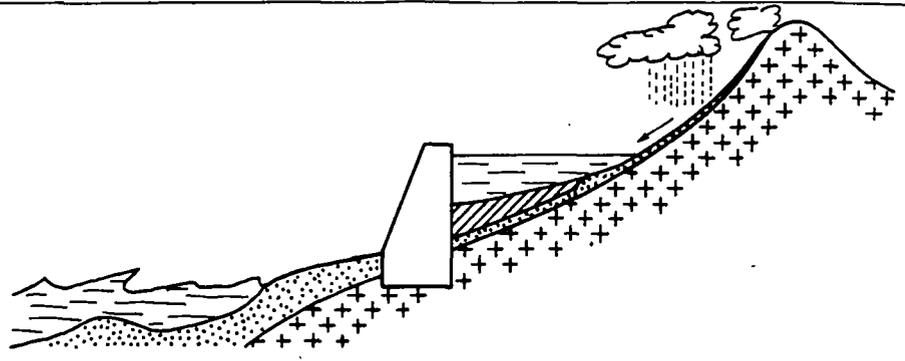
BUREAU DE RECHERCHES GEOLOGIQUES ET MINIERES
SERVICE GEOLOGIQUE NATIONAL

Département GEOLOGIE MARINE ET SEDIMENTOLOGIE DYNAMIQUE
ATELIER "SEDIMENTOLOGIE DYNAMIQUE"

85 SGN 300 MAR



EROSION
TRANSPORTS SOLIDES
SEDIMENTATION



Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique
d'Informatique et d'Hydraulique
de Toulouse

ETUDE DE LA HOULE EN THEORIE LINEAIRE

- MODELE DE REFRACTION -

par

Carlos OLIVEROS

BUREAU DE RECHERCHES GEOLOGIQUES ET MINIERES
SERVICE GEOLOGIQUE NATIONAL

Département GEOLOGIE MARINE ET SEDIMENTOLOGIE DYNAMIQUE
ATELIER "SEDIMENTOLOGIE DYNAMIQUE"

Domaine de Luminy. R^{te} Léon Lachamp 13 009 Marseille
Tél. (91) 41.24.46. . Telex. BRGM 401 585 F

P R E A M B U L E

* * *

L'étude présentée ci-après constitue le rapport de stage de fin d'études de 3ème année, pour l'obtention du diplôme d'ingénieur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique (E.N.S.E.E.I.H.) de Toulouse, filière "hydraulique".

Cette étude a été réalisée sous la direction de Monsieur R.E. QUÉLENNEC, Chef de l'Atelier "Sédimentologie dynamique" (département Géologie marine et sédimentologie dynamique) du Bureau de Recherches Géologiques et Minières (B.R.G.M.) à Marseille.

* * *

NOTA : les résultats de cette étude ne pourront être communiqués à des
----- tiers qu'avec l'accord du B.R.G.M.

REMERCIEMENTS

* *
*

Je tiens à remercier, ici, l'ensemble du personnel du B.R.G.M. à Marseille, pour l'accueil sympathique dont j'ai bénéficié.

Mes remerciements s'adressent en particulier à :

** Monsieur R.E. QUÉLENNEC, qui a bien voulu me suivre avec attention tout au long de mon stage et me guider profitablement dans mon travail ;*

** Monsieur O. SEDAN, pour m'avoir aidé à la familiarisation des moyens informatiques du bureau et à la mise au point de mes programmes numériques ;*

** et, enfin, à Mme E. ERCOLANI, sans qui ce rapport n'aurait pu voir le jour sous sa forme présente.*

* *
*

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ELECTROTECHNIQUE, D'ELECTRONIQUE
D'INFORMATIQUE ET D'HYDRAULIQUE

* *
*

ETUDE DE LA HOULE EN THEORIE LINEAIRE

- MODELE DE REFRACTION -

par

Carlos OLIVEROS

85 SGN 300 MAR

juin 1985

MOTS CLES - linéaire, littoral, houle, modèle numérique, réfraction.

R E S U M E

Après un exposé descriptif de la houle en tant que phénomène naturel et une présentation succincte de quelques théories de la houle, le présent rapport établit les équations de base de la houle en théorie linéaire, ainsi que les équations de la réfraction, tout en indiquant bien les limites de validité du modèle.

Le but de l'étude menée étant la mise au point d'un programme de calcul numérique de la réfraction en zone littorale, on trouvera dans ce rapport les algorithmes de résolution numérique des équations de propagation d'une houle linéaire réfractée.

Nous terminons enfin par un exemple qui détermine la réfraction d'une houle dans le golfe d'Ajaccio.

S U M M A R Y

After a description of the wave generation propagation process as a natural phenomena and a brief presentation of the wave theories, the report gives the basic equations of the linear wave theory as well as the system of wave refraction equations together with the limits of validity of the studied model.

The objectives of the study being the development of a numerical model with adequate software for the simulation of wave refraction in littoral zones, one will find the algorithms for numerical solution of the propagation of refracted waves following the linear theory.

A practical exemple of the simulation of wave refraction in the gulf of Ajaccio is given as an application of the proposed model.

* *
*

S O M M A I R E

* *
*

	<u>Page n°</u>
1. INTRODUCTION	1
1.1. LA HOULE : PHENOMENE NATUREL	1
1.2. LA HOULE ET LE LITTORAL	8
1.2.1. TRANSPORT SOLIDE : STABILITE DU LITTORAL	8
1.2.2. AMENAGEMENTS : INFLUENCE DE L'HOMME SUR LE LITTORAL	10
1.3. BREF APERCU DES MOYENS D'ETUDE DES PHENOMENES LIES A LA HOULE EN ZONE COTIERE	11
1.3.1. MODELES REDUITS SEDIMENTOLOGIQUES	11
1.3.2. MODELES MATHEMATIQUES HYDRAULIQUES	13
1.3.3. MODELES MATHEMATIQUES SEDIMENTOLOGIQUES	13
1.4. MODELE MATHEMATIQUE HYDRAULIQUE ETUDIE DANS LE PRESENT RAPPORT	13
2. MODELISATION DE LA HOULE	14
2.1. HOULE REELLE	14
2.1.1. DETERMINATION DE L'AMPLITUDE SIGNIFICATIVE	14
2.1.2. DETERMINATION DE LA PERIODE SIGNIFICATIVE	17
2.1.3. CONCLUSION	17
2.2. PRESENTATION GENERALE DES THEORIES DE HOULE	17
2.2.1. HYPOTHESES DE DEPART	17
2.2.2. CONDITIONS	17
2.2.3. QUELQUES THEORIES DE LA HOULE	18
2.2.4. DOMAINES DE VALIDITE DES THEORIES DE LA HOULE	18
2.3. CONCLUSION	24
3. PRESENTATION DE LA THEORIE LINEAIRE DE LA HOULE	25
3.1. RESTRICTIONS A UNE THEORIE GENERALE	25
3.2. PARAMETRES CARACTERISTIQUES DE LA HOULE	25
3.3. EQUATIONS DE DEPART	25

	<u>Page n°</u>
3.4. CONDITIONS QUE DOIT SATISFAIRE LA SOLUTION	25
3.5. HOULE LINEAIRE	26
3.5.1. DETERMINATION DE LA FONCTION POTENTIEL DE HOULE	26
3.5.2. CONSIDERATION DE LA PERIODICITE	27
3.5.3. CONSIDERATION DES CONDITIONS AUX LIMITES	28
3.5.4. CONCLUSION	33
3.6. DEFERLEMENT DE LA HOULE	34
3.6.1. CONSIDERATIONS THEORIQUES	34
3.6.2. DEFERLEMENT EN EAU PROFONDE	34
3.6.3. DEFERLEMENT EN EAU PEU PROFONDE	35
3.6.4. AUTRE CRITERE DE DEFERLEMENT DE LE HOULE EN EAU PEU PROFONDE	35
3.7. ASPECT ENERGETIQUE DE LA HOULE	35
3.7.1. DEFINITION DES ORTHOGONALES DE HOULE	35
3.7.2. ENERGIE DE LA HOULE	36
4. REFRACTION DE LA HOULE	38
4.1. LA CELERITE EST FONCTION DE LA PROFONDEUR	38
4.2. APERCU SCHEMATIQUE DU PHENOMENE DE REFRACTION	38
4.3. ASPECT GEOMETRIQUE DE LA REFRACTION	40
4.4. ASPECT ENERGETIQUE DE LA REFRACTION	41
4.4.1. DEFINITION DU COEFFICIENT DE REFRACTION	41
4.4.2. HYPOTHESE DE CONSERVATION DE L'ENERGIE	42
4.4.3. DETERMINATION DU COEFFICIENT DE REFRACTION	42
5. ANALYSE NUMERIQUE DU CALCUL DE LA HOULE	45
5.1. DONNEES DE BASE	46
5.1.1. CARACTERISTIQUES DE LA HOULE	46
5.1.2. TOPOGRAPHIE DES LIEUX (FONDS MARINS)	46
5.2. DONNEES DE DISCRETISATION	47
5.2.1. DISCRETISATION DU DOMAINE	47
5.2.2. DISCRETISATION DU TEMPS	48
5.3. DISCRETISATION DES DONNEES	48
5.3.1. DETERMINATION DES PROFONDEURS AUX NOEUDS DU MAILLAGE	48
5.3.2. DETERMINATION DES CELERITES AUX NOEUDS DU MAILLAGE	48
5.3.3. DETERMINATION DES DERIVEES DE LA CELERITE AUX NOEUDS DU MAILLAGE	49

	<u>Page n°</u>
5.4. INTERPOLATION DE DIVERSES VARIABLES EN UN POINT QUELCONQUE A L'INTERIEUR DU MAILLAGE	51
5.5. CALCUL DES ORTHOGONALES	52
5.6. CALCUL DU COEFFICIENT DE REFRACTION	55
5.6.1. CALCUL DE K1	55
5.6.2. CALCUL DE K2	56
6. MISE EN OEUVRE DU PROGRAMME DE REFRACTION	57
6.1. DETERMINATION DES POINTS DE DEPART DES ORTHOGONALES	57
6.2. DESCRIPTION DES ALGORITHMES	60
6.2.1. ALGORITHME GENERAL	60
6.2.2. INTRODUCTION DES DONNEES DE BASE	60
6.2.3. CALCUL DES c_{ij} ET DE SES DERIVEES	61
6.2.4. INTRODUCTION DU POINT DE DEPART DE LA 1 ^{ere} ORTHOGONALE ET CALCUL DES POINTS DE DEPART DES ORTHOGONALES	61
6.2.5. CALCUL DE L'ORTHOGONALE	62
7. VERIFICATION DE L'EXACTITUDE DE LA METHODE NUMERIQUE	63
7.1. PRESENTATION DU SITE D'ETUDE, DES CONDITIONS DE HOULE ET DE LA SOLUTION ANALYTIQUE CORRESPONDANTE	63
7.1.1. LE SITE	63
7.1.2. CARACTERISTIQUES DE LA HOULE	64
7.1.3. SOLUTION ANALYTIQUE	64
7.1.4. REMARQUE RELATIVE A LA VALIDITE DE LA SOLUTION ANALYTIQUE	65
7.1.5. CONCLUSION	65
7.2. RESOLUTIONS NUMERIQUES	65
7.2.1. COMPARAISON DE LA FORME DE L'ORTHOGONALE	65
7.2.2. COMPARAISON β ANALYTIQUE/ β NUMERIQUE	67
7.2.3. CONCLUSION PRATIQUE : CHOIX DU MAILLAGE "a" ET DU PAS DE TEMPS " Δt "	82
8. EXEMPLE D'APPLICATION : ETUDE DE LA REFRACTION DE LA HOULE DANS LE GOLFE D'AJACCIO	85
9. CONCLUSION	92

LISTE DES FIGURES

FIG. 1 - DISTRIBUTION APPROXIMATIVE DE L'ENERGIE DES ONDES DE SURFACE DE L'OCEAN (ECHELLE DE L'ENERGIE ARBITRAIRE)-d'après ref.3-	2
FIG. 2 - FORMATION DE LA HOULE ET SA PROPAGATION	1
FIG. 3 - GENERATION DE LA HOULE (célérité, période, longueur d'onde en fonction du vent et du fetch) - d'après réf. 5 -	6
FIG. 4 - GENERATION DE LA HOULE (d'après réf. 5)	7
FIG. 5 - EFFET DE PERCOLATION	8
FIG. 6 - PHENOMENE D'EROSION ET SEDIMENTATION SUR UNE PLAGE (d'après réf.3)	9
FIG. 7 - RECU MOYEN ANNUEL DU TRAIT DE COTE ENTRE LES EMBOUCHURES DE LA GIRONDE ET DE L'ADOUR (d'après réf. 12)	12
FIG. 8 - MODIFICATION DU TRAIT DE COTE ENTRE FEVRIER 1979 ET JANVIER 1982 (d'après réf. 12)	12
FIG. 9 - ECHANTILLONS D'ENREGISTREMENT DE LA HOULE. a) hauteur significative 1,65 m, période 4 s b) hauteur significative 1,65 m, période 8 s (d'après réf. 3)	15
FIG. 10 - DISTRIBUTION THEORIQUE DE RAYLEIGH DES CREUX DE HOULE (d'après réf. 3)	16
FIG. 11 - COMPARAISON DE DIVERS PROFILS THEORIQUES DE HOULE (d'après ref. 3)	19
FIG. 12 - DOMAINE DE VALIDITE DE QUELQUES THEORIES DE LA HOULE (d'après Le Méhauté, 1969)	20
FIG. 13 - DEFERLEMENT DE LA HOULE SUR UNE DIGUE SUBMERGEE (d'après réf.8)	22
FIG. 14 - RESULTATS EXPERIMENTAUX (d'après réf. 8)	22
FIG. 15 - DOMAINE DE VALIDITE DE LA THEORIE D'AIRY (simplifiée)	23
FIG. 16 - $\frac{gT^2}{2\pi L}$ fonction de $\frac{D}{L}$	32
FIG. 17 - VARIATION DE L/L_0 , H/H_0 , γ/γ_0 , EN FONCTION DE D/L_0 (d'après réf. 6)	39
FIG. 18 - GRAPHIQUE D'INTERPOLATION DE L'ANGLE α	53
FIG. 19 - RESULTATS, APRES TRAITEMENT, DE LA SAISIE BATHYMETRIQUE SUR TABLE A DIGITALISER	66

	<u>Page n°</u>
FIG. 20 - INFLUENCE DE "a" SUR LES RESULTATS DE REFRACTION - PLAN LOCAL	68
FIG. 21 - INFLUENCE DE dt SUR LES RESULTATS DE REFRACTION - PLAN LOCAL	69
FIG. 22 - COMPARAISON DES RESULTATS ANALYTIQUE ET NUMERIQUE	70
FIG. 23 - VISUALISATION DE LA CONSERVATION DE $1/l_0 = 1$	71
FIG. 24 - COURBES BATHYMETRIQUES DANS LE GOLFE D'AJACCIO	86
FIG. 25 - REFRACTION DE LA HOULE DANS LE GOLFE D'AJACCIO -PLAN D'APPROCHE-	87
FIG. 26 - " " " " " "	88
FIG. 27 - REPRESENTATION DES ORTHOGONALES (GOLFE D'AJACCIO) -PLAN D'APPROCHE-	89
FIG. 28 " " " " " "	90

LISTE DES ANNEXES

-
- ANNEXE A - ACQUISITION DES DONNEES BATHYMETRIQUES ET DETERMINATION DES PROFONDEURS
AUX NOEUDS D'UN MAILLAGE
- ANNEXE B - ETUDE DES VITESSES ORBITALES (DANS LE CADRE DE LA THEORIE LINEAIRE)
- ANNEXE C - COMPARAISON DES CRITERES DE DEFERLEMENT DE STOKES ET DE MUNK (PROPAGATION
RECTILIGNE DE LA HOULE)

* *
*

1. INTRODUCTION

* * *

1.1. LA HOULE : PHENOMENE NATUREL

La mer est soumise à des mouvements ondulatoires et à des courants généraux. On distingue trois mouvements ondulatoires principaux, selon la période : la houle, les seiches et la marée.

Il est connu de l'analyse de la répartition de l'énergie totale des océans, par tranche de période (fig. 1), que la plus grande quantité d'énergie se trouve répartie dans la tranche de 1 à 30 s, ce qui correspond aux houles. On imagine donc l'intérêt de l'étude des houles pour les projets d'aménagements côtiers.

La houle est caractérisée par une hauteur de creux, une longueur d'onde, une période et une direction de propagation. Elle est produite par l'action du vent à la surface de l'eau. La fig. 2 représente la formation de la houle et sa propagation.

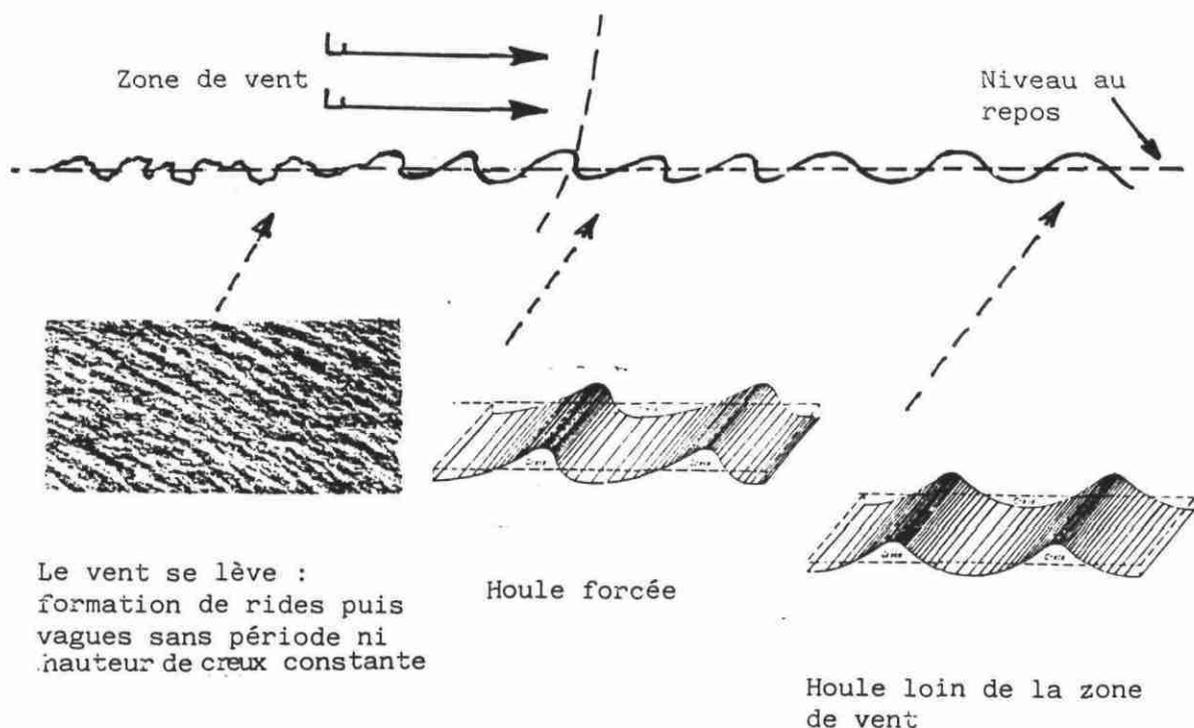


Figure 2. - Formation de la houle et sa propagation

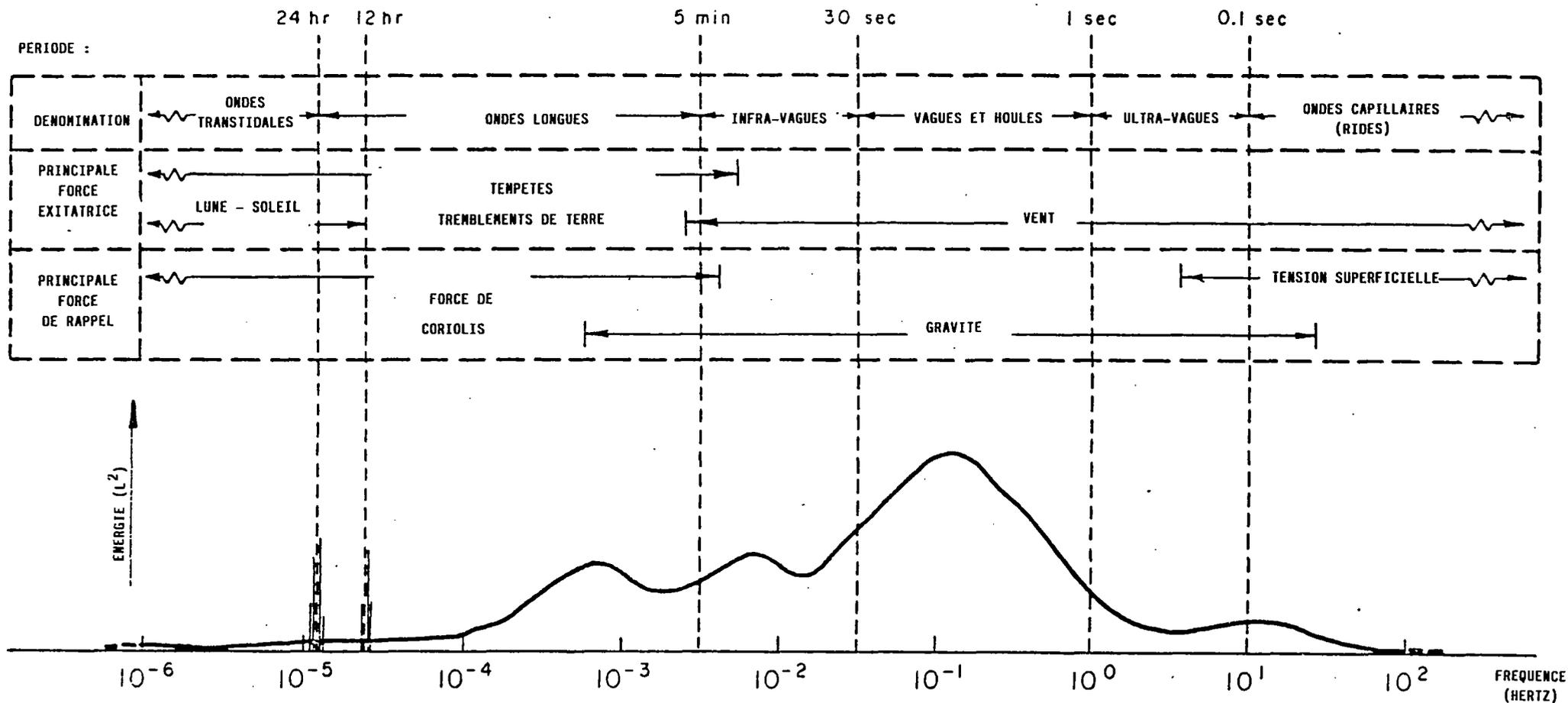


Figure 1 - Distribution approximative de l'énergie des ondes de surface de l'océan (échelle de l'énergie arbitraire).

(d'après réf. 3)

Ainsi, la houle se forme grâce au **transfert d'énergie** du vent vers l'eau. La houle transporte alors l'énergie dans la direction de propagation.

Au cours de sa propagation, la houle dissipe de l'énergie du fait de la turbulence et des frottements : elle s'amortit. L'amortissement dépend notamment de la distance, appelée *decay distance*, parcourue par la houle après avoir quitté la zone de vent.

Les caractéristiques de la houle dépendent de plusieurs facteurs :

- * **le fetch** : étendue de mer libre soumise au vent s'étalant dans une direction de propagation de la houle ;
- * **la vitesse du vent** ;
- * **la direction du vent** ;
- * **la durée** pendant laquelle le vent a soufflé.

Des abaques (fig. 3 et 4) permettent de prédire les caractéristiques de la houle pour des conditions de vent données.

On peut donner des ordres de grandeur de houle :

V E N T			H O U L E		
Fetch (km)	Vitesse (km/h)	Durée (heures)	Période (s)	Longueur d'onde (m)	Creux (m)
20	20	3	2	6	0,50
90	40	6	4	25	0,75
180	100	2	6	58	1,80
600	65	24	8	116	2,15
350	120	8	10	160	7,90
1.300	65	48	12	225	2,90
950	110	24	14	310	5,00
1.800	160	36	18	520	12,80

Lorsque la houle aborde une **zone côtière**, elle provient du large avec une hauteur de creux, une longueur d'onde, une période et une direction données.

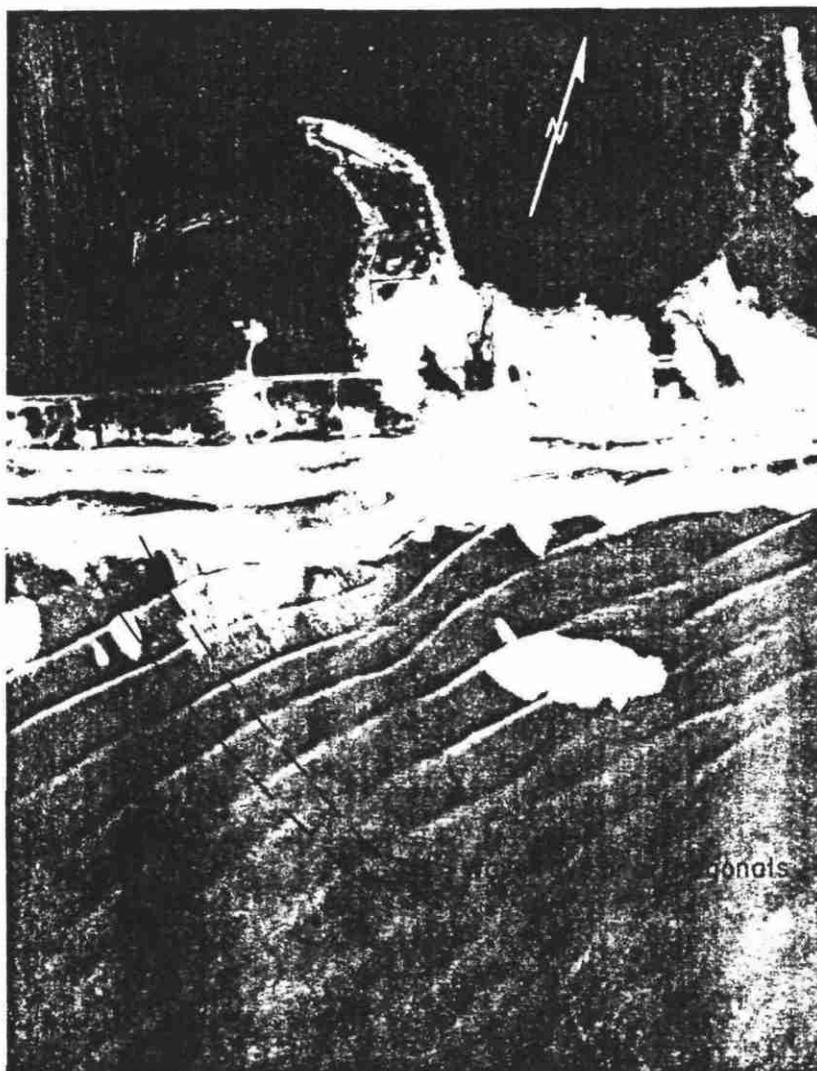
Toutes ces caractéristiques vont se modifier au fur et à mesure de la propagation de la houle vers la côte, du fait de la topographie sous-marine et d'ouvrages existants.

On assiste alors aux phénomènes suivants :

La réfraction.

(photo. prise
d'avion)

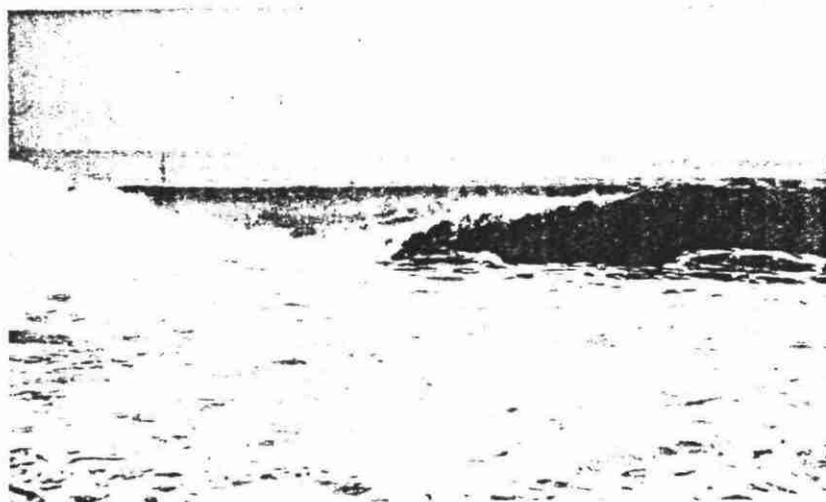
D'après réf. 3



Le déferlement.

(photo. prise
depuis la plage)

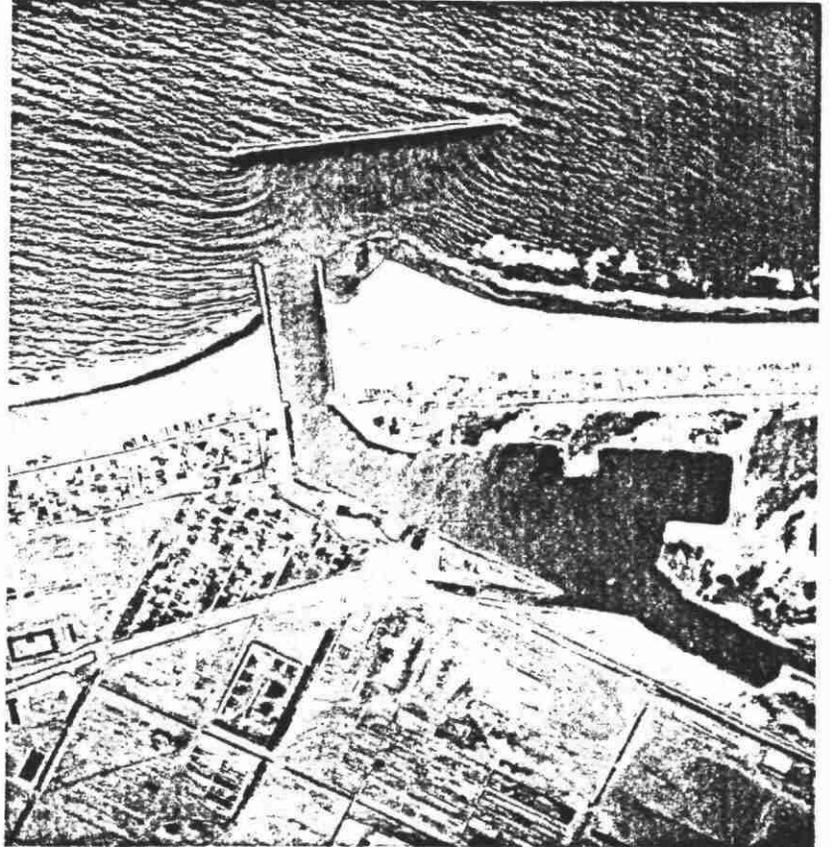
D'après réf. 3



La diffraction.

(photo. prise d'avion)

D'après réf. 3



La réflexion.

(photo. prise d'avion)

D'après réf. 3

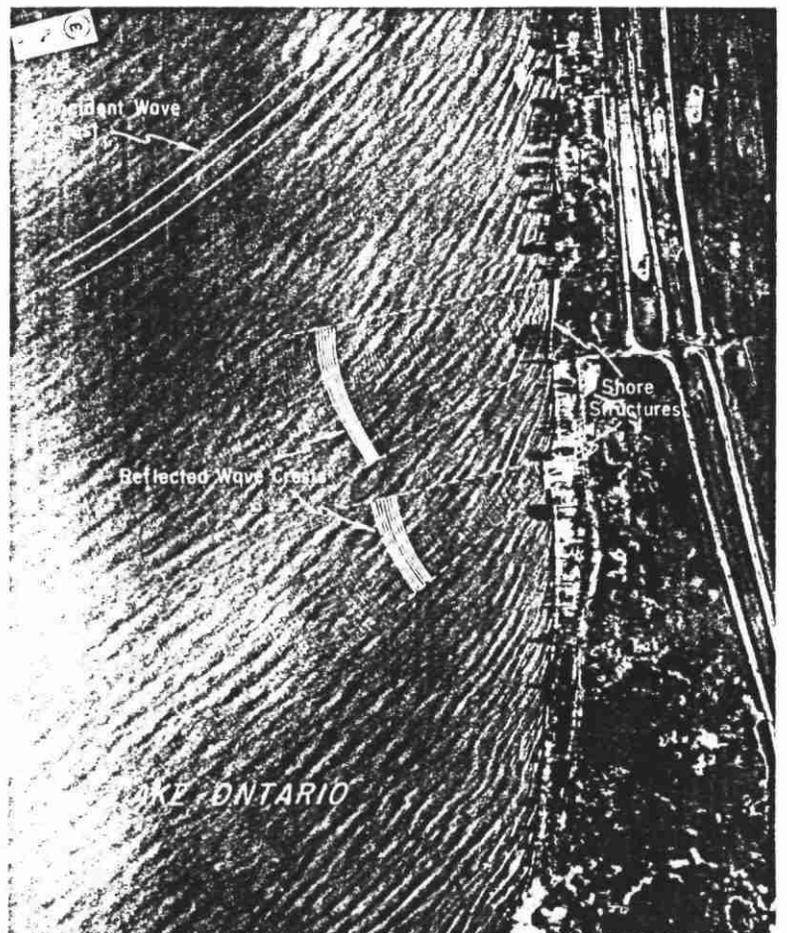
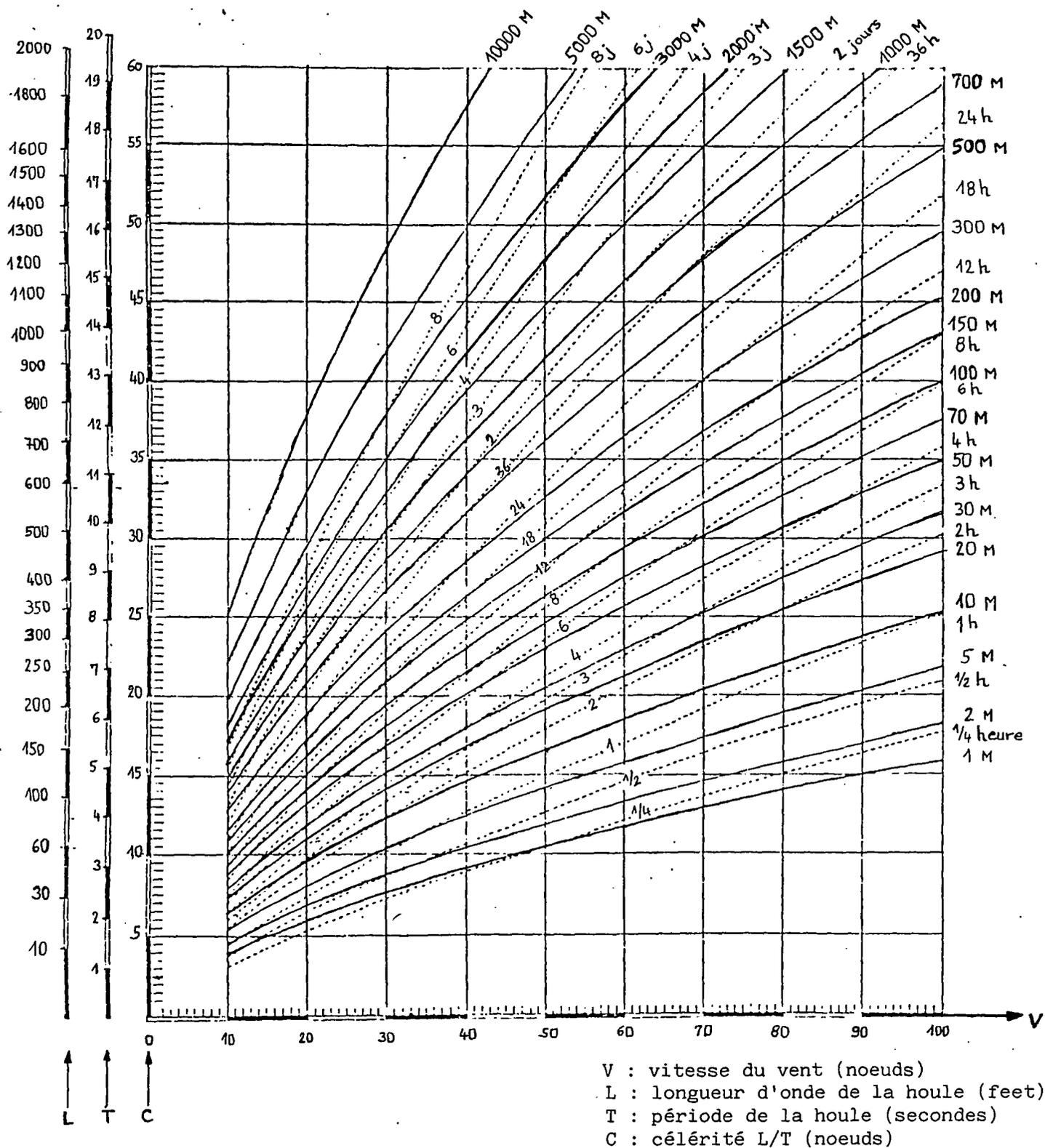


Fig. 3 (d'après réf. 5)

GENERATION DE LA HOULE :

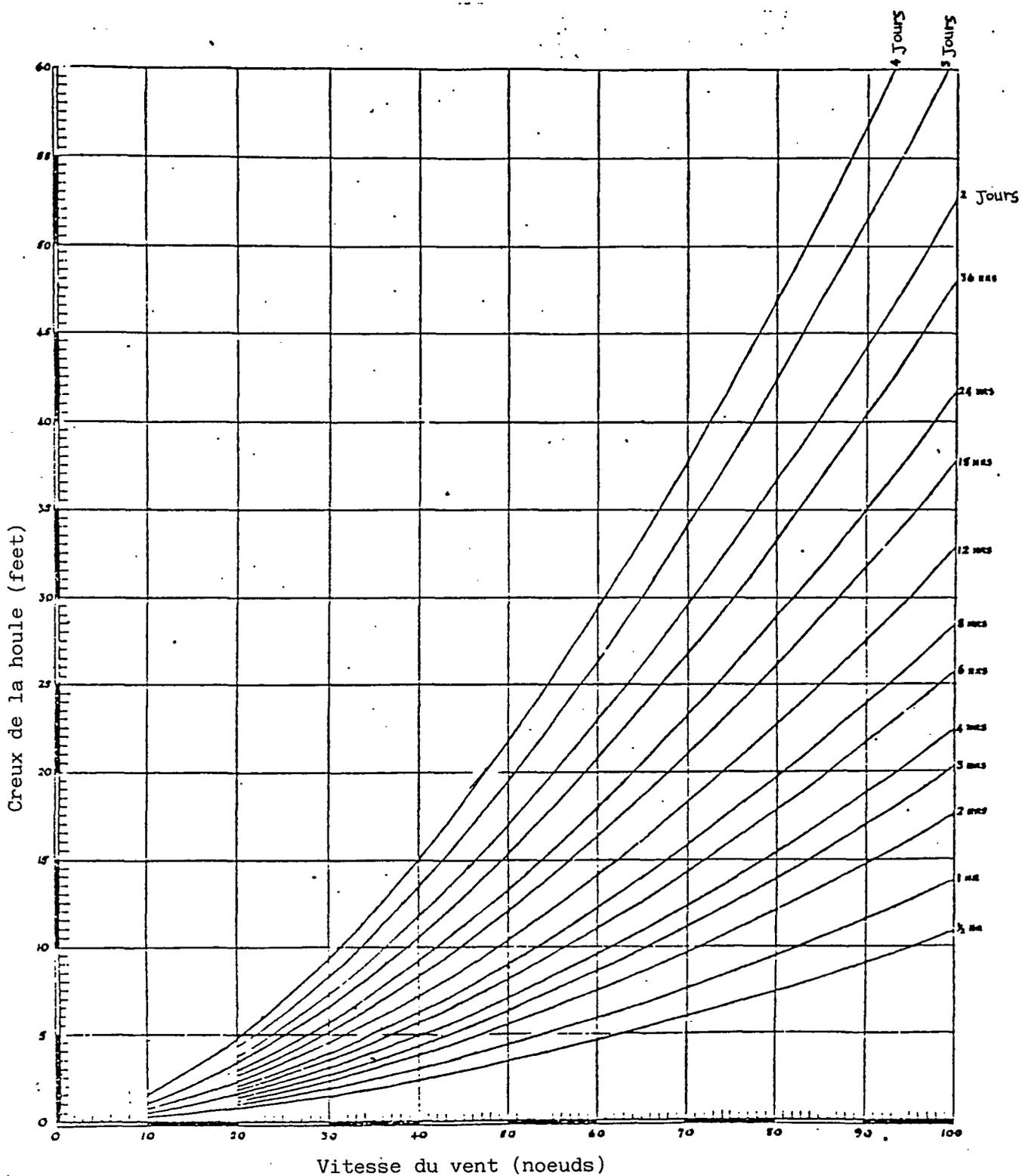
CELERITE-PERIODE-LONGEUR D'ONDE en fonction du vent et du Fetch.
(étendue en milles, durée en heures ou en jours)



Equivalences : 1 mille = 1852 m ; 1 foot = 0,3048 m ; 1 noeud : 0,5144 m/s

Fig. 4 (d'après réf. 5)

GENERATION DE LA HOULE



Aux dissipations d'énergie par turbulence et frottement, vont s'ajouter, dans la zone côtière où les profondeurs sont "faibles", la **dissipation par déferlement** (voir § suivant), mais aussi une **dissipation par percolation**.

Considérons une houle à l'instant t et deux points du sol sous-marin supposé horizontal. A l'instant t , il y a au point A, une pression $P_A = \rho gh_A$ et au point B, une pression $P_B = \rho gh_B$ (fig.5) :

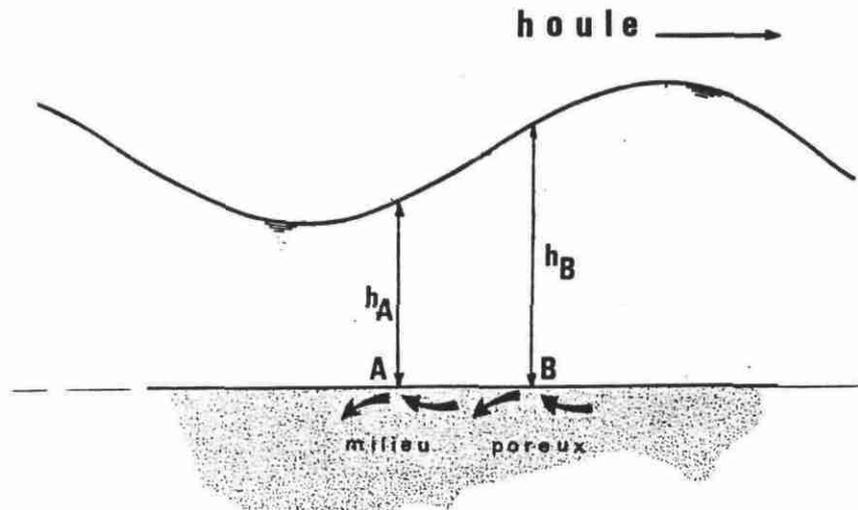


Fig. 5 : Effet de percolation

Cette différence de pression permet de se rendre compte de l'existence d'écoulements à l'intérieur du milieu poreux que constitue le sol sous-marin. De tels écoulements entraînent des pertes de charge, donc des dissipations d'énergie, au sein du sol.

Conclusion : la houle se présente donc comme un phénomène très complexe et fortement tridimensionnel.

1.2. LA HOULE ET LE LITTORAL

1.2.1. TRANSPORT SOLIDE : STABILITE DU LITTORAL

Nous avons vu, au paragraphe précédent, que la houle transporte l'énergie qui lui a été cédée par le vent lors de sa formation. Ainsi, à l'énergie près, dissipée tout au long du *decay distance*, la houle apporte à la côte une certaine quantité d'énergie.

Comme nous le verrons par la suite, le déferlement de la houle survient lorsque la profondeur d'eau est du même ordre que le creux de la houle au lieu du déferlement.

Le déferlement de la houle représente une grosse dissipation d'énergie et se manifeste par une forte turbulence et un brassage important de paquets de particules d'eau.

Ainsi, si l'on considère le déferlement sur une plage, celui-ci se traduit par un brassage des matériaux qui composent le fond. Souvent, après le déferlement, une nouvelle houle se forme, de hauteur de creux plus faible, et se propage jusqu'à remonter la ligne du rivage, dissipant encore de l'énergie (fig. 6).

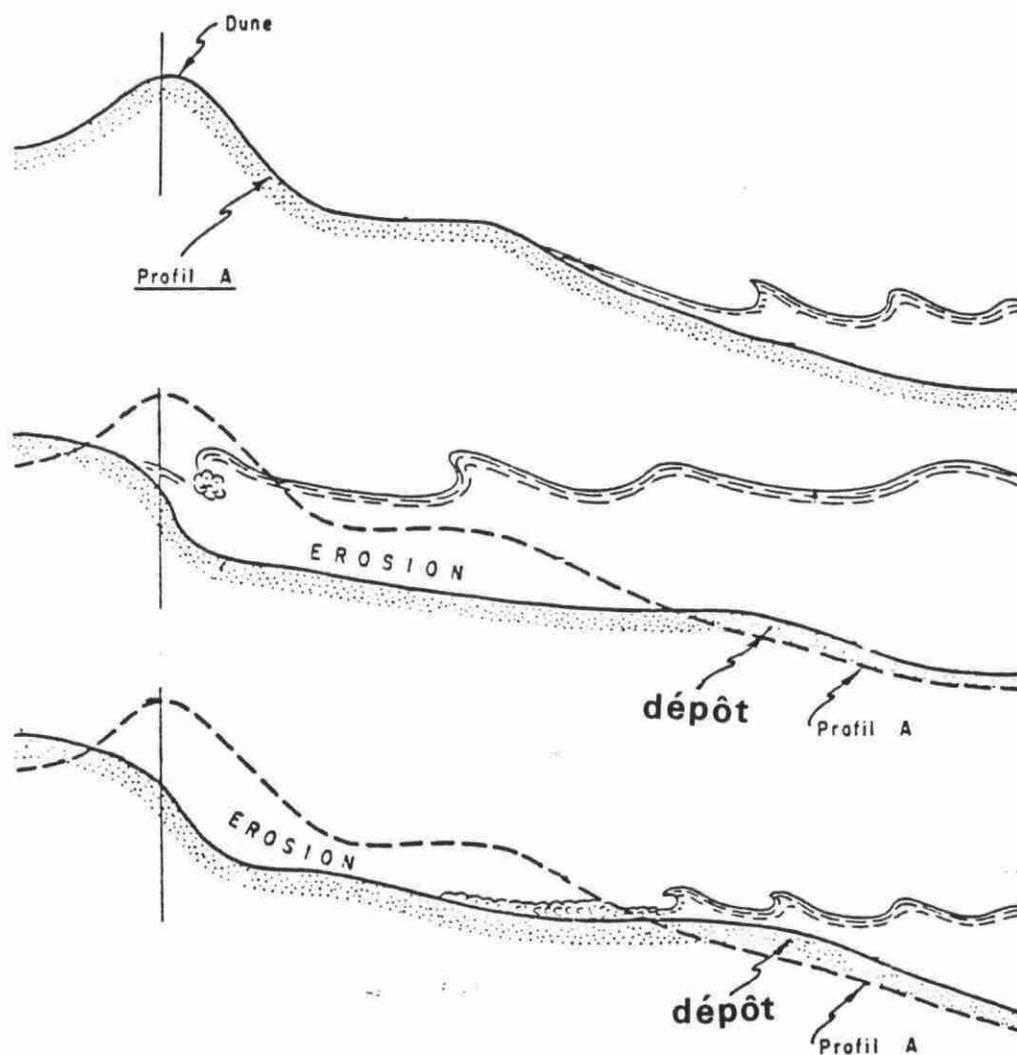
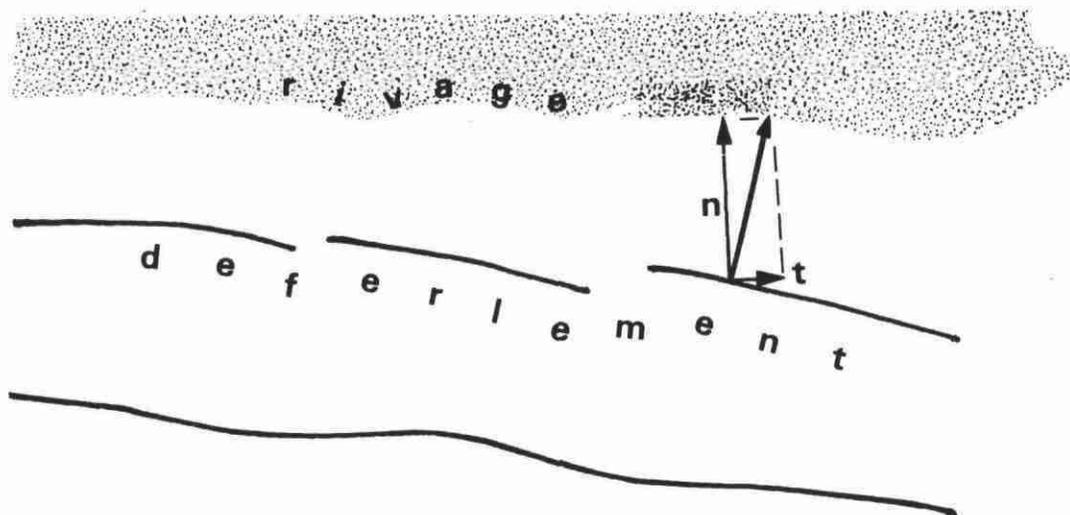


Figure 6. (d'après réf. 3)

Phénomène d'érosion et sédimentation sur
une plage.

L'existence du brassage des matériaux du fond d'une plage conduit à poser le problème d'un **transport solide** provoqué par la houle. La détermination des caractéristiques d'une houle au lieu du déferlement est donc très intéressante.

Considérons le schéma ci-dessous, représentant la propagation d'une houle et son déferlement sur une plage :



la direction de la houle au lieu de déferlement possède une composante normale à la ligne de rivage et une composante tangentielle.

A la **composante normale** correspond un transport vers le large, donc **érosion** (c'est le cas pour les houles de tempête) ou un transport vers la plage, donc **dépôt** (c'est le cas pour les petites houles). Un tel transport solide dépend, notamment, de la pente de la plage et de la dimension des sédiments.

A la **composante tangentielle** correspond un transport le long du littoral. La direction d'un tel transport est directement liée à la direction de la houle au large, d'une part, et à l'angle que fait la houle déferlente avec la ligne de rivage, d'autre part.

1.2.2. AMENAGEMENTS : INFLUENCE DE L'HOMME SUR LE LITTORAL

Le littoral maritime est une zone vivante, tantôt soumise ici et là à l'érosion, tantôt à la sédimentation.

Les modifications du littoral sont souvent plus spectaculaires que celles observées à l'intérieur du continent pour le phénomène d'érosion/sédimentation.

Citons l'exemple des **grands deltas** en Méditerranée : le Nil, le Rhône, ... (voir journées ASTEO, réf. 1 et travaux de l'UNDP/UNESCO and department of civil engineering, Cairo University - réf. 9, ainsi que réf. 10).

Pour donner des ordres de grandeur de la sédimentation ou de l'érosion, selon le critère des modifications du trait de côte d'un littoral, citons le cas du **littoral aquitain** (érosion conjuguée du vent et de la houle) - (cf fig. 7 et 8 - réf. 12).

Ainsi, à la pointe de la Négade, le trait de côte a reculé d'environ 5 km depuis 1740 ! A la pointe de la Grave, le recul du trait de côte était en moyenne de l'ordre de 25 m/an, jusqu'à ce qu'inquiété par un tel recul, on décida des travaux d'aménagement et on construisit la jetée de la pointe de la Grave (1844) : l'érosion diminua.

L'Homme peut donc agir sur le littoral, en modifier la morphologie et son évolution.

L'aménagement du littoral ne doit pas être seulement la construction de ports, la mise en valeur de zones touristiques, mais aussi l'aboutissement d'actions concertées ayant comme but la conservation et la défense des côtes (voir séminaire Propriano, réf. 11).

Un aménagement, même ponctuel, peut destabiliser toute une côte en aggravant le transport littoral et l'érosion ou bien la sédimentation (ex. : le Mont St Michel).

1.3. BREF APERCU DES MOYENS D'ETUDE DES PHENOMENES LIES A LA HOULE EN ZONE COTIERE

Nous avons vu brièvement le rôle joué par la houle dans les modifications qu'elle apporte au littoral. Aussi, pour répondre aux problèmes liés à l'aménagement du littoral, est-il indispensable d'étudier les houles lorsqu'elles arrivent en zone côtière.

Comme dans d'autres problèmes physiques, on peut faire deux types d'études :

- * étude sur **modèle réduit physique** ;
- * étude sur **modèle mathématique** ;

et ces études peuvent se faire à deux niveaux :

- * étude **hydraulique** ;
- * étude **sédimentologique**.

1.3.1. MODELES REDUITS SEDIMENTOLOGIQUES

Ils permettent de représenter les phénomènes complexes d'interaction entre les houles et les courants et l'ensemble des mouvements sédimentaires.

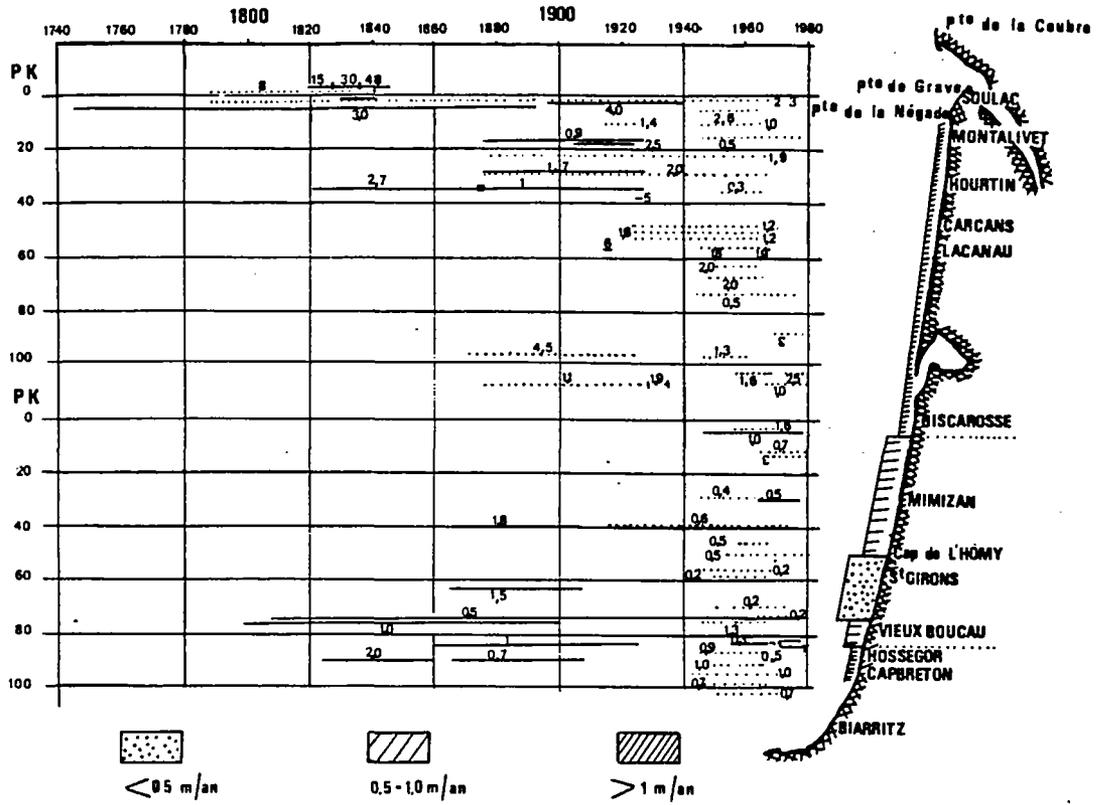


Fig. 7 : Recul moyen annuel du trait de côte entre les embouchures de la Gironde et de l'Adour

(d'après réf. 12)

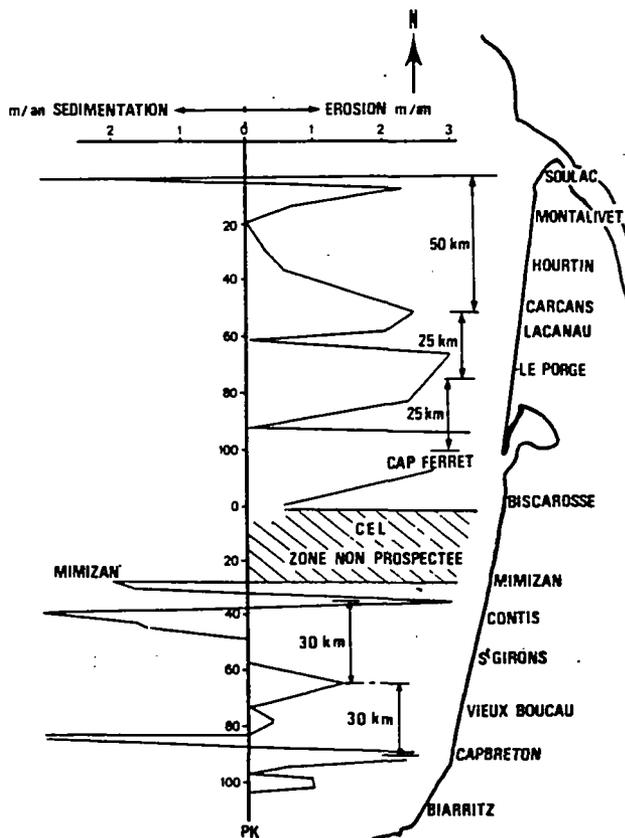


Fig. 8 : Modification du trait de côte entre Février 79 et Janvier 82

D'après réf. 12
(littoral aquitain)

Ils nécessitent un choix minutieux des échelles et des matériaux mobiles. Ils doivent également bien représenter les phénomènes hydrauliques dans leur succession dans le temps.

Les modèles réduits physiques sédimentologiques ont fait leurs preuves et constituent un moyen fiable d'étude. Néanmoins, à chaque site étudié correspond un modèle réduit ; aussi, si l'on veut passer à l'étude d'un nouveau site, il faut construire un nouveau modèle réduit : on ne peut donc pas parler d'amortissement des coûts de revient.

1.3.2. MODELES MATHEMATIQUES HYDRAULIQUES

L'évolution de la technique des ordinateurs permet une mise en oeuvre relativement simple et un traitement rapide de la plupart des phénomènes hydrauliques pouvant être bien séparés :

- * champs de courants, réfraction et diffraction des houles, action des vents de surface.

En l'état actuel de la technique, il faut apporter des simplifications si l'on veut limiter les temps de calculs.

De tels modèles sont souples à l'emploi, dans la mesure où le passage de l'étude d'un site à un autre se réduit à l'introduction de nouvelles conditions bathymétriques et de nouvelles conditions aux limites sur l'écoulement (courants, vents) ou la propagation (houle).

1.3.3. MODELES MATHEMATIQUES SEDIMENTOLOGIQUES

On ne dispose, à l'heure actuelle, de tels modèles que pour l'étude des cas les plus simples. Il n'existe pas encore de modèles mathématiques de sédimentologie côtière opérationnels.

1.4. MODELE MATHEMATIQUE HYDRAULIQUE ETUDIE DANS LE PRESENT RAPPORT

Le modèle présenté se limitera à la seule étude de la réfraction de la houle en zone littorale, ignorant tous autres phénomènes, tels la diffraction, la réflexion, les courants.

Il ne permettra pas une étude de la propagation de la houle dans des zones où les phénomènes ignorés par le modèle interviennent fortement, par exemple à l'intérieur des ports et à l'abord de digues ou de jetées.

Néanmoins, dans de bonnes conditions d'utilisation, le modèle permettra d'obtenir :

- * un plan de vagues (hauteur de creux et direction de la houle);
- * les lieux de déferlement ;
- * l'estimation du transport littoral.

2. MODELISATION DE LA HOULE

* *
* *

2.1. HOULE REELLE

Nous avons vu, en introduction, qu'une houle était caractérisée par une amplitude, une période, une longueur d'onde et une direction bien constantes. Cependant, la réalité est tout autre. Une houle n'est jamais monochromatique, elle est composée de trains de vagues de périodes différentes.

Les amplitudes, longueurs d'onde et directions sont généralement variables (fig. 9).

Une modélisation de la houle qui tiendrait compte de ces variations plus ou moins aléatoires serait si complexe, qu'il faudrait renoncer à modéliser la houle. On décide donc de travailler avec une amplitude significative et une période significative.

2.1.1. DETERMINATION DE L'AMPLITUDE SIGNIFICATIVE

L'amplitude significative sera obtenue grâce à un enregistrement de l'amplitude, représentant un état de la mer pendant une durée Δt , durée d'observation.

Pour une houle de fréquence peu dispersée, les amplitudes H suivent une loi de RAYLEIGH.

Supposons que l'on dispose, à la fin de l'enregistrement, de N observations. Notons $\overline{H^2}$, la moyenne quadratique des amplitudes observées :

$$\overline{H^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H_j^2$$

L'abaque en papier de RAYLEIGH, donnée en fig.10, permet de calculer le creux H_{p_0} correspondant à une probabilité de dépassement $p (H > H_{p_0}) = p_0$

On choisit de prendre communément pour **amplitude significative** H_S , l'amplitude correspondant à une probabilité de dépassement :

$$p (H > H_S) = 0,129$$

ainsi

$$H_S \approx 1,416 (\overline{H^2})^{1/2}$$

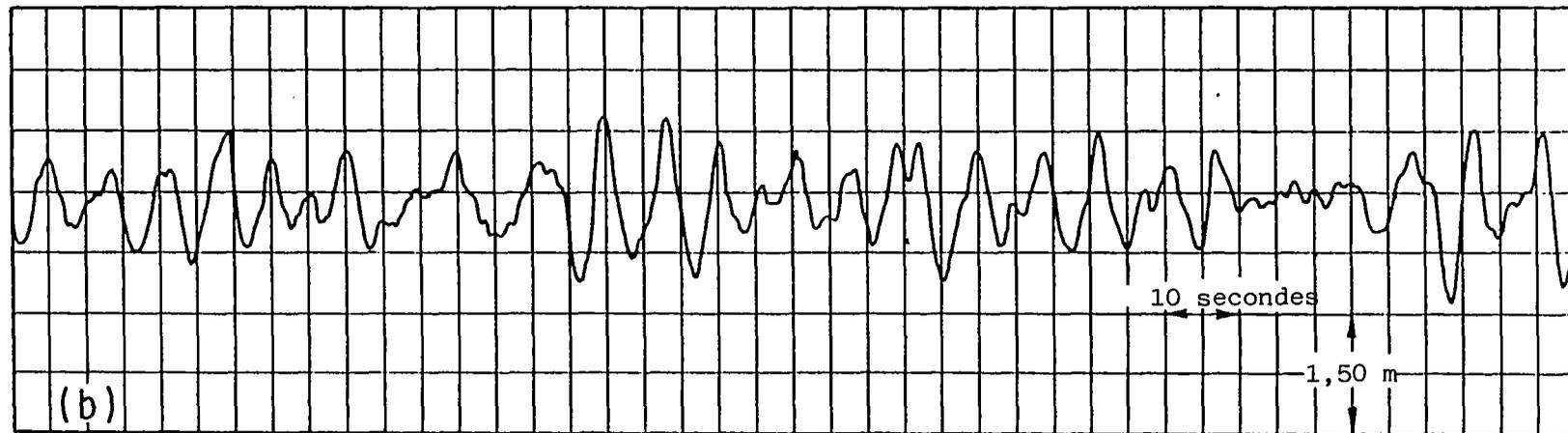
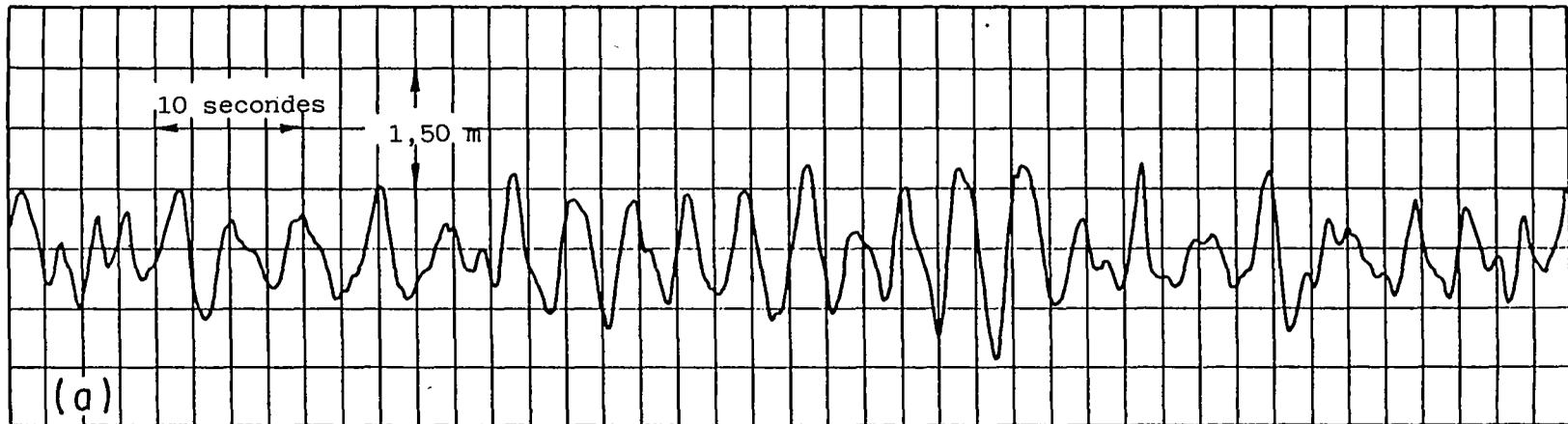


Fig. 9 (d'après réf. 3.) - Echantillons d'enregistrement de la houle.
 a) hauteur significative 1,65 m, période 4 s (Portal island, Etats-Unis)
 b) hauteur significative 1,65 m, période 8 s (Huntington beach, Californie)

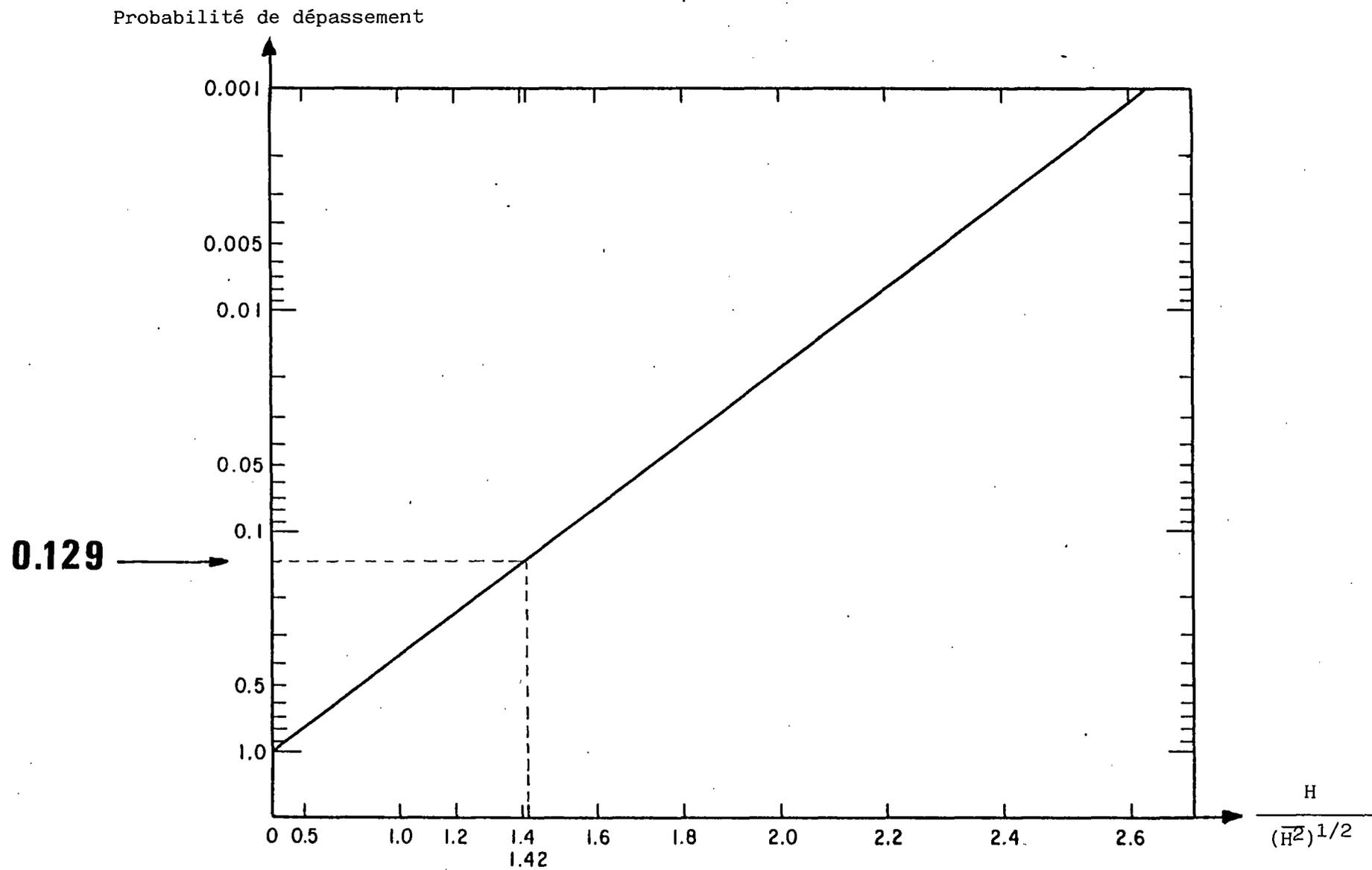


Fig. 10 - Distribution théorique de Rayleigh des creux de houle.
 (d'après réf. 3)

2.1.2. DETERMINATION DE LA PERIODE SIGNIFICATIVE

On prend généralement pour période significative T_s , la moyenne obtenue par l'observation visuelle de 10 à 15 vagues importantes successives.

2.1.3. CONCLUSION

Des modèles mathématiques considéreront la houle comme un phénomène monochromatique pour lequel en un lieu donné, l'amplitude sera constante dans le temps :

$$T = T_s$$

$$H = H_s$$

2.2. PRESENTATION GENERALE DES THEORIES DE LA HOULE

L'étude théorique de la houle se propose de déterminer une solution aux équations qui régissent la propagation de la houle. Cette solution doit satisfaire certaines conditions et a toujours comme point de départ, certaines hypothèses.

2.2.1. HYPOTHESES DE DEPART

- * le fluide est homogène et incompressible ;
- * le fluide est supposé parfait ;
- * la tension superficielle est négligée ;
- * les forces de coriolis sont négligées ;
- * la surface libre du fluide est soumise à la propagation d'une onde périodique ;
- * le mouvement de la houle est supposé cylindrique, à génératrices perpendiculaires à la direction de propagation.

2.2.2. CONDITIONS

La pression à la surface libre de l'eau est uniforme, constante et égale à la pression atmosphérique.

Le fond est horizontal et imperméable :

- * vitesse des particules sur le fond nulle ou horizontale ;
- * on assimilera un fond dont la pente est inférieure à 10 %, à un fond horizontal.

Trois conditions possibles pour le rotationnel :

- * le rotationnel du mouvement est nul (houle irrotationnelle) ;

- * le rotationnel est non nul ; le déplacement horizontal moyen des molécules d'eau est nul ;
- * le rotationnel est non nul ; le déplacement horizontal moyen des molécules d'eau est non nul.

2.2.3. QUELQUES THEORIES DE LA HOULE

Les équations qui régissent la propagation de la houle sont fortement non linéaires.

On recherche alors une solution approchée en développant les coordonnées x et z de chaque particule et la pression p en un point, fonctions de coordonnées de référence x_0 , z_0 et du temps t , en série de puissances successives de l'amplitude H de la houle.

Ainsi :

$$x = x_0 + H.X_1 + H^2.X_2 + \dots$$

$$z = z_0 + H.Z_1 + H^2.Z_2 + \dots$$

$$p = p_0 + H.P_1 + H^2.P_2 + \dots$$

où $X_1, X_2, \dots; Z_1, Z_2, \dots; P_1, P_2, \dots$, sont des fonctions de x_0, z_0 et t .

Si l'on arrête les séries à l'ordre n , on obtiendra comme solution, une houle du nième ordre.

a) Théories du 1er ordre appelées aussi théories linéaires (toujours irrotationnelles).

- * houle d'AIRY (petites amplitudes), 1845 (fig. 11);
- * houle de STOKES.

b) Théories du 2ème ordre.

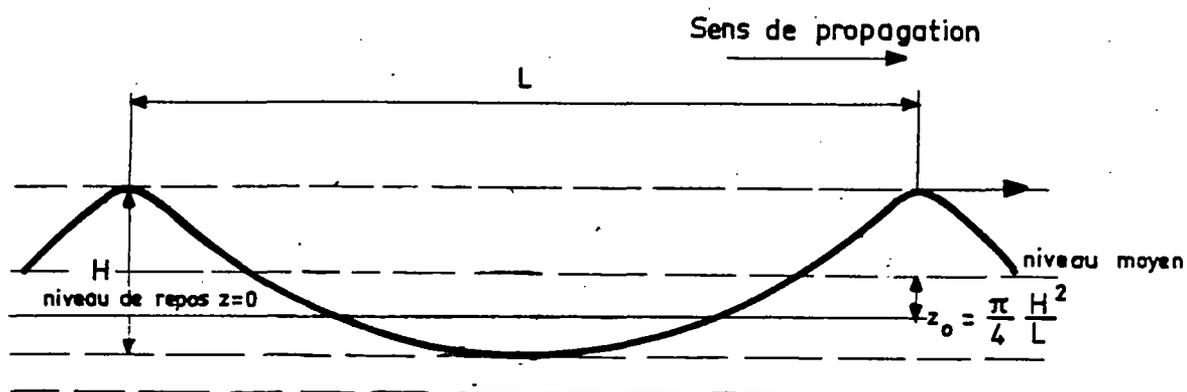
- * houle de STOKES (1880) - (fig. 11);
- * houle de MICHE (1944) ;
- * houle de BOUSSINESQ (cnoïdale).

c) Solution exacte (profondeur infinie).

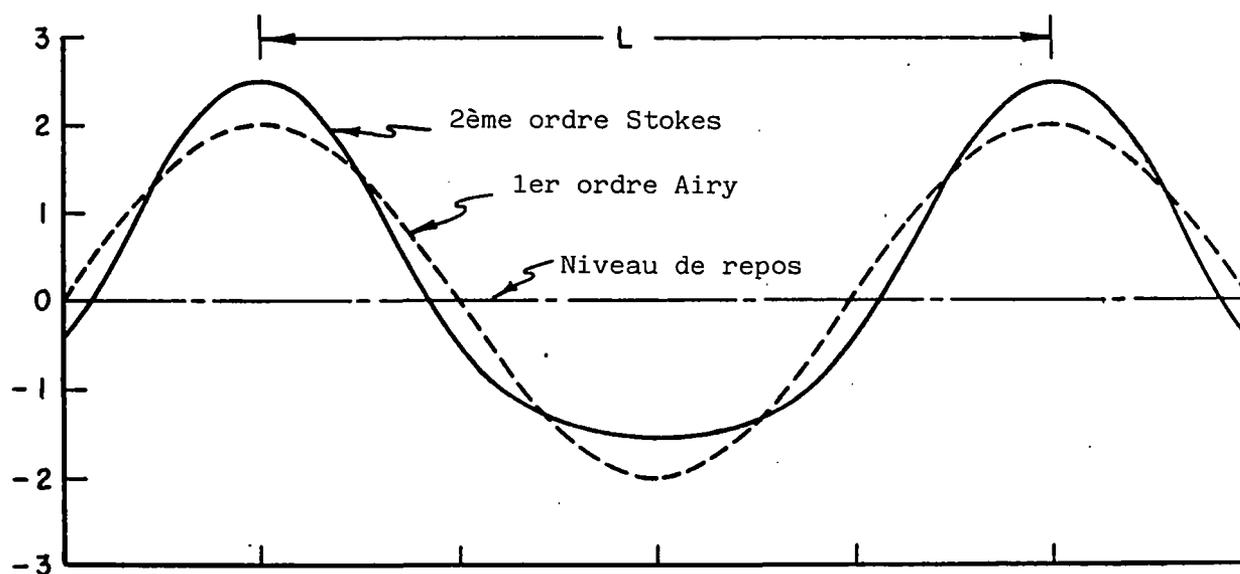
- * houle de GERSTNER (trocoïdale) - (fig. 11).

2.2.4. DOMAINES DE VALIDITE DES THORIES DE LA HOULE

Le diagramme ci-après (fig. 12) rend compte des domaines de validité de quelques théories de la houle (d'après Le MEHAUTE, 1969).



Onde trocoïdale (réf. 6).



(d'après réf. 3)

Fig. 11 - Comparaison de divers profils théoriques de houle.

D : profondeur

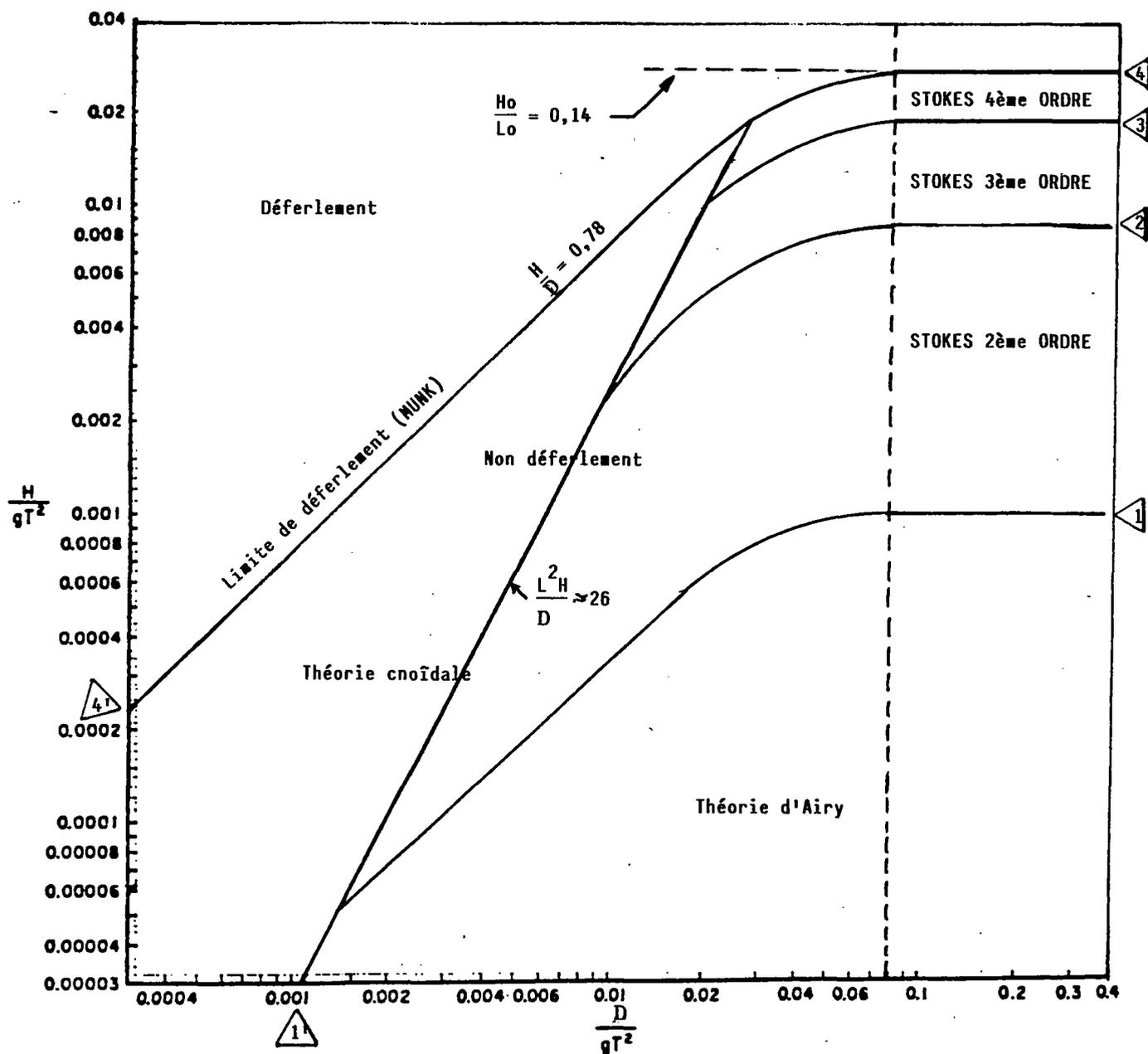


Fig. 12 - Domaine de validité de quelques théories de la houle.
(D'après réf. 3)

a) Le domaine du déferlement

D'après la théorie de MUNCK, la limite de déferlement est donnée par le rapport $\frac{H}{D} = 0,78$.

Dans ce cadre, le domaine de déferlement est représenté en fig. 12, par le domaine au-dessus de la ligne 4 - 4'. Au-delà du déferlement, une houle, de caractéristiques différentes de celles avant son déferlement, peut se reformer. Il n'existe pas, néanmoins, de modèles qui puissent bien représenter ce phénomène. En effet, les conditions de formation d'une houle de caractéristiques bien définies sont complexes (problèmes de dissipation d'énergie, de pente de la plage,...).

Des études ont montré sur un exemple expérimental (NAKAMURA : déferlement au-dessus d'une digue submergée -fig. 13-), que l'amplitude H_0 de la houle reformée dépend des rapports $\frac{l}{L_0}$, $\frac{D'}{H_0}$ (fig. 14).

Des études ont également été menées sur la zone de déferlement de fond constante (NAKAMURA, réf. 8).

b) Les théories de STOKES d'ordres 2, 3 et 4, de domaines de validité respectivement au-dessous des lignes 2-1', 3-1' et 4-1' (fig.12), permettent de bien modéliser les houles d'amplitudes relativement importantes mais ne sont plus valables pour des profondeurs $D < 0,001 gT^2$.

c) La théorie d'onde cnoïdale (2ème ordre) permet de combler le vide existant pour la propagation de la houle en très faibles profondeurs. Elle convient donc tout particulièrement au calcul de propagation de la houle d'amplitude relativement importante en zones de faibles profondeurs.

Domaine de validité : au-dessous de la ligne 4-4' et au-dessus de la ligne 4-1' (fig. 12).

d) La théorie d'Airy

Théorie linéaire, elle n'est valable que pour des houles de faible amplitude et n'est plus valable pour des profondeurs $D < 0,001 gT^2$.

Domaine de validité : domaine au-dessous de la ligne 1-1' (fig. 12).

Le domaine de validité de la théorie d'Airy peut être défini de manière plus simple (fig. 15). En effet, les domaines définis par Le Méhauté, bien que significatifs, n'en sont pas moins approximatifs et soumis à des discussions (critères de DEAN, 1973), surtout sur le domaine de validité de la théorie d'Airy.

EXPERIENCE DE NAKAMURA

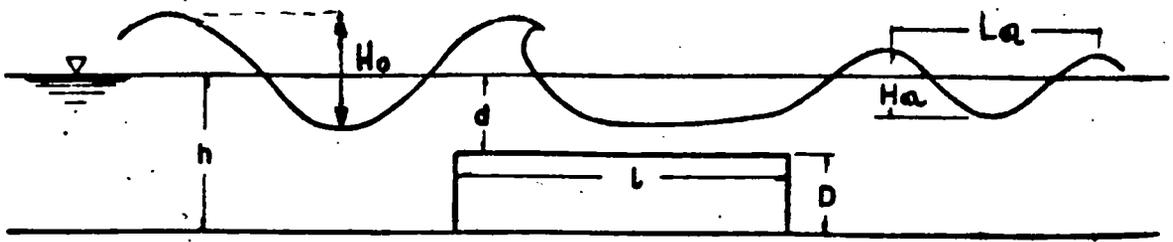


Fig. 13 - Déferlement de la houle sur une digue submergée.

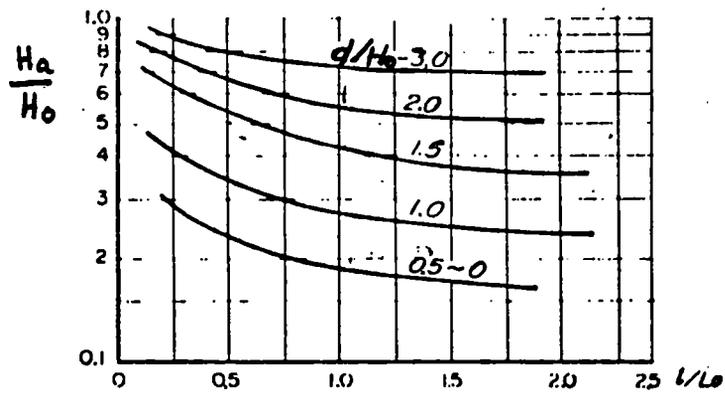
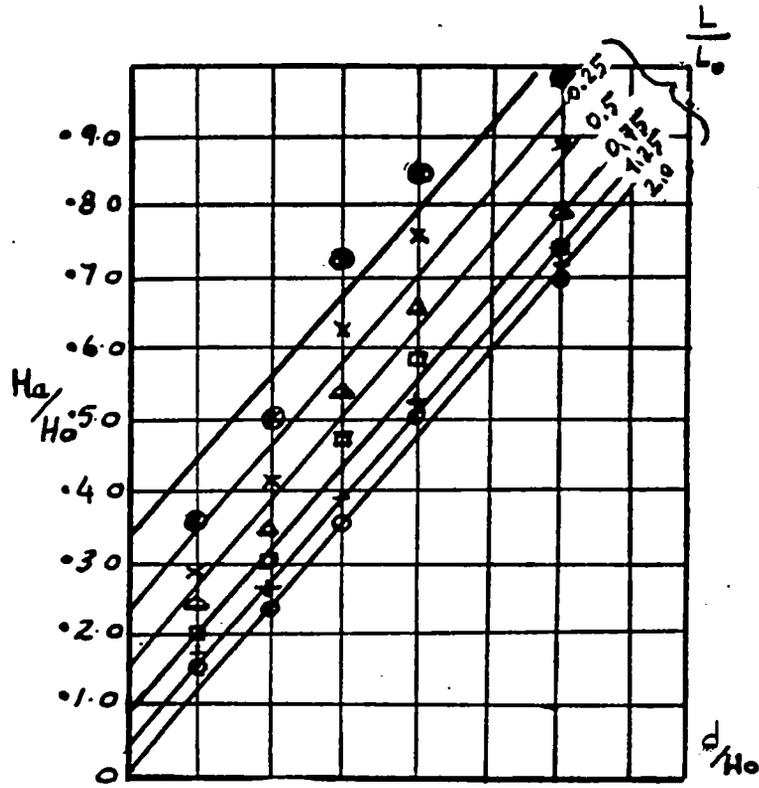


Fig. 14 - Résultats expérimentaux (d'après réf. 8)

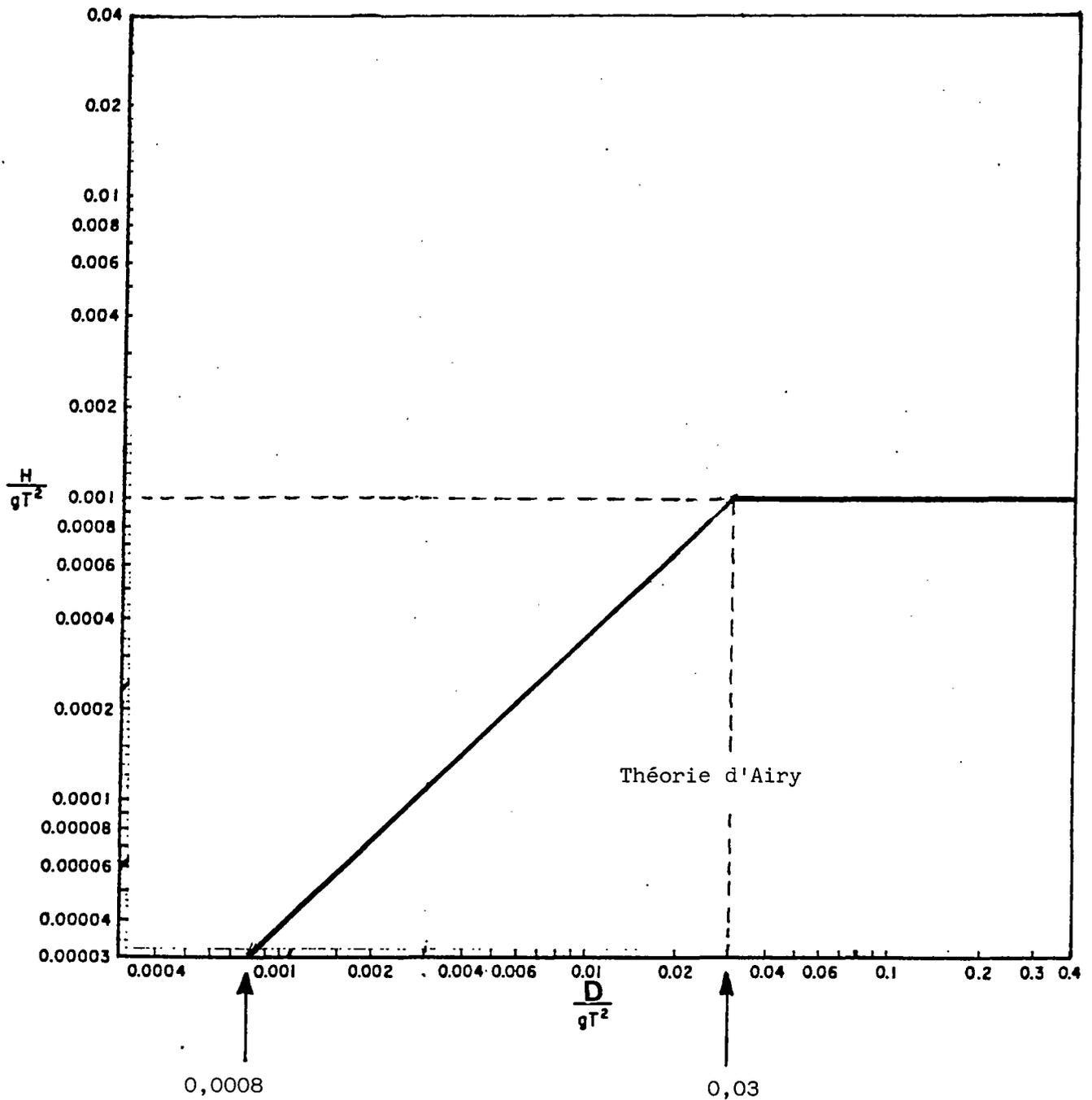


Fig. 15 - Domaine de validité de la théorie d'Airy (simplifié).

Donnons, à titre indicatif, quelques ordres de grandeur :

T = 4s	D > 0,47 m	H < 0,16 m
	D = 0,23 m	H < 0,03 m
	D < 0,13 m	H ≈ 0
T = 6 s	D > 1,06 m	H < 0,35 m
	D = 0,53 m	H < 0,07 m
	D < 0,28 m	H < 0,01 m
T = 10 s	D > 2,94 m	H < 0,98 m
	D = 1,47 m	H < 0,20 m
	D < 0,78 m	H < 0,03 m
T = 16 s	D > 7,53 m	H < 2,51 m
	D = 3,77 m	H < 0,50 m
	D < 2,01 m	H < 0,08 m

Ces chiffres montrent à quel point il sera difficile de poursuivre la modélisation de la houle en théorie linéaire jusqu'à des lieux où la profondeur est relativement faible.

Néanmoins, la facilité de mise en oeuvre numérique du modèle d'Airy en fait un modèle largement adopté pour les calculs de réfraction.

De plus, les calculs de la houle peuvent se poursuivre, dès que l'on sort du domaine de validité de la théorie d'Airy, par un autre modèle. On préfère souvent poursuivre la modélisation par un modèle d'onde cnoïdale.

2.3. CONCLUSION

Compte tenu des avantages et inconvénients de telle ou telle théorie, il a été décidé de mettre au point la modélisation de propagation de la houle en théorie linéaire.

La continuation en théorie cnoïdale, quoique réalisable, ne sera pas mise au point.

Une sortie graphique de propagation de la houle permettra de visualiser à partir de quel moment les résultats obtenus ne sont plus valables, selon le critère de Le Méhauté.

Dans ces conditions, les problèmes liés au déferlement (reformation d'une houle en zone de déferlement) ne seront pas abordés : la propagation de la houle sera arrêtée au lieu de déferlement déterminé selon certains critères exposés ultérieurement.

* *
* *

3. PRESENTATION DE LA THEORIE LINEAIRE DE LA HOULE

* *
*

3.1. RESTRICTIONS A UNE THEORIE GENERALE

- * Houle cylindrique.
- * Houle bidimensionnelle.
- * Houle irrotationnelle.
- * Houle à génératrices rectilignes et perpendiculaires à la direction générale du mouvement.
- * Houle se propageant en profondeur constante.

3.2. PARAMETRES CARACTERISTIQUES DE LA HOULE

- * La période T (= période significative = cte).
- * La longueur d'onde L.
- * La célérité $c = \frac{L}{T}$
- * L'amplitude H (= amplitude significative).

3.3. EQUATIONS DE DEPART

Equation de la dynamique :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + g = 0$$

(coordonnées eulériennes).

Equation de continuité :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Equation du rotationnel :

$$\operatorname{Rot} \vec{V} = \vec{0}$$

3.4. CONDITIONS QUE DOIT SATISFAIRE LA SOLUTION

- * Le mouvement est périodique en $\left\{ \frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right\}$
- * Le mouvement au fond est nul si on se trouve en profondeur infinie ou parallèle au fond en profondeur limitée.
- * La pression est égale à P_{atm} à la surface libre de l'eau.

3.5. HOULE LINEAIRE

3.5.1. DETERMINATION DE LA FONCTION POTENTIEL DE HOULE

Il n'est, en général, pas possible de déterminer une solution exacte. On arrive donc à considérer une solution approchée qui, dans la cas d'une houle irrotationnelle, s'exprime à l'aide d'une fonction ϕ , potentiel des vitesses.

En effet, si $\operatorname{Rot} \vec{V} = \vec{0}$

$$\text{on a } \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

d'où l'existence de ϕ , telle que :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ et } w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\text{Soit } \vec{V} = \operatorname{grad} \phi$$

De plus, l'équation de continuité $\operatorname{div} V = 0$ conduit à :

$$\Delta \phi = 0$$

On sait que la houle est un phénomène périodique en $\left\{ \frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right\}$

$$\text{Posons } X = \frac{t}{T} - \frac{x}{L}$$

Considérons la fonction ϕ sous la forme :

$$\phi(x, z, t) = \phi(X, z) = f(X) \cdot h(z)$$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} = -f' \cdot h \cdot \frac{1}{L}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} f'' \cdot h$$

aussi

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = f \cdot h''$$

alors

$$\Delta\phi = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{L^2} f'' \cdot h + f \cdot h'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{L^2} \frac{f''}{f} = -\frac{h''}{h}$$

$$\frac{f''}{f} \text{ fonction de } X \text{ seul}$$

$$\frac{h''}{h} \text{ fonction de } z \text{ seul}$$

en conséquence :

$$\frac{1}{L^2} \frac{f''}{f} = -\frac{h''}{h} = \pm k^2$$

seule est acceptable la considération de $-k^2$ qui conduit à une relation sinusoïdale en X .

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} f(X) = A \sin(kLX + \psi) \\ h(z) = C_1 e^{-kz} + C_2 e^{kz} \end{cases}$$

3.5.2. CONSIDERATION DE LA PERIODICITE

ϕ est périodique en x , de période L .

$$\phi(x, z, t) = \phi(x + L, z, t)$$

$$\Leftrightarrow \phi(X, z) = \phi(X - 1, z)$$

$$\Leftrightarrow kLX = kL(X - 1) + 2\pi$$

$$\Leftrightarrow kL = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2\pi}{L}$$

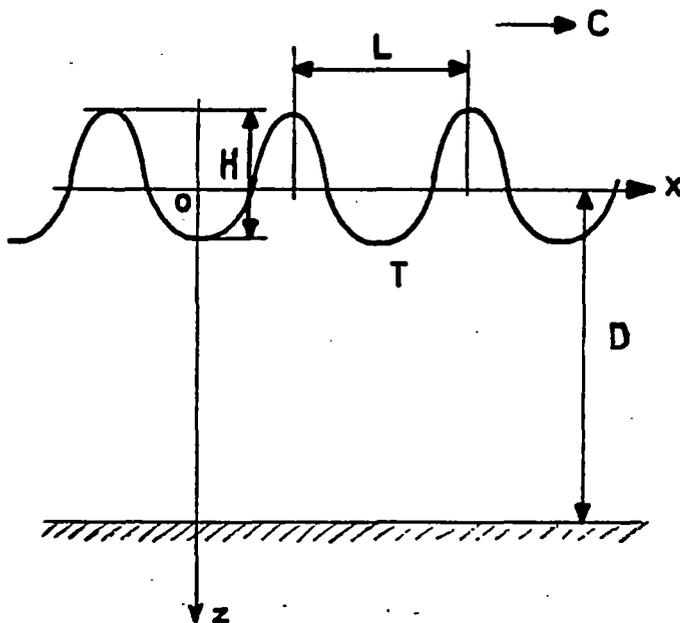
ainsi :

$$\begin{cases} f(X) = A \sin(2\pi X + \psi) \\ h(z) = C_1 e^{-\frac{2\pi z}{L}} + C_2 e^{\frac{2\pi z}{L}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(X) = A \sin(2\pi X + \psi) \\ h(z) = B_1 \operatorname{ch} \frac{2\pi z}{L} + B_2 \operatorname{sh} \frac{2\pi z}{L} \end{cases}$$

3.5.3. CONSIDERATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

a) Le fond



Si D grand devant L , alors $f(z) \rightarrow 0$

sauf si $B_2 = 0$

d'où

$$h(z) = B_1 \operatorname{ch} \frac{2\pi z}{L}$$

ou

En profondeur D "finie"

$$\vec{V}_n \Big|_{\Sigma} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=D}$$

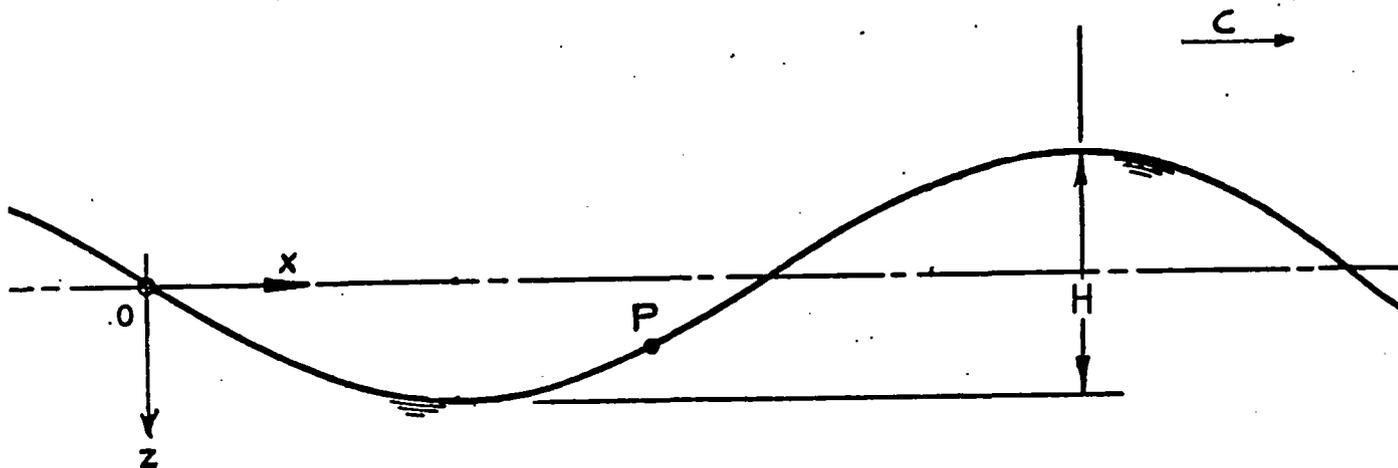
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{2\pi A}{L} \sin(2\pi X + \psi) \cdot \left\{ B_1 \operatorname{sh} \frac{2\pi z}{L} + B_2 \operatorname{ch} \frac{2\pi z}{L} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=D} = 0 \Leftrightarrow B_1 = -B_2 \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi D}{L}}{\operatorname{sh} \frac{2\pi D}{L}}$$

Ainsi :
$$\phi(X,z) = A' \cdot \sin 2 \pi X \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{L} (D - z)}{\operatorname{sh} \frac{2\pi D}{L}}$$

En effet, ψ peut être pris arbitrairement égal à zéro.

b) La surface libre



Equation de la surface libre :

$$z_S = z_S(x,t)$$

pour une particule P donnée :

$$u = \frac{dx_p}{dt} \qquad w = \frac{dz_p}{dt}$$

La dérivée particulaire de z_S :

$$\frac{dz_S}{dt} = \frac{\partial z_S}{\partial x_S} \cdot \frac{dx_S}{dt} + \frac{\partial z_S}{\partial t}$$

Si la particule P se trouve à un instant donné sur la surface libre, elle y restera.

ainsi : $x_s = x_p$ et $z_s = z_p$

$$\text{alors } \frac{dz_p}{dt} = \frac{\partial z_p}{\partial x_p} \cdot \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial z_p}{\partial t}$$

$$\text{soit } w = \frac{\partial z_p}{\partial x_p} \cdot u + \frac{\partial z_p}{\partial t}$$

$\frac{\partial z_p}{\partial x_p}$ représente la pente de la surface libre à t fixé

En considérant que la cambrure de la houle est faible, on peut négliger :

$$\frac{\partial z_p}{\partial x_p} \quad \text{ainsi que } u \frac{\partial z_p}{\partial x_p}$$

$$\text{alors : } w = \frac{dz_p}{dt} \approx \frac{\partial z_p}{\partial t}$$

L'équation de la dynamique et l'équation de continuité conduisent à l'équation de BERNOULLI généralisée :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{cte} \quad (3.0)$$

où

$$v^2 = u^2 + w^2$$

En supposant que les vitesses des particules à la surface libre sont assez petites, on peut négliger le terme $\frac{v^2}{2}$ devant tous les autres (voir justification en annexe B).

Soit alors :

$$\frac{p}{\rho} + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{cte}$$

et en dérivant cette équation par rapport au temps :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + g \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

De plus, à la surface libre $P = \text{cte} = P_{atm}$
d'où

$$g \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Comme on a confondu } w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{avec } \frac{\partial z}{\partial t}$$

pour toute particule à la surface libre, on arrive enfin à l'équation différentielle en ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

or

$$\phi = A' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{D-z}{L}}{\operatorname{sh} 2\pi \frac{D}{L}}$$

L'équation 3.1 conduit à la condition :

$$\frac{g T^2}{2\pi L} = \operatorname{coth} \frac{2\pi D}{L} \quad (3.2)$$

C'est l'expression fondamentale qui relie la longueur d'onde L , la période T de la houle et la profondeur D .

Considérons la rapport $\frac{D}{L}$ et traçons la fonction $\frac{gT^2}{2\pi L} = F \left(\frac{D}{L} \right)$ (voir fig. 16).

A la vue de l'écart existant entre les valeurs de $\frac{gT^2}{2\pi L}$ pour $\frac{D}{L}$ fixé et celle de $\frac{gT^2}{2\pi L}$ pour $\frac{D}{L}$ "infini",

on considérera que l'on se trouve dans les conditions grande profondeur ou eau profonde, si le rapport $\frac{D}{L} > \frac{1}{2}$; L étant la longueur d'onde de la

houle locale passant sur un domaine de profondeur D .

c) Détermination de la constante A'

L'équation de la surface libre peut s'écrire sous la forme :

$$z_s(t) = \frac{H}{2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right)$$

On sait, de plus, qu'à la surface libre on peut confondre

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\}_s \text{ avec } \frac{\partial z_s}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{2\pi}{T} \frac{H}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right)$$

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\}_s = - \frac{2\pi}{L} A' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \frac{\operatorname{sh} 2\pi \frac{D-z_s}{L}}{\operatorname{sh} 2\pi \frac{D}{L}}$$

On peut identifier ces deux expressions à tout instant et quel que soit x .

Choisissons un instant t_0 et un lieu x_0 pour lesquels la particule sur la surface libre occupe l'ordonnée $z_s = 0$

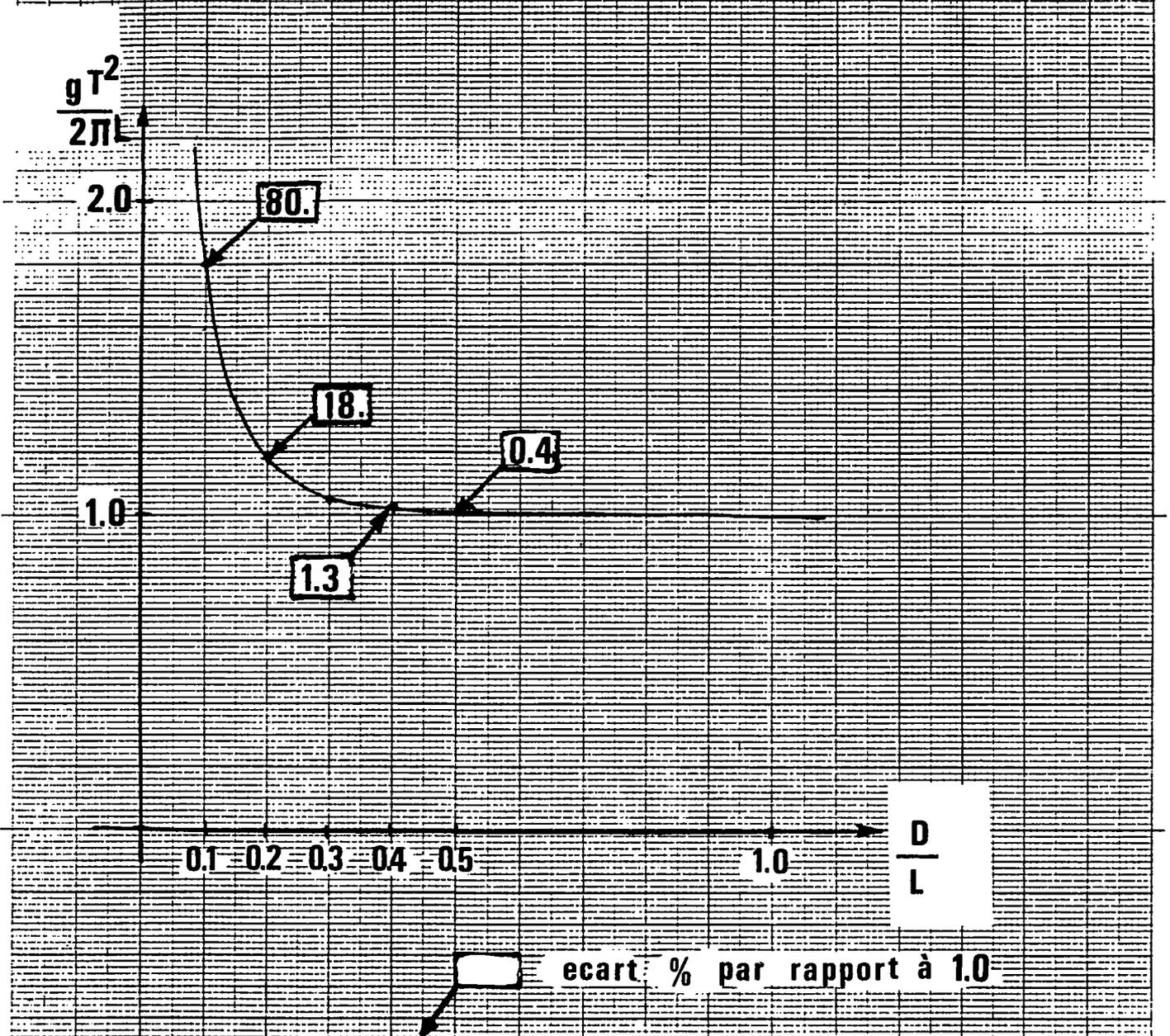
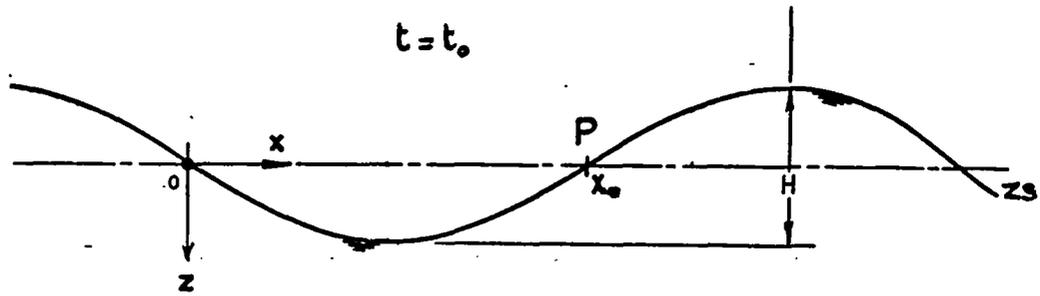


Fig. 16 - $\frac{gT^2}{2\pi L}$ fonction de $\frac{D}{L}$



on obtient alors $A' = -\frac{HL}{2T}$

3.5.4. CONCLUSION

Cas de figure eau profonde

$$* \frac{D}{L} > \frac{1}{2}$$

$$* L = \frac{gT^2}{2\pi} \quad C = \frac{gT}{2\pi}$$

$$* \phi(x, z, t) = -\frac{HL}{2T} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \operatorname{ch} \frac{2\pi z}{L}$$

Cas de figure non eau profonde

$$* \frac{D}{L} < \frac{1}{2}$$

$$* L = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{th} 2\pi \frac{D}{L} \quad C = \frac{gT}{2\pi} \operatorname{th} 2\pi \frac{D}{L}$$

relation implicite en L, $L = L(T, D)$

$$* \phi(x, z, t) = -\frac{HL}{2T} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{D-z}{L}}{\operatorname{sh} 2\pi \frac{D}{L}}$$

Remarque importante : la discrimination zone eau profonde-non profonde n'est pas seulement liée à la profondeur d'eau, mais également à la période de la houle.

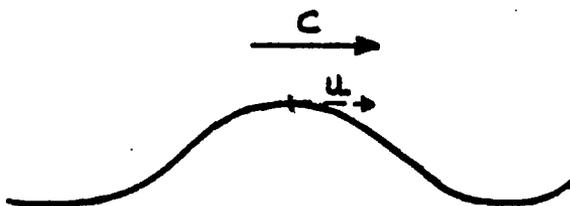
3.6. DEFERLEMENT DE LA HOULE

3.6.1. CONSIDERATIONS THEORIQUES

On peut voir, d'après l'expression de la composante u de la vitesse, qu'elle est une fonction croissante de H .

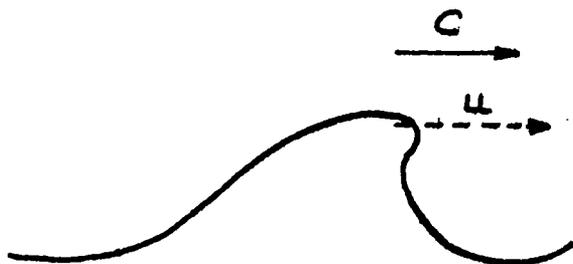
En effet, si on considère un point M en sommet de crête, à l'instant t et position x fixés, $z = -\frac{H}{2}$ la vitesse u s'écrit :

$$u = \pi \cdot \frac{H}{T} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{D + H/2}{L}}{\operatorname{sh} 2\pi \frac{D}{L}}$$



D'après la théorie de Stokes :
la valeur critique de u
correspond à la célérité de
la houle : $u^* = C$

Si u continuait d'augmenter au-delà de la valeur critique, cela voudrait dire que les particules en sommet de crête se déplaceraient à une vitesse u supérieure à la célérité de la houle, créant ainsi l'instabilité de la houle.



la houle déferle

Conditions de déferlement :

$$u^* = C^* = \frac{L^*}{T} = \pi \frac{H^*}{T} \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{D^* + \frac{H^*}{2}}{L^*}}{\operatorname{sh} 2\pi \frac{D^*}{L^*}} \quad (3.3)$$

3.6.2. DEFERLEMENT EN EAU PROFONDE

$$H^* \ll D^*$$

L'équation (3.3) se simplifie à l'extrême, dans la mesure où $\operatorname{th} 2\pi \frac{D}{L} \approx 1$.

On arrive alors à :

$$\left(\frac{H}{L}\right)^* = \frac{1}{\pi} \approx 0,142$$

3.6.3. DEFERLEMENT EN EAU PEU PROFONDE

Dans la mesure où l'on peut négliger $\frac{H^*}{2}$ devant D, l'équation 3.3. conduit à :

$$\left(\frac{H}{L}\right)^* = \frac{1}{\pi} \operatorname{th} 2\pi \frac{D}{L^*}$$

3.6.4. AUTRE CRITERE DE DEFERLEMENT DE LA HOULE EN EAU PEU PROFONDE

MUNK (1949) propose deux formules pour déterminer l'amplitude de la houle au point de déferlement H^* :

$$\frac{H^*}{H_0} = \frac{1}{3,3 \cdot (H_0/L_0)^{1/3}}$$

et

$$\frac{H^*}{D^*} = 0,78$$

où les variables indicées o correspondent aux caractéristiques de la houle en eau profonde, et D la profondeur au point de déferlement.

(Voir comparaison des critères de STOKES et MUNK en annexe C)

3.7. ASPECT ENERGETIQUE DE LA HOULE

3.7.1. DEFINITION DES ORTHOGONALES DE HOULE

On appelle orthogonales de houle, les orthogonales aux crêtes, enveloppe des directions de propagation.

En propagation sur un fond à profondeur constante, les orthogonales sont des droites perpendiculaires aux lignes de crêtes.

3.7.2. ENERGIE DE LA HOULE

a) Energie totale

L'énergie totale de la houle est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

L'énergie cinétique, E_c , est la part de l'énergie totale due aux vitesses de déplacement des particules d'eau soumises à la houle.

L'énergie potentielle, E_p , est l'énergie mise en jeu du fait du déplacement des particules entre le creux et la crête de la houle.

D'après la théorie d'AIRY, et dans la mesure où l'énergie potentielle est calculée par rapport à la cote de la surface libre au repos, et où la houle se propage dans une même direction, on a :

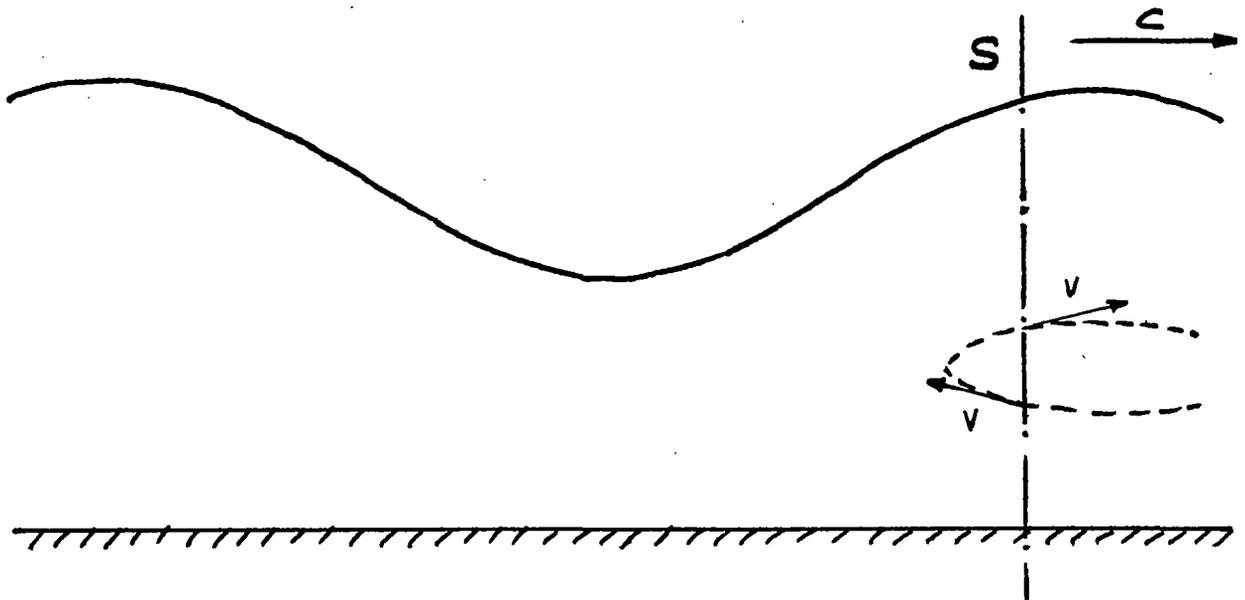
$$E_p = E_c = \rho g \frac{H^2 L}{16}$$

$$E_t = \rho g \frac{H^2 L}{8}$$

Toutes les énergies sont exprimées par mètres de largeur de crête.

b) Débit d'énergie, énergie transmise

On appelle **débit d'énergie de la houle**, la quantité d'énergie transmise dans la direction de propagation de la houle, par unité de temps et de longueur d'onde, la surface considérée étant un plan vertical, perpendiculaire à la direction de propagation de la houle.



L'énergie cinétique des particules d'eau ne se transmet pas à travers S (compte tenu des symétries). Par contre, l'énergie potentielle se transmet.

On admettra que l'énergie transmise, notée E_T s'écrit :

$$E_T = \frac{\rho g L H^2}{16} \left\{ 1 + \frac{4 \pi \frac{D}{L}}{\text{sh } 4 \pi \frac{D}{L}} \right\} \quad (3.4)$$

Dans le cas d'une propagation en eau profonde :

$$(E_T)_o = \frac{\rho g L_o H_o^2}{16}$$

ainsi : $(E_T)_o = (E_p)_o$

l'indice o indiquant que la houle est considérée au large.

c) Célérité de groupe

Définition : la célérité de groupe, C_g , est égale à la dérivée de la fréquence angulaire de la houle par rapport au nombre d'onde $k = 2\pi/L$.

On peut démontrer que C_g s'écrit :

$$C_g = \frac{C}{2} \left\{ 1 + \frac{4\pi D/L}{\text{sh } 4\pi D/L} \right\} \quad (3.5)$$

En eau profonde $\left\{ \frac{D}{L} > \frac{1}{2} \right\}$, la célérité de groupe se réduit à :

$$C_{g_o} = \frac{C_o}{2} \quad (3.6)$$

On peut donc exprimer E_T en fonction de C_g :

$$E_T = \frac{\rho g H^2}{8} \cdot C_g \cdot T \quad (3.7)$$

4. REFRACTION DE LA HOULE

* * *

4.1. LA CELERITE EST FONCTION DE LA PROFONDEUR

L'équation (3.2) permet de déterminer l'expression de la célérité :

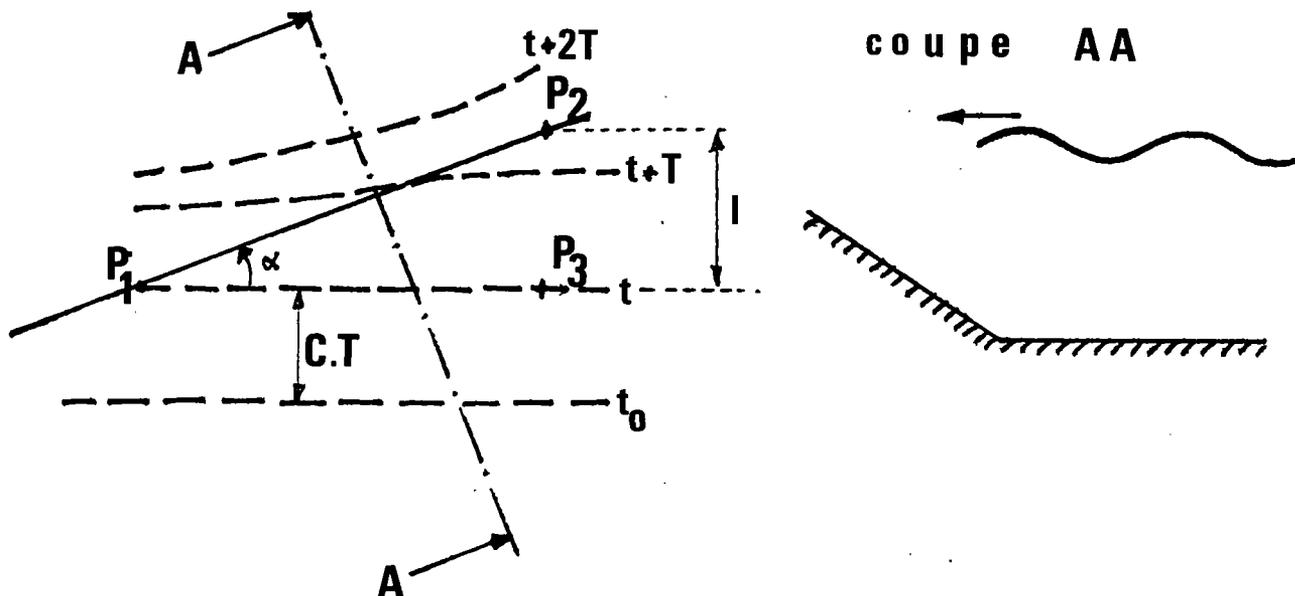
$$C = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} \operatorname{th} 2\pi \frac{D}{CT} \quad (4.1)$$

Cette équation montre que la célérité de la houle dépend de la profondeur de l'eau sur laquelle la houle se propage.

Lorsque D diminue, L diminue (voir fig. 17) et, par conséquent, C diminue.

4.2. APERCU SCHEMATIQUE DU PHENOMENE DE REFRACTION

Considérons une simulation de vague solitaire se propageant sur un fond marin plat et abordant un talus faisant un angle α avec la ligne de crête à l'instant t_0 .



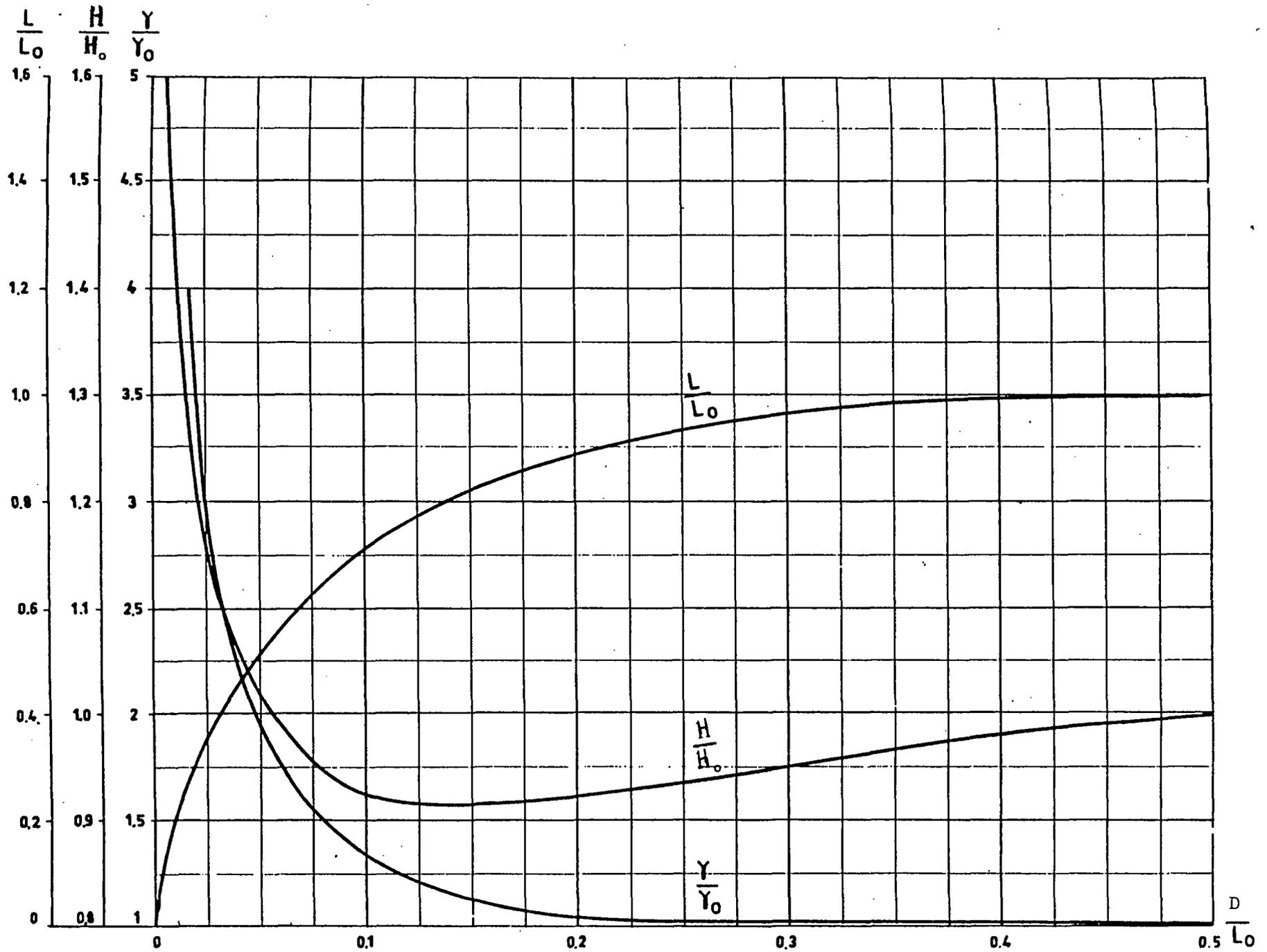


Fig. 17. Variation de L/L_0 , H/H_0 , γ/γ_0 , en fonction de D/L_0 (d'après réf.6)

Si l'on considère la ligne de crête, celle-ci rencontrera le talus au cours de sa propagation, mais pas au même instant. La crête passera au-dessus du point P1 à l'instant t , et au-dessus du point P2 à l'instant $t + \Delta t$, où

$$\Delta t = \frac{1}{C}$$

Dès que la houle arrive en P1, sa célérité diminue, alors qu'en P3, la célérité demeure constante. La ligne de crête se déforme.

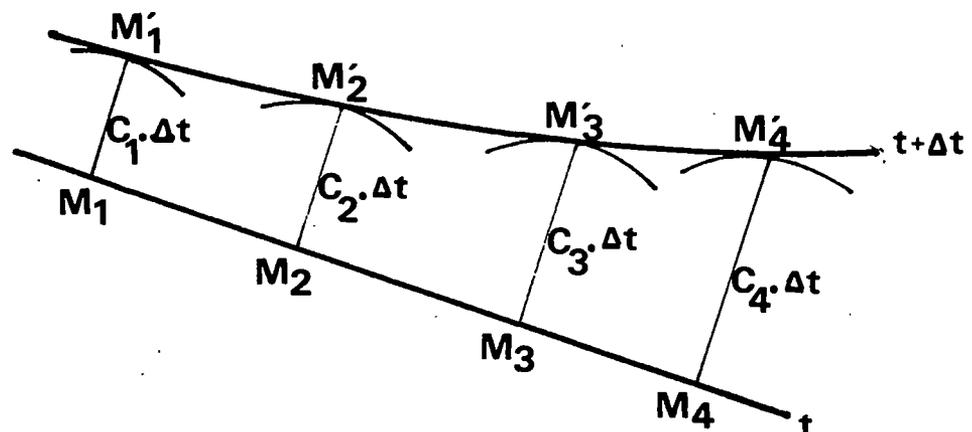
Ainsi, la ligne de crête "s'oriente" au fur et à mesure qu'elle se propage, suivant la même direction que l'arête du talus P1, P2, empruntant ainsi la direction de plus fort gradient des profondeurs.

4.3. ASPECT GEOMETRIQUE DE LA REFRACTION

Considérons une crête de houle à l'instant t ; la profondeur d'eau varie d'un point à un autre de la crête ; la célérité de propagation varie également et dans le même sens.

Considérons quatre points M1, M2, M3, M4, sur la crête à l'instant t , où les profondeurs sont respectivement D1, D2, D3, D4.

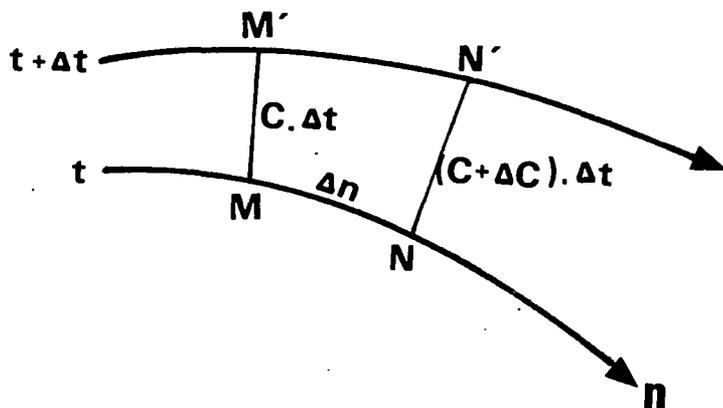
Supposons $D1 < D2 < D3 < D4$. Par conséquent, à l'instant t , $C1 < C2 < C3 < C4$.



Appliquons la construction de HUYGHENS (voir figure) pour obtenir la position de la crête à l'instant $t + \Delta t$.

Comme nous le savons, la crête se déforme et tourne dans la direction des plus petites profondeurs.

Considérons deux points M et N, voisins, pris sur la crête à l'instant t, n étant l'abscisse curviligne le long de la crête, notons Δn la distance séparant M et N.



Les orthogonales passant par les points M et N, passeront à l'instant $t + \Delta t$ par les points M' et N'.

L'angle $\Delta\alpha$ dont l'élément de crête et l'orthogonale correspondante auront tourné est donc :

$$\Delta\alpha = - \frac{\Delta C}{\Delta n} \cdot \Delta t$$

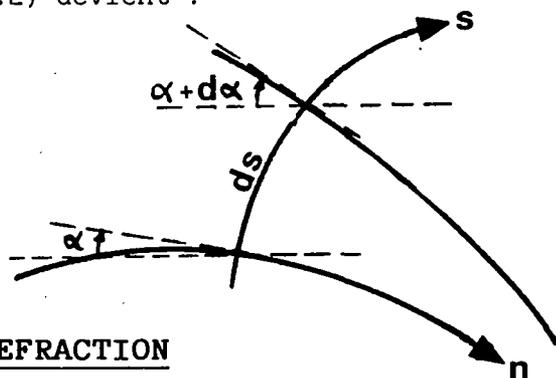
soit, à la limite, lorsque $\Delta n \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{dC}{dn} \quad (4.2.)$$

Cette équation est l'équation différentielle des orthogonales.

Si on introduit comme variable, l'abscisse curviligne s le long d'une orthogonale, l'équation (4.2) devient :

$$\frac{d\alpha}{ds} = - \frac{1}{C} \frac{dC}{dn} \quad (4.3.)$$



4.4. ASPECT ENERGETIQUE DE LA REFRACTION

4.4.1. DEFINITION DU COEFFICIENT DE REFRACTION

La variation de l'amplitude le long d'une orthogonale est définie par le coefficient de réfraction K :

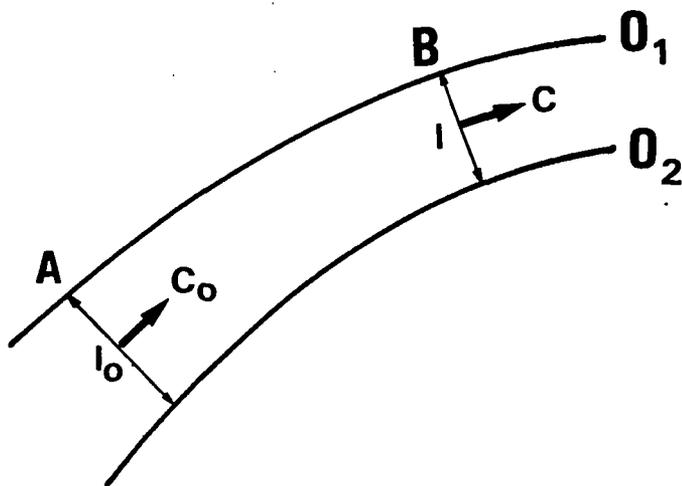
$$K = \frac{H}{H_0}$$

où H est l'amplitude de la houle en un point quelconque de l'orthogonale à la profondeur D et H_0 l'amplitude au large sur la même orthogonale.

4.4.2. HYPOTHESE DE CONSERVATION DE L'ENERGIE

On suppose qu'il n'y a aucun transfert d'énergie à travers les orthogonales et aucune perte d'énergie au cours de la propagation (avant déferlement).

4.4.3. DETERMINATION DU COEFFICIENT DE REFRACTION



Considérons deux orthogonales O1 et O2 prises entre deux sections perpendiculaires A et B

Supposons que :

la section A vérifie les conditions eau profonde, on a les caractéristiques :

- célérité de groupe C_{g0} ;
- l'amplitude H_0 ;

et qu'au niveau de la section B on ait une profondeur D , et la houle les caractéristiques :

- célérité de groupe C_g ;
- amplitude H ;

le débit d'énergie en A est :

$$Q_0 = \frac{(E_T)_0}{T}, \text{ soit } . . .$$

$$Q_0 = \frac{1}{8} \rho g H_0^2 C_{g0} \quad (\text{d'après 3.7})$$

et, en B :

$$Q = \frac{E_T}{T}, \text{ soit}$$

$$Q = \frac{1}{8} \rho g H^2 C_g \quad (\text{d'après 3.7})$$

ainsi, d'après l'hypothèse de conservation de l'énergie :

$$Q = Q_0 \quad K = \frac{H}{H_0} = \left(\frac{l_0}{l} \cdot \frac{C_{g0}}{C_g} \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

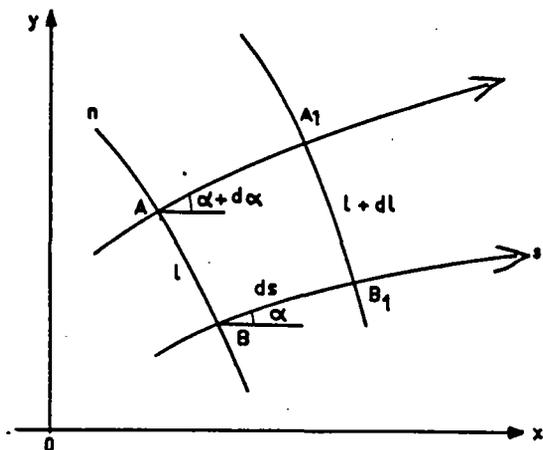
$$\text{On pose } K_1 = \left(\frac{l_0}{l} \right)^{1/2}$$

$$\text{et } K_2 = \left(\frac{C_{g0}}{C_g} \right)^{1/2}$$

a) Etude du coefficient K1

On considère le coefficient d'écartement :

$$\beta = \frac{1}{l_0}$$



Considérons deux tronçons AA1 et BB1 de deux orthogonales voisines.

Les angles que font en A et en B ces deux orthogonales avec un axe Ox arbitraire sont α et $\alpha + d\alpha$.

(d'après réf. 6)

l'écartement des deux orthogonales est l en AB et $l + dl$ en A1 B1.

On a : $dl = l \cdot \frac{d\alpha}{dn}$

et

$$dl = d\alpha \cdot ds$$

ainsi : $\frac{1}{l} \frac{dl}{ds} = \frac{d\alpha}{dn}$

et, en introduisant $\beta = \frac{1}{l_0}$ on trouve :

$$\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{dn}$$

et comme $ds = C \cdot dt$

on arrive à l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dt} = C \cdot \frac{d\alpha}{dn} \quad (4.5)$$

On peut éliminer α entre les équations (4.2) et (4.5) et l'on arrive à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + p \frac{d\beta}{dt} + q\beta = 0 \quad (4.6)$$

avec

$$p = -\frac{\partial C}{\partial s} = - \left(\frac{\partial C}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial C}{\partial y} \sin \alpha \right) \quad (4.7)$$

$$q = \frac{\partial^2 C}{\partial n^2} = C \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \sin^2 \alpha - 2C \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + C \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \cos^2 \alpha \quad (4.8)$$

On peut également exprimer l'équation (4.6) en prenant s comme variable :

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{P}{C} \frac{d\beta}{ds} + \frac{Q}{C^2} \beta = 0 \quad (4.9)$$

b) Etude du coefficient $K_2 \equiv \left(\frac{C_{go}}{C_g}\right)^{1/2}$

Compte tenu des équations (3.5) et (3.6) :

$$\frac{C_g}{C_{go}} = \frac{C}{C_o} \left\{ 1 + \frac{4 \pi D/L}{\text{sh } 4\pi D/L} \right\}$$

et d'après l'équation (4.1)

$$\frac{C_g}{C_{go}} = \text{th} \cdot 2\pi \frac{D}{L} \cdot \left\{ 1 + \frac{4 \pi D/L}{\text{sh } 4 \pi D/L} \right\}$$

Si on note $W = 2 \pi \frac{D}{L} = k \cdot D$

$$K_2 = \left\{ \text{th } W \cdot \left\{ 1 + \frac{2W}{\text{sh } 2 W} \right\} \right\}^{-1/2} \quad (4.10)$$

* *
*

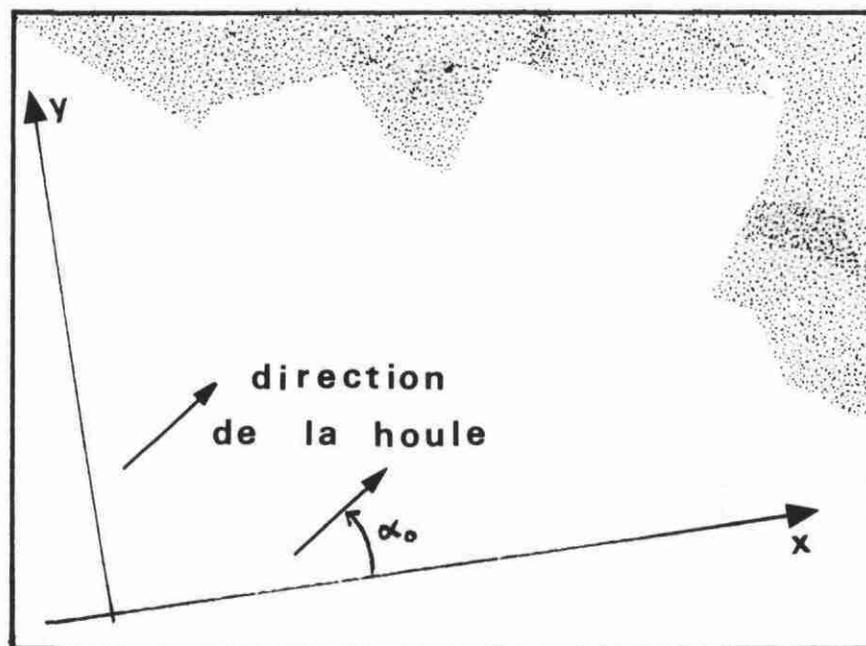
5. ANALYSE NUMERIQUE DU CALCUL DE LA HOULE

* * *

Le programme numérique se propose de déterminer le plan de vagues résultant d'une houle de caractéristiques (au large, houle non réfractée) :

- * période : T
- * longueur d'onde : L_0
- * amplitude : H_0
- * incidence
(dans un repère
arbitraire) : α_0

arrivant sur un littoral de caractéristiques données.



5.1. DONNEES DE BASE

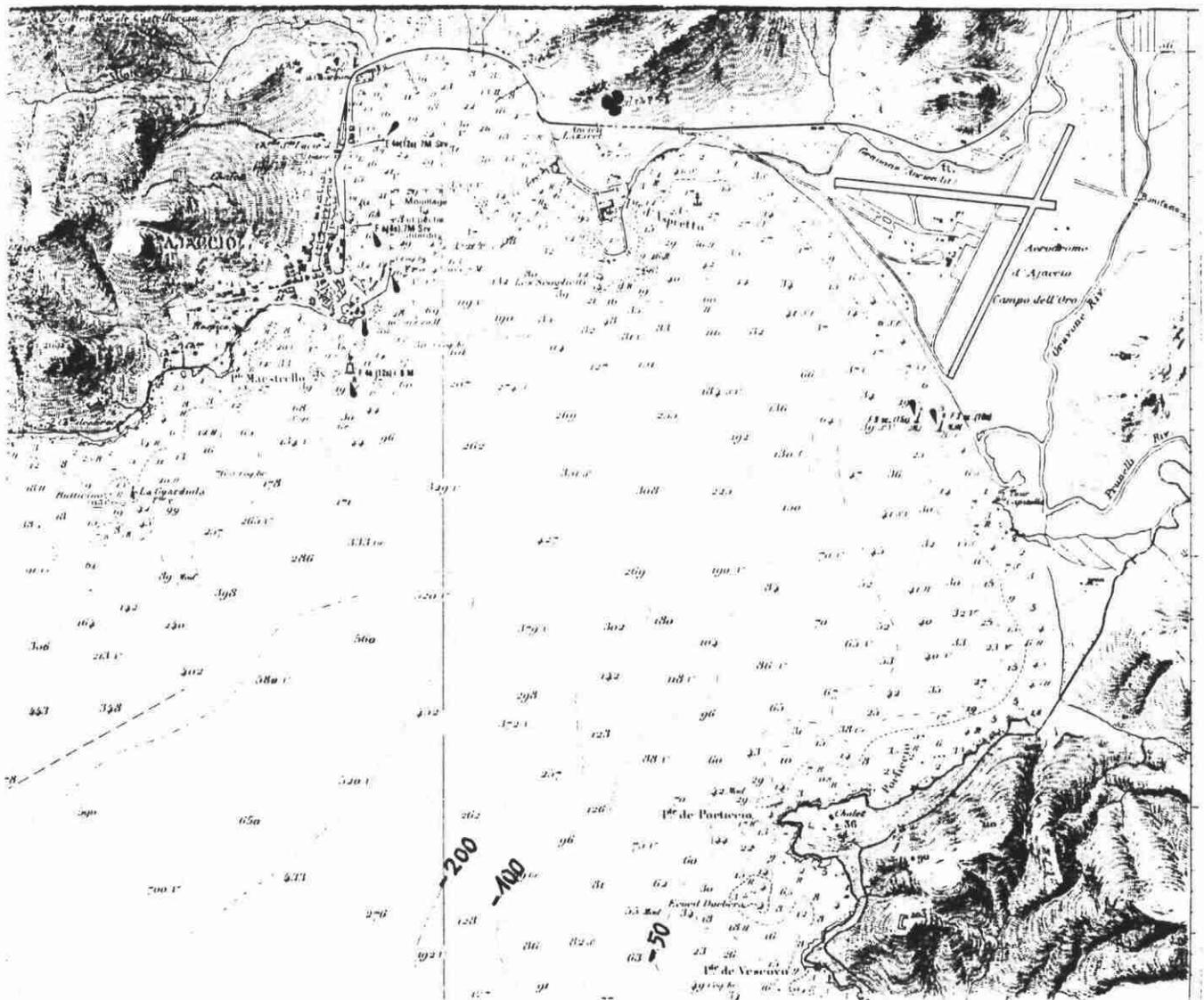
5.1.1. CARACTERISTIQUES DE LA HOULE

Ce sont les caractéristiques de la houle non réfractée :

T , L_0 , H_0 , α_0 .

5.1.2. TOPOGRAPHIE DES LIEUX (FONDS MARINS)

Elle est disponible sur des cartes marines ou sur des cartes du littoral.



Exemple : golfe d'Ajaccio, d'après carte marine.

5.2. DONNEES DE DISCRETISATION

5.2.1. DISCRETISATION DU DOMAINE

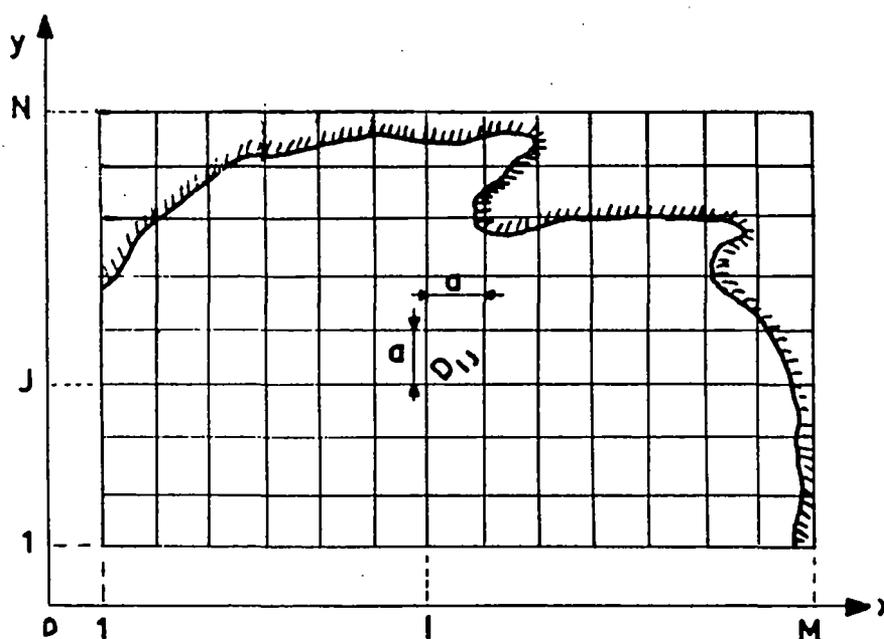
Le domaine sur lequel sera étudiée la houle est délimité par un rectangle que l'on couvre d'un quadrillage de mailles de dimension "a".

Cette maille sera l'unité de longueur dans toute la suite du calcul. On travaillera donc en variables adimensionnelles (célérité, dérivées des célérités, profondeurs, longueurs) :

$$c = \frac{CT}{a} ; \quad d = \frac{D}{a} ; \quad l = \frac{L}{a}$$

Ainsi, l'unité de maille sera égale à 1.

Le domaine étudié se présente alors sous la forme :



Chaque noeud du maillage est repéré par deux indices I et J, coordonnées du point correspondant exprimées en mailles. I varie de 1 à M, J de 1 à N.

Dans la pratique, on pourra se fixer M et N plutôt que a.

Remarque - L'adimensionnalisation conduit à confondre c et l.

5.2.2. DISCRETISATION DU TEMPS

Dans le précédent chapitre, nous avons présenté les équations qui régissent les orthogonales, sous deux formes différentes, en prenant comme variable le long d'une orthogonale, d'une part le temps (équations 4.2 et 4.6), d'autre part l'abscisse curviligne (équations 4.3 et 4.9).

Pour les intégrer numériquement, nous préférons utiliser la variable temps, en utilisant un **pas de discrétisation Δt constant**. En effet, la connaissance de points de diverses orthogonales régulièrement espacés dans le temps permet de tracer les crêtes de houle (la période T doit être un multiple ou un sous-multiple de Δt).

5.3. DISCRETISATION DES DONNEES

La méthode de calcul repose sur la connaissance, en chaque noeud ij du maillage :

- * des profondeurs D_{ij} ;
- * des célérités C_{ij} ;
- * des dérivés $C_{ij, x}$; $C_{ij, y}$
 $C_{ij, xx}$; $C_{ij, yy}$; $C_{ij, xy}$

(où la notation $C_{ij, x}$ représente $\left\{ \frac{\partial C}{\partial x} \right\}_{ij} \dots$)

5.3.1. DETERMINATION DES PROFONDEURS AUX NOEUDS DU MAILLAGE

Dans la mesure où les profondeurs ne sont connues que le long des courbes bathymétriques, il faut donc interpoler les profondeurs en chaque noeud du maillage.

Nous exposons en annexe A, la méthode que nous avons suivie, systématique, qui avait comme avantage une grande souplesse et commodité d'acquisition des données bathymétriques disponibles (cartes marines).

On dispose donc des profondeurs en chaque noeud du maillage.

5.3.2. DETERMINATION DES CELERITES AUX NOEUDS DU MAILLAGE

La célérité de propagation de la houle sur un domaine de profondeur D est seule fonction de D et T (Airy). La relation implicite 4.1. s'écrit également :

$$2\pi \frac{CT}{a} = \frac{gT^2}{a} \times \text{th} \frac{D}{a} \times \frac{a}{2\pi CT}$$

$$2\pi c = k \cdot \text{th} \frac{d}{2\pi c}$$

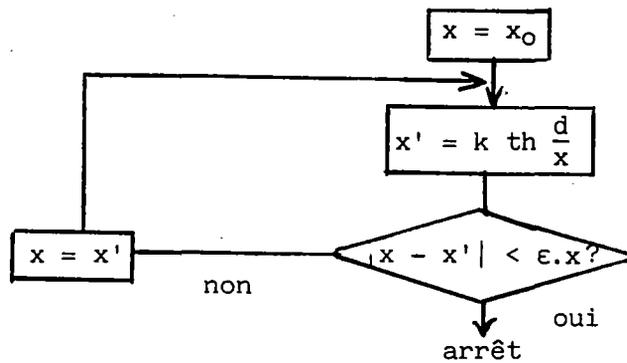
c, d , variables adimensionnelles.

La solution c est unique.

La "méthode du point fixe" convient parfaitement.

$$x = k \cdot \operatorname{th} \frac{d}{x}$$

la résolution se fait par un algorithme du type :



On pourra prendre pour

$$x_0 = 2\pi \frac{c_0 T}{a} = \frac{gT^2}{a}$$

et pour $\epsilon = 10^{-4}$

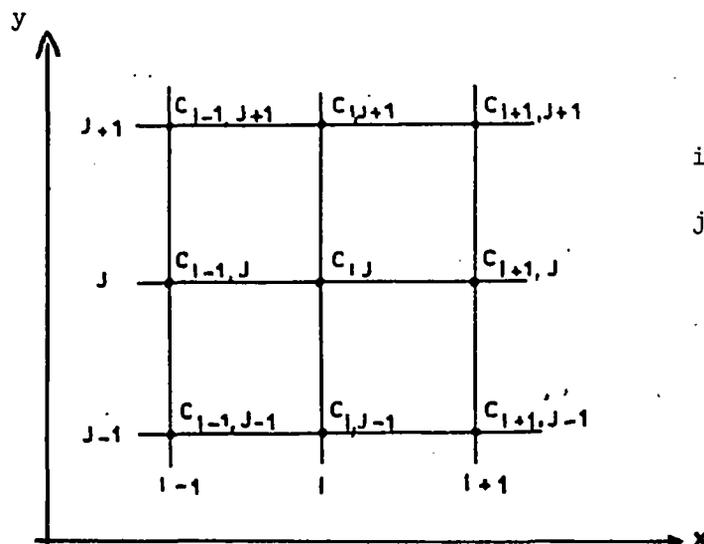
Ainsi, en soumettant l'ensemble des noeuds du maillage à la résolution de :

$$2\pi c_{ij} = k \operatorname{th} \frac{d_{ij}}{2\pi c_{ij}}, \text{ si } d_{ij} > 0 \text{ et en posant } c_{ij} = 0 \text{ si } d_{ij} \leq 0$$

on dispose d'un tableau des célérités.

5.3.3. DETERMINATION DES DERIVEES DE LA CELERITE AUX NOEUDS DU MAILLAGE

Les dérivées partielles de la célérité par rapport à x et y sont évaluées au noeud (I, J) à partir des huit valeurs de c aux huit noeuds voisins.



i varie de 2 à $M - 1$

j varie de 2 à $N - 1$

on notera :	l'approximation de :
$(cx)_{ij}$	$\left\{ \frac{\partial c}{\partial x} \right\}_{ij}$
$(cy)_{ij}$	$\left\{ \frac{\partial c}{\partial y} \right\}_{ij}$
$(c_{xx})_{ij}$	$\left\{ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right\}_{ij}$
$(c_{xy})_{ij}$	$\left\{ \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \right\}_{ij}$
$(c_{yy})_{ij}$	$\left\{ \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right\}_{ij}$

Des développements en série de Taylor autour du noeud ij permettent d'écrire :

$$(cx)_{ij} = \{c_{i+1, j} - c_{i-1, j}\} / 2$$

$$(cy)_{ij} = \{c_{i, j+1} - c_{i, j-1}\} / 2$$

$$(c_{xx})_{ij} = c_{i+1, j} - 2c_{ij} + c_{i-1, j}$$

$$(c_{yy})_{ij} = c_{i, j+1} - 2c_{ij} + c_{i, j-1}$$

$$(c_{xy})_{ij} = \{c_{i+1, j+1} - c_{i-1, j+1} - c_{i+1, j-1} + c_{i-1, j-1}\} / 4$$

Les erreurs d'approximation :

VARIABLES

ORDRE DE L'ERREUR COMMISE

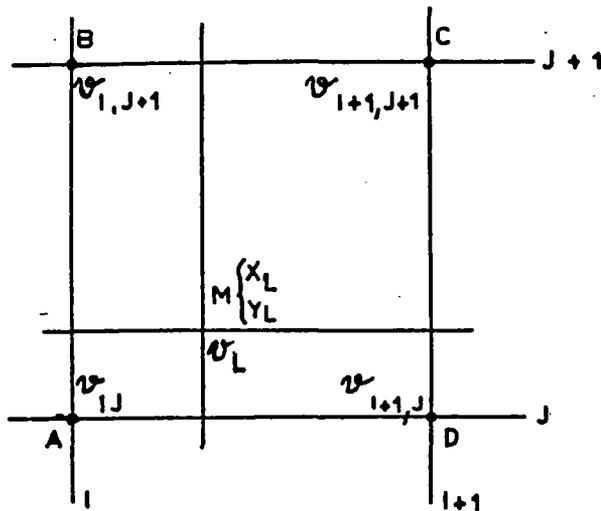
	En variables adimensionnelles	En variables dimensionnelles
$c_{ij, x}$	$\frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \right\}_{ij}$	$\frac{a^2}{3} \left\{ \frac{\partial^3 c}{\partial X^3} \right\}_{ij}$
$c_{ij, y}$	$\frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial^3 c}{\partial y^3} \right\}_{ij}$	$\frac{a^2}{3} \left\{ \frac{\partial^3 c}{\partial Y^3} \right\}_{ij}$
$c_{ij, xx}$	$\frac{1}{12} \left\{ \frac{\partial^4 c}{\partial x^4} \right\}_{ij}$	$\frac{a^2}{12} \left\{ \frac{\partial^4 c}{\partial X^4} \right\}_{ij}$
$c_{ij, yy}$	$\frac{1}{12} \left\{ \frac{\partial^4 c}{\partial y^4} \right\}_{ij}$	$\frac{a^2}{12} \left\{ \frac{\partial^4 c}{\partial Y^4} \right\}_{ij}$
$c_{ij, xy}$	0 (1)	0 (a^2)

On constate donc que les erreurs sont proportionnelles au carré de la longueur de maille en variables dimensionnelles.

5.4. INTERPOLATION DE DIVERSES VARIABLES EN UN POINT QUELCONQUE A L'INTERIEUR DU MAILLAGE

Pour le tracé des orthogonales et le calcul de l'amplitude, nous aurons besoin de connaître en un point quelconque du plan, la profondeur, la célérité et ses dérivées, dont seules les valeurs aux noeuds du maillage sont disponibles sous forme de tableaux.

L'interpolation en un point M (x_L, y_L) se calcule suivant le schéma de Lagrange (interpolation linéaire suivant x et y) - (fig.ci-dessous)



Si l'on considère le tableau contenant les valeurs d'une variable v aux noeuds du maillage, l'interpolation v_L de v au point M se fait selon la formule :

$$v_L = M_4 v_{ij} + M_3 v_{i,j+1} + M_2 v_{i+1,j} + M_1 v_{i+1,j+1}$$

où

$$M_1 = M_0 \cdot N_0$$

$$M_2 = M_0 - M_1$$

$$M_3 = N_0 - M_1$$

$$M_4 = 1 - N_0 - M_2$$

et

$$M_0 = x_L - i$$

$$N_0 = y_L - j$$

i étant la partie entière de x_L et j la partie entière de y_L .

La variable v représente une quelconque des variables (cx), (cy), (cxx), (cyy), (cxy), c , d .

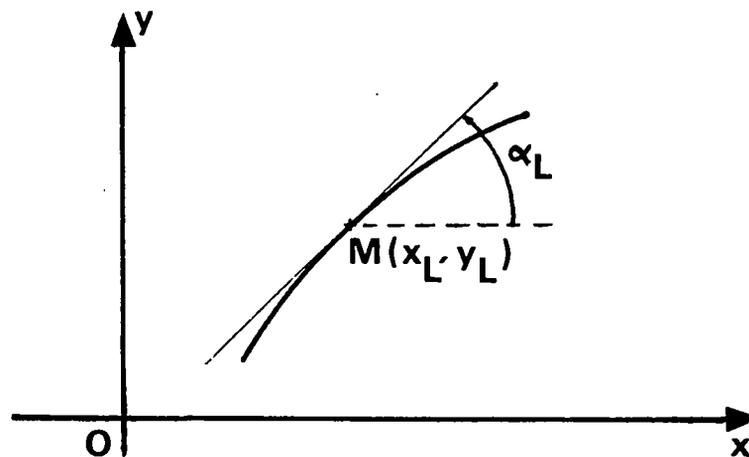
Ces variables, indicées "L" représenteront le résultat de l'interpolation au point M (x_L, y_L).

5.5. CALCUL DES ORTHOGONALES

Le calcul d'une orthogonale se fait par itérations successives à partir d'un "point de départ de l'orthogonale". On obtient une suite de points, régulièrement espacés de Δt dans le temps, qui définissent l'orthogonale.

Les coordonnées de chacun de ces points repérés par un indice L , entier, croissant à partir de 1, permettent de calculer celles du point suivant, d'indice $L + 1$.

Une orthogonale est définie localement par un point et une orientation dans un repère quelconque (o, x, y) .



Pour déterminer le point suivant $N(x_{L+1}, y_{L+1})$, il faut intégrer par approximation successives, l'équation (4.2) le long de l'orthogonale.

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{dc}{dn} = \frac{\partial C}{\partial X} \cdot \sin \alpha - \frac{\partial C}{\partial Y} \cdot \cos \alpha$$

Méthode de résolution (prédiction - correction)

(voir fig. 18).

On connaît au point (L) , les quantités $x_L, y_L, c_L, \alpha_L, (cx)_L, (cy)_L$.

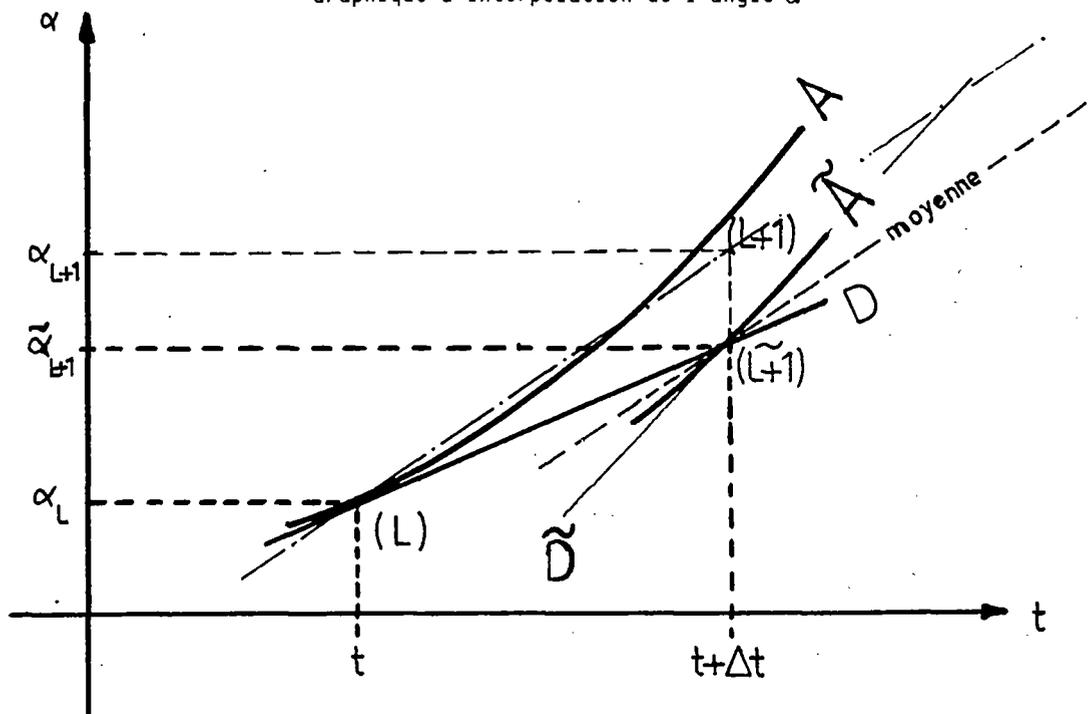
On peut donc calculer la valeur de $\frac{da}{dt}$ au point (L) , notée a_L :

$$a_L = (cx)_L \sin \alpha_L - (cy)_L \cos \alpha_L$$

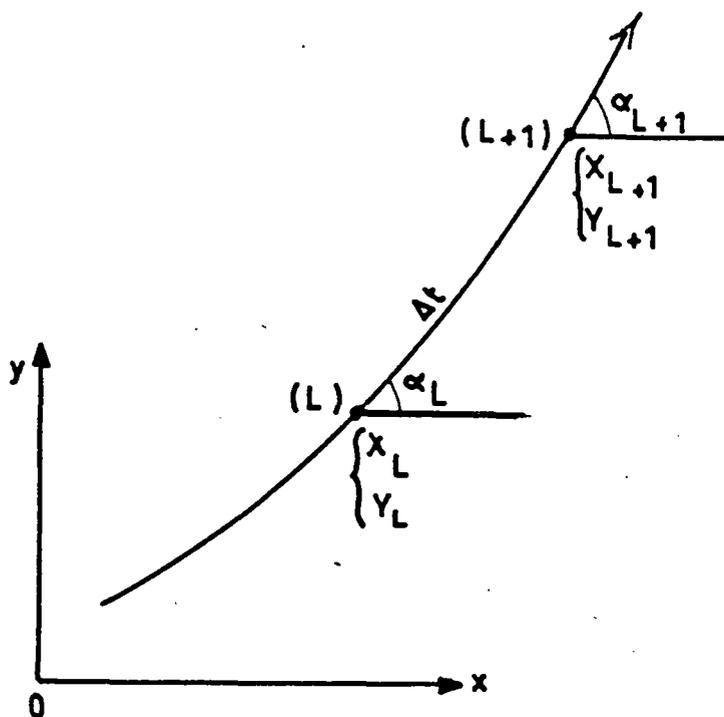
ainsi, à un déplacement de Δt le long de l'orthogonale, correspond une variation $\Delta \tilde{\alpha}$ de l'angle :

$$\Delta \tilde{\alpha} = a_L \cdot \Delta t$$

Figure n° 18

Graphique d'interpolation de l'angle α 

- a) $D = \text{tangente en } (L) \text{ à } A = a_L \cdot t + \text{cte}$
 $\tilde{D} = \text{tangente en } (\tilde{L}+1) \text{ à } \tilde{A} = \tilde{a}_{L+1} t + \text{cte}$



b)

De cet accroissement, on déduit une première valeur de x_{L+1} , y_{L+1} et α_{L+1} , notées :

$$\tilde{x}_{L+1} = x_L + c_L \cdot \Delta t \cos \left\{ \frac{\alpha_L + \tilde{\alpha}_{L+1}}{2} \right\}$$

$$\tilde{y}_{L+1} = y_L + c_L \cdot \Delta t \cos \left\{ \frac{\alpha_L + \tilde{\alpha}_{L+1}}{2} \right\}$$

$$\tilde{\alpha}_{L+1} = \alpha_L + \Delta \tilde{\alpha}$$

à ce point, $L+1$ $\left\{ \tilde{x}_{L+1}, \tilde{y}_{L+1} \right\}$ correspond une profondeur \tilde{d}_{L+1} , une célérité \tilde{c}_{L+1} et des dérivées de célérité $(\tilde{c}_x)_{L+1}$ et $(\tilde{c}_y)_{L+1}$ (obtenues par interpolations).

On peut alors calculer une première valeur de a_{L+1} , notée \tilde{a}_{L+1} :

$$\tilde{a}_{L+1} = (\tilde{c}_x)_{L+1} \sin \tilde{\alpha}_{L+1} - (\tilde{c}_y)_{L+1} \cos \tilde{\alpha}_{L+1}$$

On obtient alors une nouvelle valeur de $\Delta \alpha$:

$$\Delta \alpha = \left\{ a_L + \tilde{a}_{L+1} \right\} \cdot \Delta t$$

On prend comme célérité entre les points (L) et (L+1), une célérité moyenne :

$$c_{L,L+1} = \left\{ c_L + \tilde{c}_{L+1} \right\} / 2$$

On arrive alors à un nouveau point (L+1), où :

$$x_{L+1} = x_L + c_{L,L+1} \cdot \Delta t \cdot \cos \left\{ \frac{\alpha_L + \tilde{\alpha}_{L+1}}{2} \right\}$$

$$y_{L+1} = y_L + c_{L,L+1} \cdot \Delta t \cdot \sin \left\{ \frac{\alpha_L + \tilde{\alpha}_{L+1}}{2} \right\}$$

$$\alpha_{L+1} = \alpha_L + \Delta \alpha$$

Le point ainsi obtenu servira de base au calcul du point suivant.

5.6. CALCUL DU COEFFICIENT DE REFRACTION

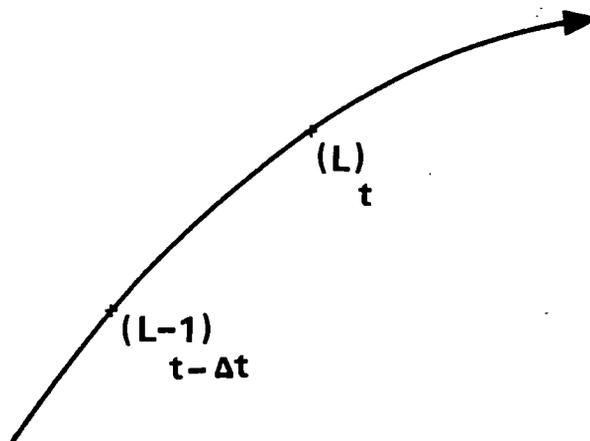
5.6.1. CALCUL DE K1

La chapitre 4 nous a montré que l'on peut exprimer $K1$ à l'aide d'une fonction β , solution de l'équation différentielle :

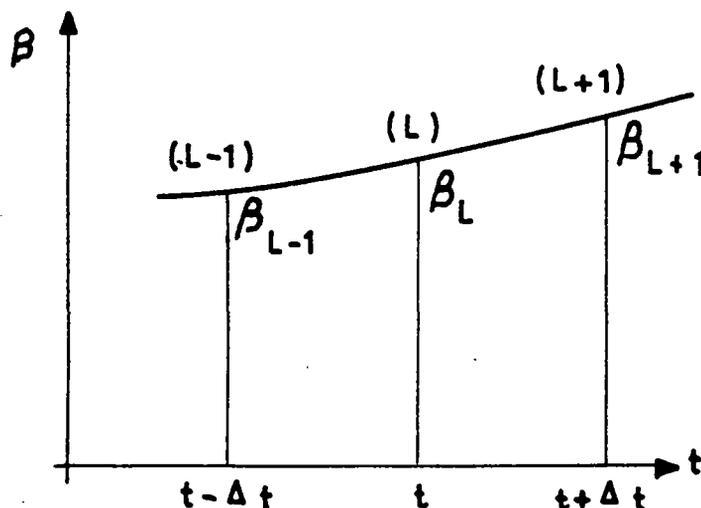
$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + p \frac{d\beta}{dt} + q\beta = 0 \quad (5.1)$$

(cf équation 4.6) et $K1 = |\beta|^{-1/2}$

Considérons une orthogonale où deux points espacés de Δt dans le temps sont parfaitement connus en position, en célérité de propagation de la houle et en orientation de l'orthogonale.



Pour pouvoir prolonger l'orthogonale à l'instant $t + \Delta t$, deux points sont nécessaires puisque l'équation différentielle en β est du 2ème ordre.



Si l'on développe en série de Taylor l'équation (5.1) autour du point (L), on aura :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{\beta_{L-1} - 2\beta_L + \beta_{L+1}}{(\Delta t)^2} + 0 \left\{ (\Delta t)^2 \right\}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\beta_{L+1} - \beta_{L-1}}{2 \Delta t} + 0 \left\{ (\Delta t)^2 \right\}$$

et, par conséquent (5.1) s'écrit :

$$\frac{\beta_{L-1} - 2\beta_L + \beta_{L+1}}{(\Delta t)^2} + p_L \cdot \frac{\beta_{L+1} - \beta_{L-1}}{2\Delta t} + q_L \cdot \beta_L + 0 \left\{ (\Delta t)^2 \right\} = 0$$

p_L et q_L valeurs interpolées au point L de p et q .

On peut donc tirer de cette équation :

$$\beta_{L+1} = \frac{(p_L \cdot \Delta t - 2) \beta_{L-1} + \{4 - 2q_L (\Delta t)^2\} \beta_L}{2 + p_L \cdot \Delta t} + 0 (\Delta t)^4 \quad (5.2)$$

Cette relation explicite permet donc de calculer la valeur de β en un point, en connaissant notamment les valeurs de β aux deux points antérieurs.

Pour démarrer le calcul, dans la mesure où l'on ne dispose pas des valeurs de β , il faudra partir de $\beta_1 = \beta_2 = 1$, traduisant deux conditions :

* la houle ne doit pas être réfractée au point de départ choisi d'une orthogonale ;

$$* \frac{d\beta}{dt} = 0$$

5.6.2. CALCUL DE K2

Le coefficient K_2 se calcule directement grâce à l'équation (4.9). En effet, pour tout point (L) à l'intérieur du maillage, on sait calculer d_L , c_L et, par conséquent :

$$w = 2\pi \frac{d_L}{c_L T}$$

Ainsi :

$$K_2 = \left\{ \text{th } w \cdot \left\{ 1 + \frac{2w}{\text{sh } 2w} \right\} \right\}^{-1/2} \quad (5.3)$$

6. MISE EN OEUVRE DU PROGRAMME DE REFRACTION

* * *

6.1. DETERMINATION DES POINTS DE DEPART DES ORTHOGONALES

Nous avons vu au chapitre précédent, comment calculer une orthogonale en partant d'un point vérifiant les conditions initiales :

$$\alpha = \alpha_0 \text{ (incidence de la houle non réfractée)}$$

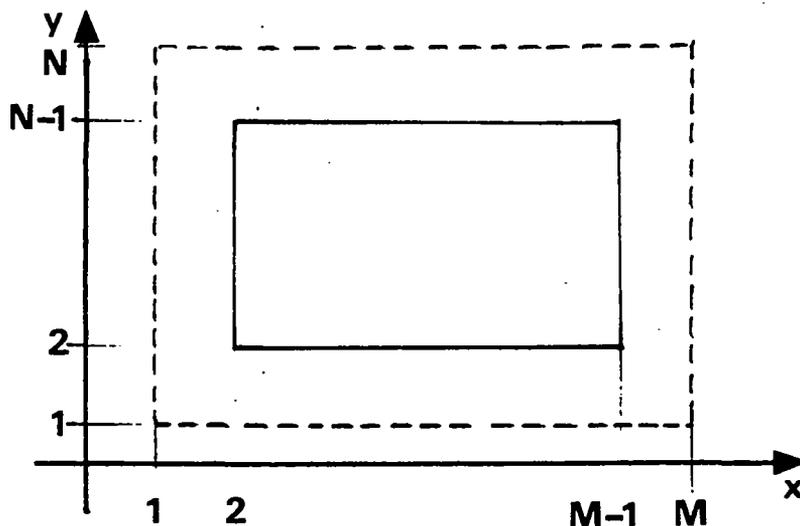
$$\beta = 1$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 0$$

Aussi faut-il disposer d'une série de points de départ si l'on veut bien couvrir le domaine étudié par une série d'orthogonales.

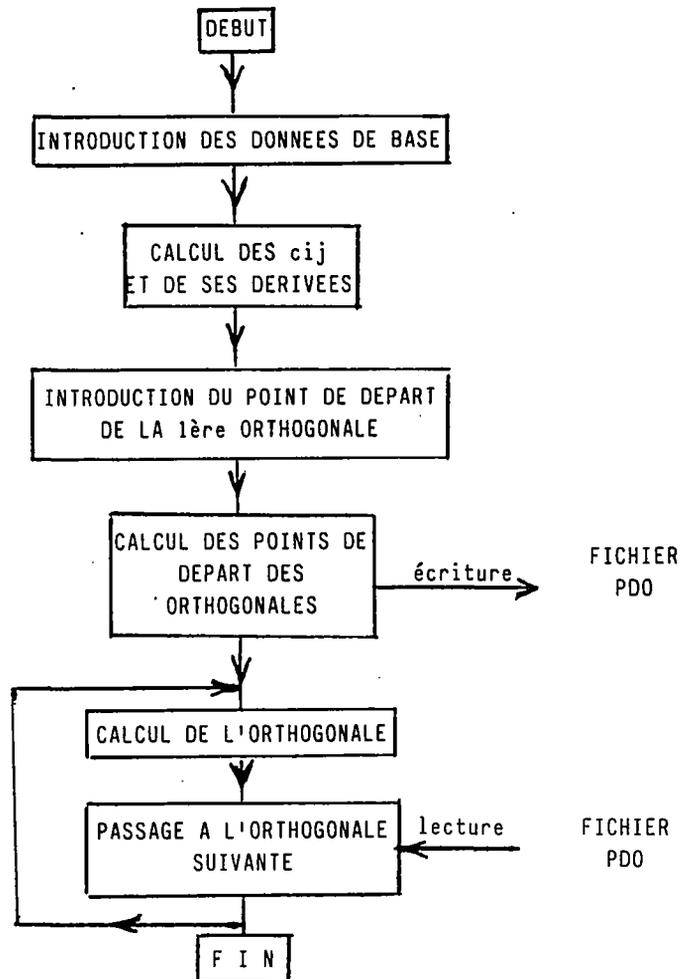
Tout point de départ d'orthogonale doit vérifier deux conditions :

- 1) le point de départ est à l'intérieur ou à la frontière du domaine $(2..M - 1) \times (2..N - 1)$ représenté ci-dessous :

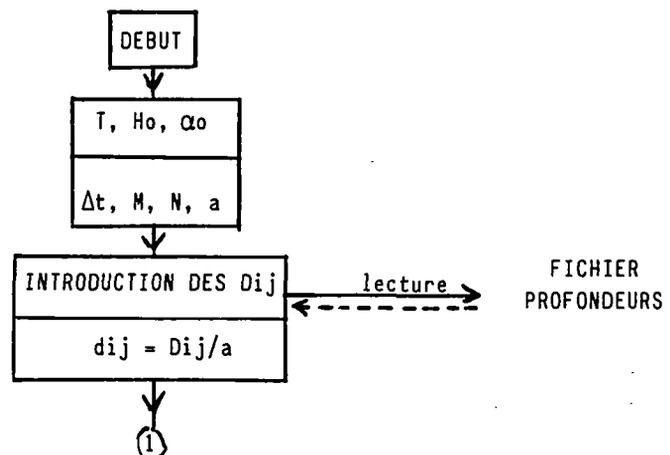


6.2. DESCRIPTION DES ALGORITHMES

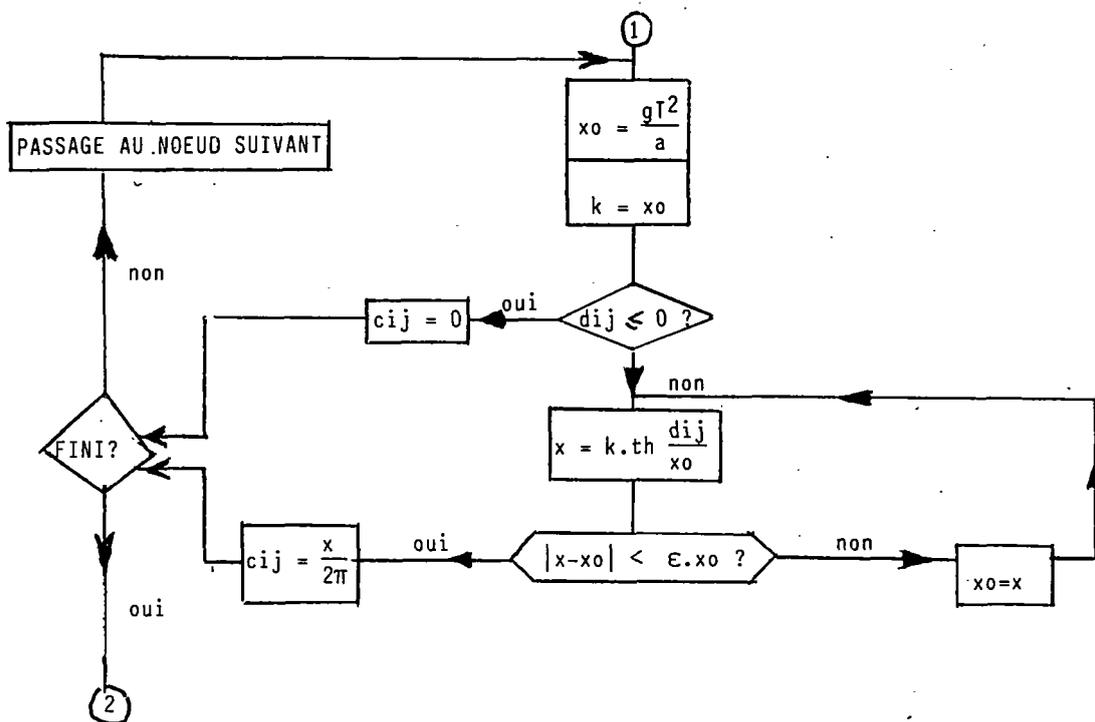
6.2.1. ALGORITHME GENERAL



6.2.2. INTRODUCTION DES DONNEES DE BASE



6.2.3. CALCUL DES c_{ij} ET DE LEURS DERIVEES (cf 5.3.2.)

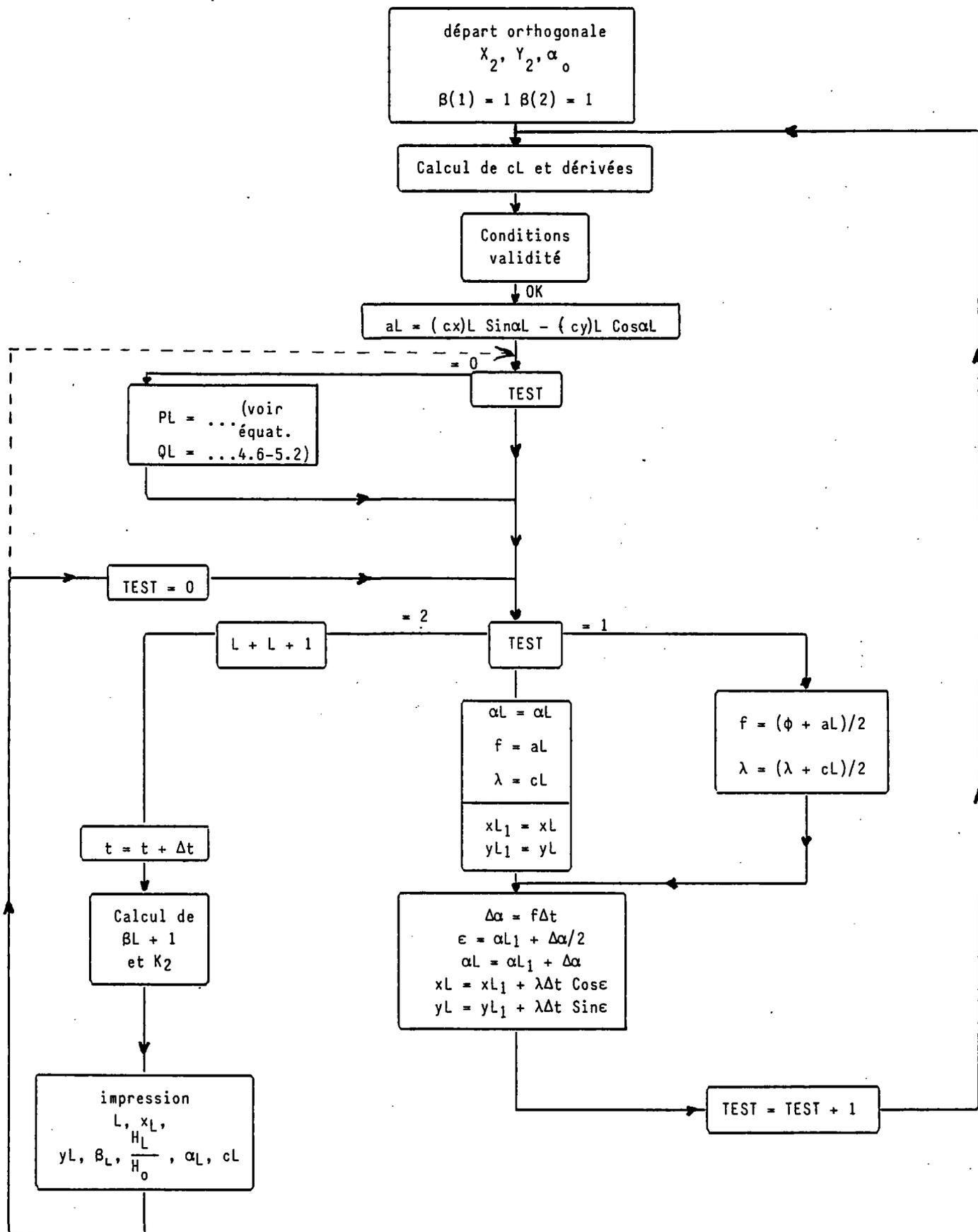


6.2.4. INTRODUCTION DU POINT DE DEPART DE LA 1ère ORTHOGONALE

ET

CALCUL DES POINTS DE DEPART DES ORTHOGONALES

Voir § 6.1.

6.2.5. CALCUL DE L'ORTHOгонаLE

d'après organigramme proposé par J.P. LEPETIT (réf. 1)

7. VERIFICATION DE L'EXACTITUDE DE LA METHODE NUMERIQUE

* * *

Les équations de la réfraction, établies dans le cadre de la théorie d'Airy, peuvent se résoudre analytiquement dans le cas où la profondeur est fonction de l'unique variable "distance à la côte", notée "y" pour la suite de l'exposé.

Nous n'établirons pas ici la solution analytique (réf. 2), nous n'en tirerons que des conclusions sur l'exactitude de la méthode numérique développée au chapitre précédent.

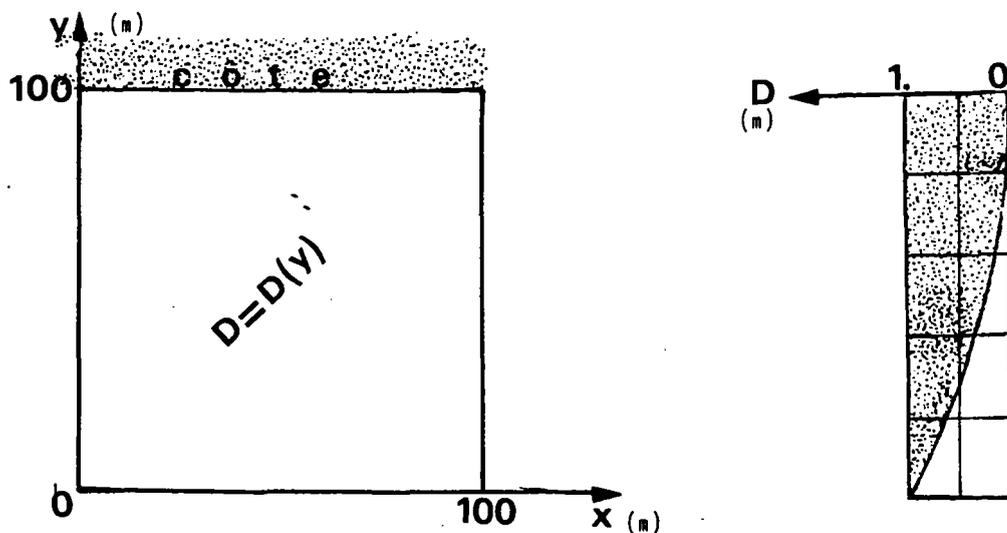
7.1. PRESENTATION DU SITE D'ETUDE, DES CONDITIONS DE HOULE ET DE LA SOLUTION ANALYTIQUE CORRESPONDANTE

7.1.1. LE SITE

Il est représenté par un carré de 100 m x 100 m, le côté supérieur matérialisant la ligne de côte.

Le profil de la plage est parabolique ; les profondeurs $D(y)$ sont définies par l'équation :

$$D(y) = \left(\frac{100 - y}{100} \right)^2 \quad (7.1)$$



Plage idéale à profil parabolique

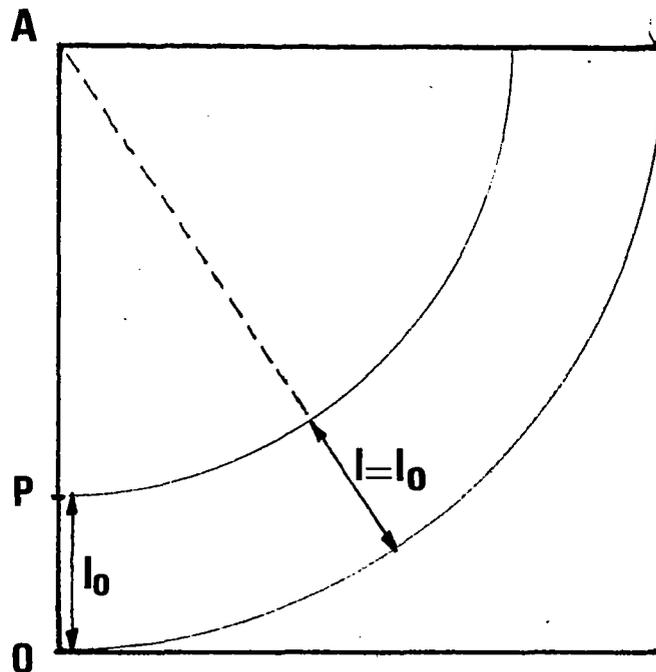
7.1.2. CARACTERISTIQUES DE LA HOULE

La solution analytique de référence considère une houle de période $T = 10$ s. La houle se propage, au départ, parallèlement à la côte.

De plus, nous ne considérerons pas la propagation d'une houle à proprement parler, mais la déformation d'une seule orthogonale, de point de départ "point d'origine" (0,0).

7.1.3. SOLUTION ANALYTIQUE

La résolution analytique des équations de la réfraction permet de déterminer l'équation de l'orthogonale. L'orthogonale décrit un quart de cercle autour du point A, de rayon 100 m. Pour une orthogonale qui partirait d'un point quelconque, entre O et A, le chemin suivi serait également un quart de cercle, de centre A et de rayon la distance A - P



soit l_0 , l'écartement initial des orthogonales issues des points O et P.

Dans la mesure où les orthogonales sont circulaires, autour de A, l'écartement entre celles-ci, l , à un instant quelconque, sera constant et égal à l_0 . Ainsi, à tout instant :

$$\beta = \frac{l}{l_0} = 1$$

7.1.4. REMARQUE RELATIVE A LA VALIDITE DE LA SOLUTION ANALYTIQUE

La solution exposée ci-dessus doit répondre au critère de validité de la théorie d'Airy (cf § 1.2.4.). Or, la période de la houle étant de 10 s et la profondeur D étant ≤ 1 m, le terme $\frac{D}{gT^2}$ est $\leq 0,001$.

La fig. 15 permet de se rendre compte que $\frac{H}{gT^2}$ doit être inférieur à 0,00004.

L'amplitude de la houle ne devrait donc pas être supérieure à 4 cm si l'on veut que la solution analytique (ou même numérique) représente un phénomène observé.

7.1.5. CONCLUSION

La solution analytique exposée ci-dessus présente, pour le moins, deux avantages :

- * le tracé de l'orthogonale est simple ;
- * la valeur de β est constante et égale à 1 tout le long de l'orthogonale.

aussi, est-elle particulièrement adaptée à la vérification des sorties numériques et graphiques du programme de réfraction, dans la phase pré-opérationnelle.

Cette vérification se fera à deux niveaux :

- * exactitude du calcul itératif de $\alpha(t)$ (forme de l'orthogonale) ;
- * exactitude du calcul itératif de $\beta(t)$.

7.2. RESOLUTIONS NUMERIQUES

Bien que disposant de la relation (7.1) donnant la profondeur en un point quelconque à l'intérieur du domaine étudié, il a été jugé préférable d'introduire les données bathymétriques, selon la méthode exposée en annexe A, sous forme de courbes bathymétriques se réduisant, dans le cas présent, à des droites (fig. 19).

Un programme calcule alors l'interpolation des profondeurs aux noeuds d'un maillage défini par l'utilisateur (annexe A).

7.2.1. COMPARAISON DE LA FORME DE L'ORTHOgonALE

Dans la mesure où l'on se propose de comparer les résultats d'un calcul numérique à des résultats analytiques, il faut se placer dans les meilleures conditions possibles.

COURBES BATHYMETRIQUES (EXEMPLE)

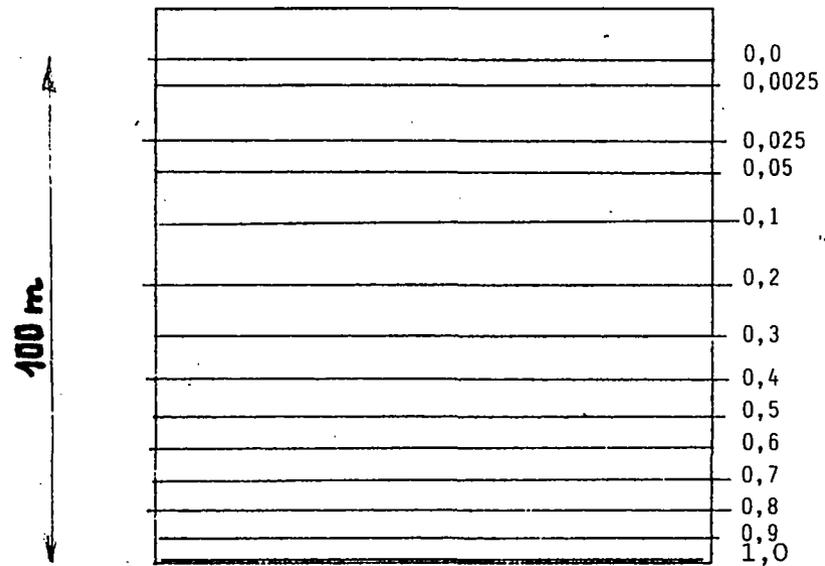


Fig. 19 - Résultats, après traitement, de la saisie bathymétrique sur table à dédigitaliser.

* Le choix quelconque d'une longueur de maille "a" n'est pas concevable. Une illustration en est donnée par la fig. 20. Pour un même point de départ, le tracé de l'orthogonale est fortement modifié selon que l'on a choisi une bonne longueur de maille ou non.

* Par contre, le pas de temps " Δt " de calcul ne semble pas influencer le calcul des points de l'orthogonale (tout au moins pour $\Delta t \leq 10$ s - fig. 21). Le choix d'un petit Δt , de l'ordre de la seconde, permet d'obtenir le tracé de l'orthogonale avec une certaine continuité de courbure.

Ainsi, si l'on choisit :

* une longueur de maille $a = 2,5$ m ;

* un $\Delta t = 1$ s ;

on obtient une orthogonale (fig. 22) qui s'inscrit parfaitement sur un quart de cercle, centré en un point A de la ligne de côte.

Conclusion

L'algorithme de calcul de $\alpha(t)$ - (cf § 6.2.5.) correspond donc bien à la résolution des équations théoriques.

7.2.2. COMPARAISON β ANALYTIQUE/ β NUMERIQUE

Pour faire cette comparaison, nous avons calculé une série d'orthogonales pour des longueurs de maille "a" différentes et avec des pas de temps " Δt " différents. Les résultats numériques obtenus sont disponibles dans les tableaux ci-après (tableaux 1 à 9).

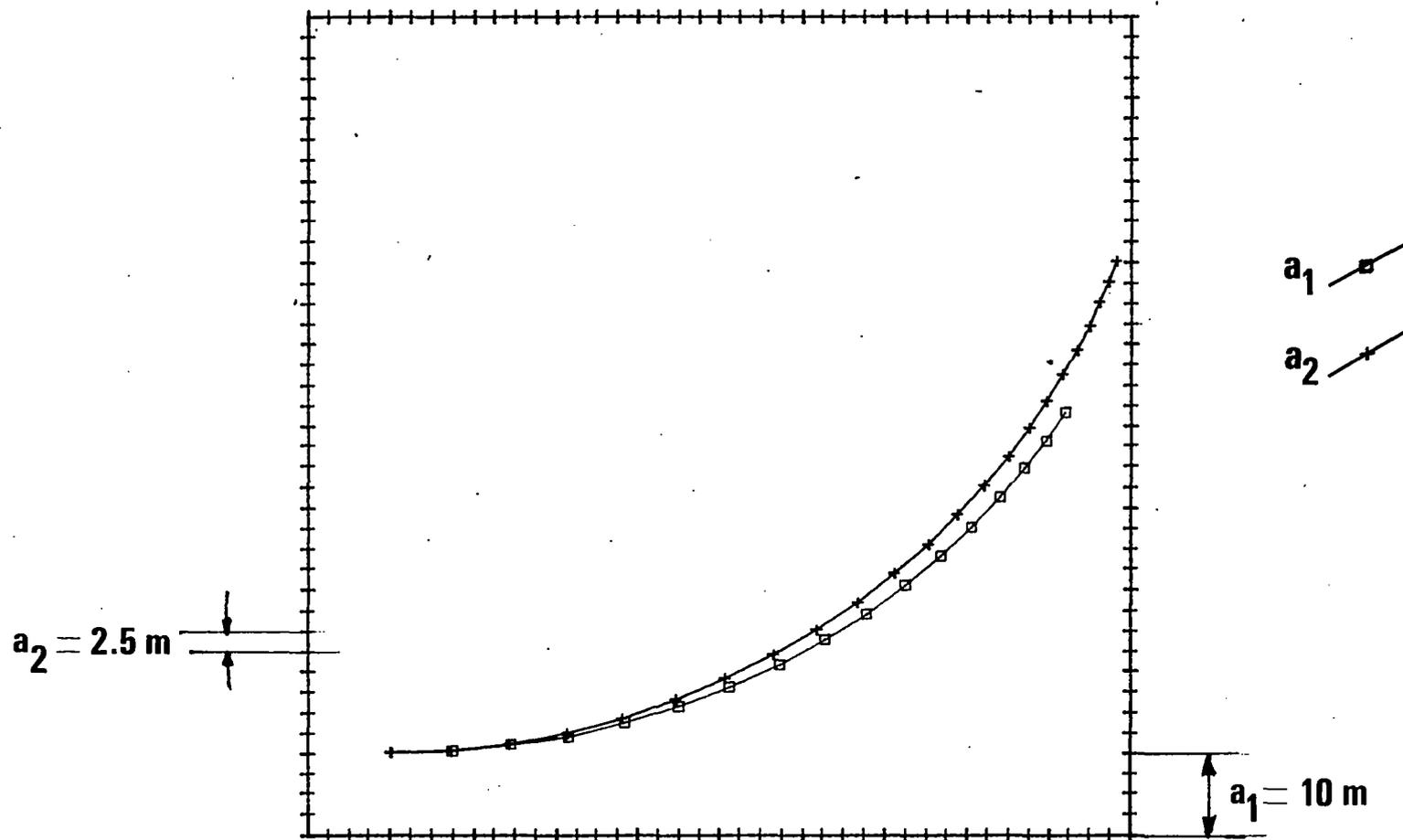
On peut également visualiser $\beta = \frac{1}{10} = 1$ grâce à une sortie graphique (fig. 23).

Pour un maillage et un pas de temps donnés, et si l'on considère une durée t de calcul (propagation de la houle), le coefficient reste compris entre une valeur β_{inf} et une valeur β_{sup} .

On constate que, pour une durée $t > 60$ s, l'orthogonale est matérialisée par des points où la profondeur D est inférieure à 0,08 m ; on se trouve alors à 28 m de la côte, la célérité continue de diminuer au fur et à mesure que l'orthogonale se rapproche de la côte.

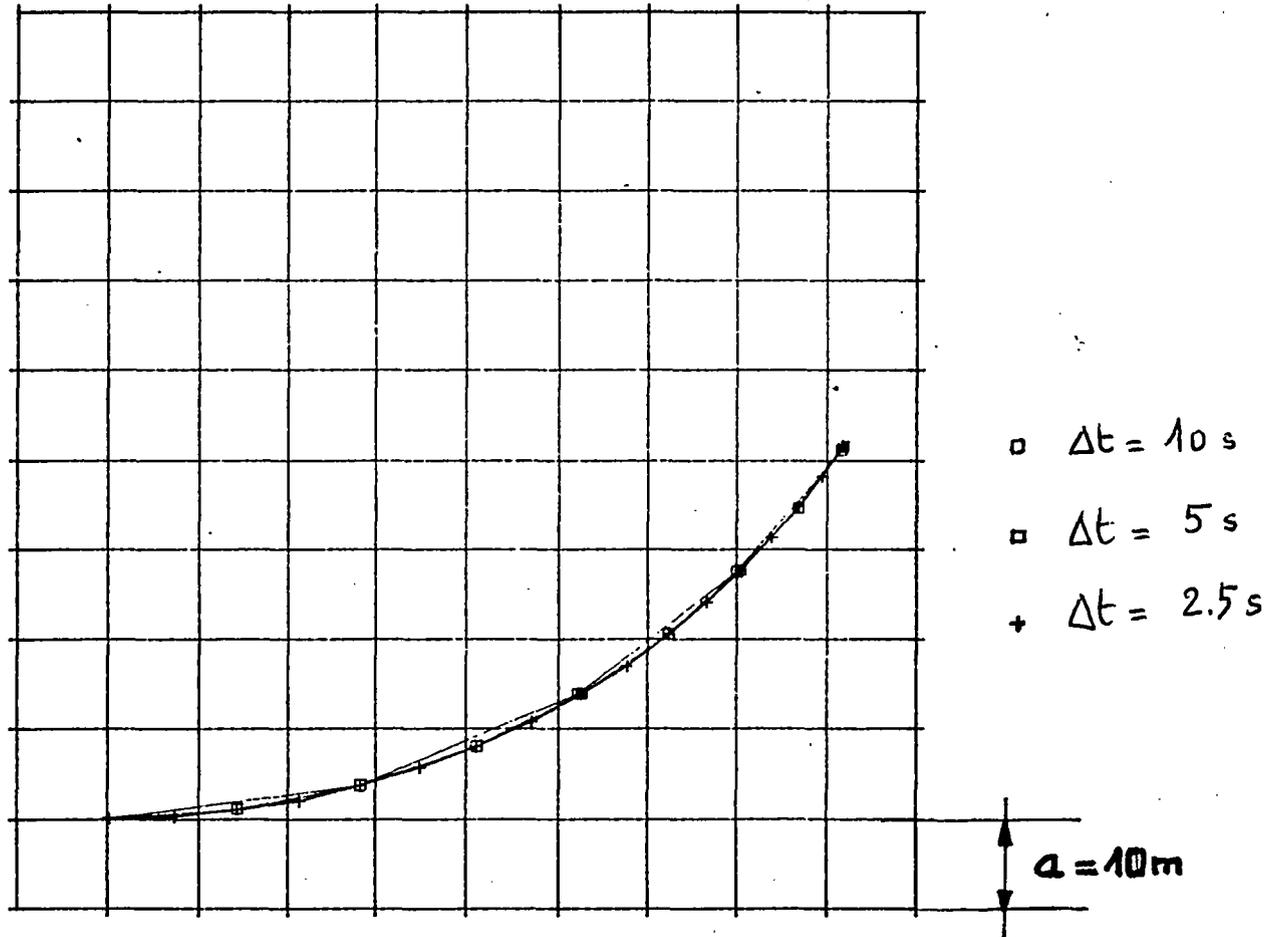
On décide donc de faire la comparaison $\beta_{\text{analytique}}/\beta_{\text{numérique}}$ au cours des 60 premières secondes.

Fig. 20 - INFLUENCE DE α SUR LES RESULTATS DE REFRACTION
PLAN LOCAL



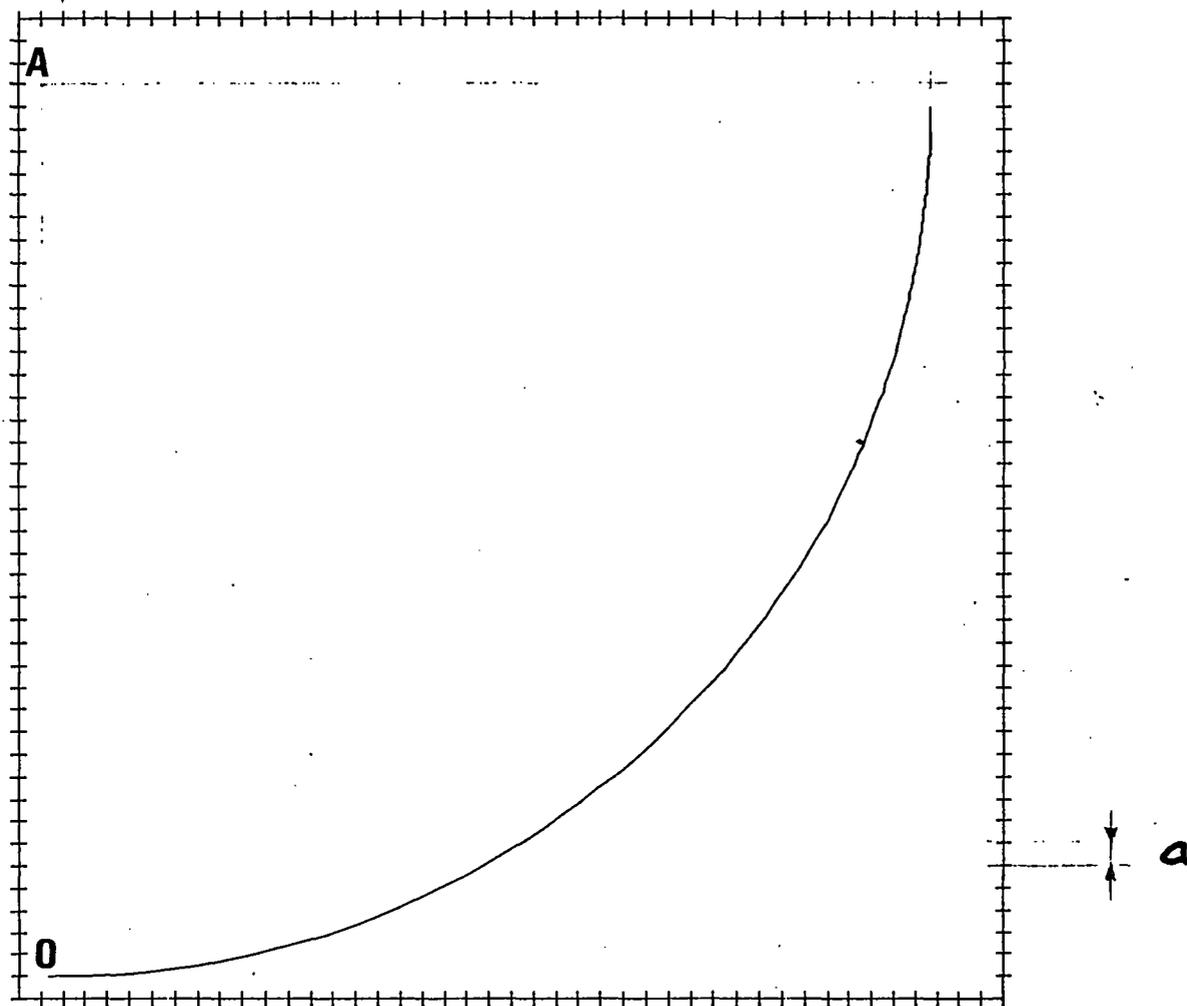
CARACTERISTIQUE DE LA HOULE : PERIODE : 10 s

Fig. 21 - INFLUENCE DE Δt SUR LES RESULTATS DE REFRACTION
PLAN LOCAL



CARACTERISTIQUES DE LA HOULE : DIRECTION :
PERIODE : 10 s

Fig. 22 - COMPARAISON DES RESULTATS ANALYTIQUE ET NUMERIQUE

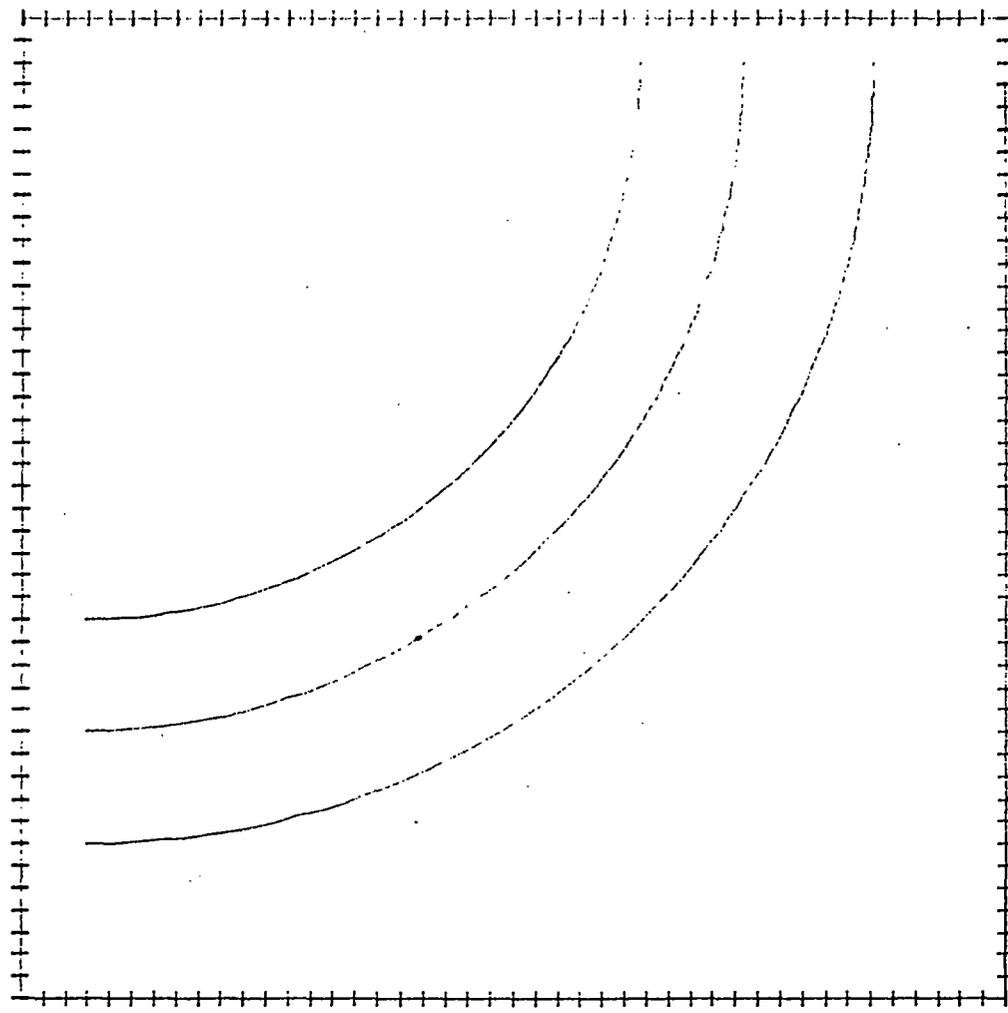


CARACTERISTIQUES

PERIODE

: $dt = 1$ seconde
: 10 s
: $a = 2.5$ m

Fig. 23 - VISUALISATION DE LA CONSERVATION DE $1/|o|=1$



CARACTERISTIQUES

PERIODE

: $a = 2.5 \text{ m}$
: 10 s
: $dt = 1 \text{ s}$

* Pour une longueur de maille $a = 10$ m :

pour $\Delta t = 1,0$ s	on a	$\beta_{\text{inf}} = 0,9927$	-	$\beta_{\text{sup}} = 1,053$
" = 2,5 s	"	" = 0,9942	-	" = 1,063
" = 5,0 s	"	" = 0,9995	-	" = 1,079
" = 7,5 s	"	" = 1,0000	-	" = 1,0098
" = 10,0 s	"	" = 1,0000	-	" = 1,0134
" = 15,0 s	"	" = 1,0000	-	" = 1,0172

Ainsi, l'écart entre le " β calculé" et le " β théorique" constant égal à 1 est de l'ordre du pour cent.

* Pour une longueur de maille $a = 5$ m, l'écart est de l'ordre de ± 3 %.

* Pour une longueur de maille $a = 2,5$ m, l'écart est de l'ordre de ± 3 % pour $\Delta t = 1$ s, et pour des pas de temps supérieurs, l'écart ne cesse de s'accroître.

Il semblerait donc que les choix de " a " et de Δt sont liés :

* si l'on choisit " a " grand, Δt pourra lui aussi être grand, de l'ordre de la période de la houle (entre 5 et 15 secondes) ;

* par contre, si l'on choisit " a " petit, Δt doit être également petit.

Il doit y avoir cohérence de " a " et de " Δt ".

Si on appelle C_1 la célérité exprimée en maille par seconde, au point de départ de l'orthogonale (colonne " C " dans les tableaux), on peut calculer $C_1 \cdot \Delta t$ pour les différents maillages et pour différentes valeurs de Δt .

$a = 10$ m $C_1 = 0,2316$ $D = 0,550$ m

cas $\Delta t = 1$ s	$C_1 \cdot \Delta t = 0,2316$ maille
" " = 5 s	" = 1,158 maille
" " = 10 s	" = 2,316 mailles
" " = 15 s	" = 3,474 mailles

$a = 5$ m $C_1 = 0,5547$ $D = 0,792$ m

cas $\Delta t = 2,5$ s	$C_1 \cdot \Delta t = 1,387$ maille
" " = 5 s	" = 2,774 mailles
" " = 10 s	" = 5,547 mailles

$a = 2,5$ m $C_1 = 1,1395$ $DE = 0,836$ m

cas $\Delta t = 1$ s	$C_1 \cdot \Delta t = 1,1395$ maille
" " = 2,5 s	" = 2,849 mailles
" " = 7,5 s	" = 8,55 mailles
" " = 10,0 s	" = 11,4 mailles

("C" est donnée dans les tableaux en unité de maille par seconde).

t	x	y	D	α	C	β	$\frac{H}{H_0}$			
0.0	1	1	4.000	4.000	0.550	0.0000	0.2316	1.0000	1.0000	1.0000+
1.0	1	2	4.231	4.004	0.550	0.0315	0.2314	1.0000	1.0001	1.8438-
2.0	1	3	4.462	4.015	0.548	0.0631	0.2311	1.0001	1.0002	1.8448-
3.0	1	4	4.693	4.033	0.546	0.0945	0.2305	1.0002	1.0005	1.8465-
4.0	1	5	4.921	4.058	0.542	0.1259	0.2297	1.0005	1.0007	1.8490-
5.0	1	6	5.148	4.090	0.538	0.1572	0.2287	1.0007	1.0011	1.8522-
6.0	1	7	5.373	4.130	0.532	0.1884	0.2275	1.0011	1.0015	1.8562-
7.0	1	8	5.595	4.176	0.526	0.2194	0.2260	1.0015	1.0020	1.8611-
8.0	1	9	5.814	4.228	0.518	0.2501	0.2243	1.0020	1.0024	1.8667-
9.0	1	10	6.030	4.287	0.510	0.2806	0.2225	1.0024	1.0029	1.8734-
10.0	1	11	6.241	4.351	0.501	0.3109	0.2204	1.0029	1.0034	1.8809-
11.0	1	12	6.449	4.421	0.491	0.3408	0.2182	1.0034	1.0039	1.8895-
12.0	1	13	6.653	4.497	0.480	0.3705	0.2158	1.0039	1.0043	1.8992-
13.0	1	14	6.851	4.577	0.469	0.3998	0.2132	1.0043	1.0047	1.9101-
14.0	1	15	7.045	4.663	0.457	0.4287	0.2105	1.0047	1.0050	1.9222-
15.0	1	16	7.234	4.752	0.444	0.4572	0.2076	1.0050	1.0052	1.9358-
16.0	1	17	7.418	4.846	0.431	0.4852	0.2046	1.0052	1.0053	1.9508-
17.0	1	18	7.596	4.943	0.417	0.5129	0.2015	1.0053	1.0053	1.9674-
18.0	1	19	7.769	5.043	0.403	0.5400	0.1983	1.0053	1.0051	1.9834-
19.0	1	20	7.936	5.147	0.391	0.5668	0.1951	1.0051	1.0048	1.9976-
20.0	1	21	8.098	5.253	0.379	0.5930	0.1918	1.0048	1.0044	2.0131-
21.0	1	22	8.254	5.361	0.366	0.6188	0.1885	1.0044	1.0039	2.0299-
22.0	1	23	8.405	5.471	0.353	0.6440	0.1851	1.0039	1.0033	2.0481-
23.0	1	24	8.550	5.583	0.340	0.6688	0.1816	1.0033	1.0027	2.0678-
24.0	1	25	8.690	5.696	0.327	0.6931	0.1781	1.0027	1.0021	2.0892-
25.0	1	26	8.824	5.811	0.314	0.7168	0.1746	1.0021	1.0015	2.1122-
26.0	1	27	8.953	5.926	0.300	0.7401	0.1711	1.0015	1.0009	2.1370-
27.0	1	28	9.077	6.041	0.288	0.7628	0.1675	1.0009	1.0004	2.1610-
28.0	1	29	9.196	6.157	0.276	0.7851	0.1639	1.0004	1.0000	2.1813-
29.0	1	30	9.309	6.273	0.265	0.8069	0.1603	1.0000	0.9996	2.2031-
30.0	1	31	9.417	6.389	0.253	0.8282	0.1566	0.9996	0.9993	2.2264-
31.0	1	32	9.521	6.504	0.242	0.8491	0.1530	0.9993	0.9990	2.2516-
32.0	1	33	9.620	6.618	0.231	0.8695	0.1494	0.9990	0.9987	2.2787-
33.0	1	34	9.714	6.732	0.220	0.8894	0.1459	0.9987	0.9985	2.3081-
34.0	1	35	9.803	6.845	0.208	0.9089	0.1423	0.9985	0.9982	2.3399-
35.0	1	36	9.889	6.956	0.197	0.9278	0.1388	0.9982	0.9980	2.3744-
36.0	1	37	9.970	7.067	0.188	0.9464	0.1354	0.9980	0.9978	2.4032-
37.0	1	38	10.047	7.176	0.179	0.9644	0.1320	0.9978	0.9976	2.4283-
38.0	1	39	10.120	7.284	0.171	0.9820	0.1286	0.9976	0.9973	2.4552-
39.0	1	40	10.190	7.390	0.163	0.9992	0.1253	0.9973	0.9971	2.4841-
40.0	1	41	10.256	7.494	0.155	1.0159	0.1221	0.9971	0.9969	2.5152-
41.0	1	42	10.319	7.597	0.147	1.0322	0.1189	0.9969	0.9967	2.5487-
42.0	1	43	10.378	7.699	0.139	1.0480	0.1158	0.9967	0.9965	2.5848-
43.0	1	44	10.434	7.798	0.131	1.0634	0.1127	0.9965	0.9962	2.6240-
44.0	1	45	10.488	7.896	0.124	1.0784	0.1097	0.9962	0.9960	2.6664-
45.0	1	46	10.538	7.991	0.116	1.0931	0.1067	0.9960	0.9958	2.7127-
46.0	1	47	10.586	8.085	0.111	1.1073	0.1038	0.9958	0.9956	2.7420-
47.0	1	48	10.631	8.177	0.105	1.1210	0.1010	0.9956	0.9954	2.7711-
48.0	1	49	10.673	8.267	0.100	1.1344	0.0982	0.9954	0.9952	2.8022-
49.0	1	50	10.714	8.355	0.095	1.1474	0.0954	0.9952	0.9950	2.8356-
50.0	1	51	10.752	8.441	0.090	1.1600	0.0928	0.9950	0.9948	2.8715-
51.0	1	52	10.788	8.525	0.085	1.1722	0.0902	0.9948	0.9946	2.9101-
52.0	1	53	10.822	8.607	0.081	1.1841	0.0876	0.9946	0.9943	2.9517-
53.0	1	54	10.854	8.687	0.076	1.1956	0.0851	0.9943	0.9941	2.9966-
54.0	1	55	10.884	8.765	0.072	1.2068	0.0827	0.9941	0.9939	3.0453-
55.0	1	56	10.913	8.842	0.067	1.2176	0.0803	0.9939	0.9937	3.0983-
56.0	1	57	10.940	8.916	0.063	1.2281	0.0780	0.9937	0.9934	3.1561-
57.0	1	58	10.965	8.989	0.059	1.2382	0.0758	0.9934	0.9932	3.2194-
58.0	1	59	10.989	9.059	0.056	1.2481	0.0736	0.9932	0.9930	3.2541-
59.0	1	60	11.012	9.128	0.053	1.2576	0.0715	0.9930	0.9927	3.2844-

t = secondes

$$\left. \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} \text{unités de maille}$$

D = mètres

 α = radians

C = maille/seconde

a = 10 m

 $\Delta t = 1$ s

t	x	y	D	α	C	β	$\frac{H}{H_0}$
0.0	1	4.000	4.000	0.550	0.0000	0.2316	1.0000
2.5	2	4.578	4.023	0.547	0.0788	0.2309	1.0000
5.0	3	5.148	4.090	0.538	0.1572	0.2287	1.0005
7.5	4	5.705	4.201	0.522	0.2347	0.2252	1.0014
10.0	5	6.241	4.351	0.501	0.3107	0.2204	1.0026
12.5	6	6.752	4.536	0.475	0.3850	0.2145	1.0040
15.0	7	7.233	4.752	0.444	0.4569	0.2076	1.0053
17.5	8	7.682	4.992	0.410	0.5263	0.1999	1.0061
20.0	9	8.097	5.252	0.379	0.5927	0.1919	1.0063
22.5	10	8.478	5.526	0.347	0.6561	0.1834	1.0055
25.0	11	8.824	5.809	0.314	0.7165	0.1747	1.0041
27.5	12	9.136	6.098	0.282	0.7737	0.1658	1.0027
30.0	13	9.416	6.387	0.254	0.8279	0.1567	1.0014
32.5	14	9.666	6.673	0.225	0.8791	0.1477	1.0005
35.0	15	9.888	6.954	0.198	0.9275	0.1389	0.9999
37.5	16	10.083	7.228	0.175	0.9729	0.1304	0.9994
40.0	17	10.255	7.492	0.155	1.0155	0.1222	0.9989
42.5	18	10.406	7.746	0.135	1.0554	0.1143	0.9984
45.0	19	10.538	7.989	0.116	1.0927	0.1068	0.9978
47.5	20	10.652	8.220	0.103	1.1274	0.0996	0.9973
50.0	21	10.752	8.438	0.090	1.1596	0.0929	0.9968
52.5	22	10.838	8.645	0.078	1.1895	0.0864	0.9964
55.0	23	10.913	8.839	0.067	1.2172	0.0804	0.9958
57.5	24	10.978	9.022	0.057	1.2428	0.0747	0.9953
60.0	25	11.034	9.193	0.051	1.2662	0.0696	0.9947

Tableau n° 2

a = 10 m
 $\Delta t = 2,5$ s

0.0	1	4.000	4.000	0.550	0.0000	0.2316	1.0000
5.0	2	5.147	4.090	0.538	0.1569	0.2287	1.0000
10.0	3	6.239	4.350	0.501	0.3102	0.2205	1.0019
15.0	4	7.231	4.750	0.444	0.4561	0.2077	1.0051
20.0	5	8.094	5.249	0.379	0.5917	0.1920	1.0079
25.0	6	8.820	5.805	0.314	0.7152	0.1748	1.0078
30.0	7	9.413	6.381	0.254	0.8266	0.1569	1.0054
35.0	8	9.885	6.947	0.198	0.9261	0.1391	1.0038
40.0	9	10.253	7.484	0.156	1.0140	0.1224	1.0032
45.0	10	10.536	7.980	0.117	1.0911	0.1071	1.0026
50.0	11	10.751	8.429	0.091	1.1581	0.0931	1.0019
55.0	12	10.912	8.830	0.068	1.2157	0.0807	1.0012
60.0	13	11.034	9.183	0.051	1.2642	0.0698	1.0005

a = 10 m
 $\Delta t = 5$ s

0.0	1	4.000	4.000	0.550	0.0000	0.2316	1.0000
7.5	2	5.701	4.200	0.522	0.2336	0.2253	1.0000
15.0	3	7.226	4.746	0.445	0.4547	0.2078	1.0043
22.5	4	8.469	5.515	0.348	0.6530	0.1837	1.0098
30.0	5	9.407	6.369	0.255	0.8243	0.1572	1.0090
37.5	6	10.075	7.206	0.177	0.9688	0.1311	1.0065
45.0	7	10.532	7.964	0.118	1.0884	0.1076	1.0060
52.5	8	10.835	8.618	0.080	1.1852	0.0873	1.0053
60.0	9	11.034	9.166	0.052	1.2608	0.0704	1.0046

a = 10 m
 $\Delta t = 7,5$ s

Tableau n° 3

t		x	y	D	α	C	β	$\frac{H}{H_0}$		
0.0	1	1	4.000	4.000	0.550	0.0000	0.2316	1.0000	1.0000	1.0000+
15.0	1	2	7.197	4.727	0.448	0.4469	0.2084	1.0000	1.0172	1.9203-
30.0	1	3	9.363	6.302	0.262	0.8107	0.1594	1.0172	1.0098	2.1974-
45.0	1	4	10.500	7.861	0.126	1.0710	0.1107	1.0098	1.0117	2.6303-
60.0	1	5	11.027	9.055	0.056	1.2381	0.0737	1.0117	1.0124	3.2209-

a = 10 m

 $\Delta t = 15$ s

0.0	1	1	4.000	4.000	0.550	0.0000	0.2316	1.0000	1.0000	1.0000+
10.0	1	2	6.231	4.346	0.502	0.3080	0.2206	1.0000	1.0077	1.8764-
20.0	1	3	8.080	5.234	0.381	0.5872	0.1924	1.0077	1.0134	2.0014-
30.0	1	4	9.397	6.353	0.257	0.8210	0.1578	1.0134	1.0090	2.2083-
40.0	1	5	10.240	7.446	0.158	1.0074	0.1236	1.0090	1.0085	2.4862-
50.0	1	6	10.743	8.386	0.093	1.1508	0.0945	1.0085	1.0076	2.8302-
60.0	1	7	11.034	9.140	0.053	1.2553	0.0711	1.0076	1.0062	3.2677-

a = 10 m

 $\Delta t = 10$ s

Tableau n° 4

t	x	y	D	α	C	β	$\frac{H}{H_0}$			
0.0	1	1	4.000	4.000	0.792	0.0000	0.5547	1.0000	1.0000	1.0000+
2.5	1	2	5.384	4.051	0.788	0.0737	0.5533	1.0000	0.9968	1.6916-
5.0	1	3	6.753	4.203	0.776	0.1470	0.5489	0.9968	0.9908	1.7030-
7.5	1	4	8.094	4.451	0.756	0.2196	0.5418	0.9908	0.9833	1.7201-
10.0	1	5	9.393	4.790	0.729	0.2912	0.5321	0.9833	0.9766	1.7416-
12.5	1	6	10.638	5.212	0.695	0.3618	0.5197	0.9766	0.9731	1.7650-
15.0	1	7	11.819	5.707	0.655	0.4323	0.5047	0.9731	0.9744	1.7893-
17.5	1	8	12.925	6.266	0.610	0.5024	0.4872	0.9744	0.9804	1.8150-
20.0	1	9	13.950	6.876	0.561	0.5716	0.4674	0.9804	0.9894	1.8444-
22.5	1	10	14.889	7.525	0.511	0.6382	0.4462	0.9894	0.9986	1.8778-
25.0	1	11	15.741	8.200	0.462	0.7010	0.4243	0.9986	1.0060	1.9183-
27.5	1	12	16.511	8.889	0.416	0.7592	0.4027	1.0060	1.0109	1.9634-
30.0	1	13	17.203	9.582	0.374	0.8135	0.3817	1.0109	1.0138	2.0123-
32.5	1	14	17.822	10.272	0.333	0.8649	0.3605	1.0138	1.0170	2.0665-
35.0	1	15	18.373	10.950	0.295	0.9135	0.3393	1.0170	1.0208	2.1271-
37.5	1	16	18.860	11.613	0.261	0.9595	0.3191	1.0208	1.0237	2.1877-
40.0	1	17	19.289	12.254	0.229	1.0029	0.2991	1.0237	1.0270	2.2556-
42.5	1	18	19.665	12.870	0.199	1.0433	0.2791	1.0270	1.0304	2.3313-
45.0	1	19	19.994	13.460	0.175	1.0810	0.2616	1.0304	1.0324	2.4038-
47.5	1	20	20.282	14.023	0.153	1.1163	0.2451	1.0324	1.0344	2.4839-
50.0	1	21	20.532	14.558	0.133	1.1497	0.2275	1.0344	1.0374	2.5682-
52.5	1	22	20.748	15.061	0.114	1.1813	0.2111	1.0374	1.0405	2.6677-
55.0	1	23	20.934	15.534	0.099	1.2107	0.1963	1.0405	1.0430	2.7549-
57.5	1	24	21.095	15.979	0.085	1.2375	0.1825	1.0430	1.0451	2.8619-
60.0	1	25	21.233	16.396	0.074	1.2622	0.1696	1.0451	1.0470	2.9552-
62.5	1	26	21.353	16.786	0.064	1.2851	0.1574	1.0470	1.0487	3.0664-
65.0	1	27	21.456	17.151	0.055	1.3062	0.1461	1.0487	1.0503	3.1820-
67.5	1	28	21.544	17.491	0.047	1.3255	0.1354	1.0503	1.0517	3.2904-
70.0	1	29	21.621	17.807	0.041	1.3433	0.1255	1.0517	1.0530	3.4222-
72.5	1	30	21.686	18.102	0.035	1.3596	0.1164	1.0530	1.0541	3.5575-
75.0	1	31	21.743	18.377	0.030	1.3745	0.1084	1.0541	1.0550	3.6649-
77.5	1	32	21.792	18.633	0.026	1.3880	0.1009	1.0550	1.0558	3.7929-
80.0	1	33	21.835	18.873	0.023	1.4003	0.0939	1.0558	1.0565	3.9475-
82.5	1	34	21.872	19.096	0.020	1.4117	0.0876	1.0565	1.0571	4.0907-
85.0	1	35	21.905	19.306	0.018	1.4225	0.0821	1.0571	1.0576	4.1951-
87.5	1	36	21.933	19.502	0.016	1.4327	0.0770	1.0576	1.0581	4.3162-
90.0	1	37	21.958	19.687	0.014	1.4425	0.0722	1.0581	1.0586	4.4581-
92.5	1	38	21.979	19.860	0.012	1.4518	0.0677	1.0586	1.0591	4.6266-
95.0	1	39	21.998	20.023	0.010	1.4606	0.0632	1.0591	1.0597	4.8109-
97.5	1	40	22.014	20.173	0.009	1.4687	0.0577	1.0597	1.0602	4.9128-

a = 5 m

 $\Delta t = 2,5$ s

Tableau n° 5

t		x	y	D	α	C	β	$\frac{H}{H_0}$
0.0	1	1	4.000	4.000	0.792	0.0000	0.5547	1.0000
3.8	1	2	6.071	4.114	0.783	0.1104	0.5515	1.0000
7.5	1	3	8.093	4.451	0.756	0.2195	0.5419	0.9927
11.3	1	4	10.021	4.991	0.713	0.3263	0.5264	0.9805
15.0	1	5	11.816	5.706	0.655	0.4320	0.5048	0.9698
18.8	1	6	13.445	6.563	0.586	0.5367	0.4775	0.9696
22.5	1	7	14.885	7.521	0.511	0.6372	0.4463	0.9800
26.3	1	8	16.134	8.538	0.439	0.7295	0.4137	0.9938
30.0	1	9	17.202	9.575	0.374	0.8127	0.3819	1.0037
33.8	1	10	18.105	10.605	0.314	0.8887	0.3501	1.0087
37.5	1	11	18.860	11.604	0.261	0.9588	0.3193	1.0141
41.3	1	12	19.484	12.556	0.215	1.0227	0.2893	1.0190
45.0	1	13	19.995	13.451	0.176	1.0803	0.2618	1.0247
48.8	1	14	20.413	14.284	0.143	1.1326	0.2365	1.0287
52.5	1	15	20.749	15.051	0.114	1.1807	0.2114	1.0325
56.3	1	16	21.019	15.750	0.092	1.2238	0.1896	1.0374
60.0	1	17	21.236	16.386	0.074	1.2617	0.1699	1.0410
63.8	1	18	21.409	16.962	0.059	1.2953	0.1520	1.0440
67.5	1	19	21.548	17.481	0.048	1.3251	0.1357	1.0466
71.3	1	20	21.658	17.948	0.037	1.3512	0.1211	1.0488
75.0	1	21	21.747	18.368	0.031	1.3740	0.1086	1.0507
78.8	1	22	21.819	18.747	0.025	1.3939	0.0975	1.0522
82.5	1	23	21.877	19.089	0.020	1.4114	0.0878	1.0534
86.3	1	24	21.924	19.398	0.017	1.4273	0.0797	1.0543
90.0	1	25	21.963	19.680	0.014	1.4422	0.0724	1.0551
93.8	1	26	21.994	19.937	0.011	1.4560	0.0657	1.0559
97.5	1	27	22.019	20.166	0.009	1.4683	0.0580	1.0567

$$a = 5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 3,75 \text{ s}$$

t		x	y	D	α	C	β	$\frac{H}{H_0}$		
0.0	1	1	4.000	4.000	0.792	0.0000	0.5547	1.0000	1.0000	1.0000+
5.0	1	2	6.751	4.202	0.776	0.1469	0.5490	1.0000	0.9871	1.7061-
10.0	1	3	9.389	4.789	0.729	0.2908	0.5322	0.9871	0.9685	1.7488-
15.0	1	4	11.812	5.706	0.655	0.4324	0.5048	0.9685	0.9629	1.7998-
20.0	1	5	13.939	6.873	0.561	0.5713	0.4675	0.9629	0.9762	1.8567-
25.0	1	6	15.729	8.193	0.462	0.6999	0.4245	0.9762	0.9903	1.9330-
30.0	1	7	17.191	9.573	0.374	0.8130	0.3819	0.9903	0.9947	2.0308-
35.0	1	8	18.359	10.938	0.295	0.9129	0.3396	0.9947	0.9999	2.1479-
40.0	1	9	19.275	12.239	0.230	1.0019	0.2996	0.9999	1.0021	2.2816-
45.0	1	10	19.981	13.445	0.176	1.0802	0.2620	1.0021	1.0055	2.4337-
50.0	1	11	20.518	14.539	0.134	1.1491	0.2282	1.0055	1.0085	2.6011-
55.0	1	12	20.921	15.515	0.100	1.2095	0.1969	1.0085	1.0120	2.7926-
60.0	1	13	21.222	16.377	0.074	1.2612	0.1702	1.0120	1.0144	2.9974-
65.0	1	14	21.445	17.132	0.055	1.3051	0.1467	1.0144	1.0162	3.2294-
70.0	1	15	21.611	17.789	0.041	1.3423	0.1261	1.0162	1.0177	3.4719-
75.0	1	16	21.734	18.360	0.031	1.3734	0.1089	1.0177	1.0186	3.7219-
80.0	1	17	21.827	18.856	0.023	1.3993	0.0943	1.0186	1.0192	4.0066-
85.0	1	18	21.897	19.291	0.018	1.4217	0.0825	1.0192	1.0195	4.2642-
90.0	1	19	21.951	19.673	0.014	1.4418	0.0726	1.0195	1.0199	4.5297-
95.0	1	20	21.991	20.009	0.010	1.4599	0.0637	1.0199	1.0203	4.8944-
100.0	1	21	22.021	20.297	0.008	1.4755	0.0532	1.0203	1.0209	5.1172-

Tableau n° 6

$$a = 5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 5 \text{ s}$$

0.0	1	1	4.000	4.000	0.792	0.0000	0.5547	1.0000	1.0000	1.0000+
7.5	1	2	8.086	4.449	0.756	0.2190	0.5419	1.0000	0.9710	1.7310-
15.0	1	3	11.799	5.704	0.655	0.4330	0.5048	0.9710	0.9478	1.8140-
22.5	1	4	14.856	7.512	0.512	0.6353	0.4466	0.9478	0.9671	1.9073-
30.0	1	5	17.170	9.554	0.375	0.8107	0.3825	0.9671	0.9726	2.0522-
37.5	1	6	18.827	11.573	0.263	0.9567	0.3203	0.9726	0.9796	2.2322-
45.0	1	7	19.964	13.414	0.177	1.0779	0.2629	0.9796	0.9891	2.4497-
52.5	1	8	20.719	15.005	0.116	1.1780	0.2128	0.9891	0.9965	2.7164-
60.0	1	9	21.209	16.339	0.075	1.2592	0.1713	0.9965	0.9996	3.0099-
67.5	1	10	21.524	17.435	0.049	1.3224	0.1372	0.9996	1.0016	3.3510-
75.0	1	11	21.727	18.326	0.031	1.3713	0.1099	1.0016	1.0027	3.7365-
82.5	1	12	21.859	19.051	0.020	1.4093	0.0888	1.0027	1.0031	4.1785-
90.0	1	13	21.947	19.646	0.014	1.4403	0.0733	1.0031	1.0031	4.5440-
97.5	1	14	22.004	20.131	0.009	1.4665	0.0593	1.0031	1.0035	5.0177-

$$a = 5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 7,5 \text{ s}$$

0.0	1	1	4.000	4.000	0.792	0.0000	0.5547	1.0000	1.0000	1.0000+
10.0	1	2	9.373	4.784	0.729	0.2896	0.5323	1.0000	0.9484	1.7670-
20.0	1	3	13.898	6.855	0.563	0.5689	0.4660	0.9484	0.9472	1.8837-
30.0	1	4	17.143	9.325	0.377	0.8082	0.3834	0.9472	0.9546	2.0691-
40.0	1	5	19.228	12.163	0.234	0.9957	0.3020	0.9546	0.9633	2.3184-
50.0	1	6	20.478	14.447	0.137	1.1444	0.2312	0.9633	0.9780	2.6242-
60.0	1	7	21.192	16.283	0.077	1.2555	0.1731	0.9780	0.9943	3.0040-
70.0	1	8	21.591	17.698	0.043	1.3367	0.1289	0.9943	1.0056	3.4503-
80.0	1	9	21.815	18.776	0.024	1.3943	0.0967	1.0056	1.0129	3.9618-
90.0	1	10	21.944	19.604	0.015	1.4380	0.0744	1.0129	1.0177	4.4774-
100.0	1	11	22.017	20.230	0.008	1.4717	0.0557	1.0177	1.0219	5.0515-

$$a = 5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 10 \text{ s}$$

t	x	y	D	α	C	β	$\frac{H}{H_0}$
0.0	1	6.000	6.000	0.836	0.0000	1.1395	1.0000
1.0	2	7.139	6.017	0.836	0.0300	1.1390	1.0000
2.0	3	8.276	6.068	0.834	0.0600	1.1375	1.0003
3.0	4	9.409	6.153	0.830	0.0898	1.1350	1.0010
4.0	5	10.536	6.272	0.825	0.1195	1.1315	1.0018
5.0	6	11.655	6.423	0.818	0.1490	1.1270	1.0027
6.0	7	12.765	6.606	0.810	0.1782	1.1215	1.0035
7.0	8	13.862	6.820	0.801	0.2072	1.1151	1.0037
8.0	9	14.947	7.064	0.790	0.2358	1.1080	1.0030
9.0	10	16.016	7.337	0.779	0.2641	1.1002	1.0011
10.0	11	17.070	7.638	0.767	0.2921	1.0917	0.9978
11.0	12	18.107	7.966	0.754	0.3198	1.0825	0.9938
12.0	13	19.125	8.318	0.740	0.3472	1.0722	0.9898
13.0	14	20.123	8.695	0.725	0.3746	1.0613	0.9865
14.0	15	21.100	9.095	0.708	0.4020	1.0496	0.9840
15.0	16	22.054	9.516	0.692	0.4294	1.0371	0.9823
16.0	17	22.985	9.958	0.674	0.4568	1.0239	0.9813
17.0	18	23.891	10.419	0.655	0.4842	1.0097	0.9810
18.0	19	24.772	10.898	0.636	0.5117	0.9949	0.9815
19.0	20	25.626	11.393	0.616	0.5391	0.9792	0.9828
20.0	21	26.452	11.903	0.595	0.5666	0.9629	0.9847
21.0	22	27.250	12.426	0.574	0.5941	0.9457	0.9873
22.0	23	28.019	12.961	0.552	0.6216	0.9280	0.9906
23.0	24	28.758	13.506	0.530	0.6486	0.9092	0.9946
24.0	25	29.468	14.058	0.508	0.6746	0.8904	0.9992
25.0	26	30.150	14.618	0.488	0.6995	0.8730	1.0031
26.0	27	30.804	15.182	0.469	0.7232	0.8555	1.0050
27.0	28	31.433	15.749	0.450	0.7463	0.8380	1.0062
28.0	29	32.035	16.319	0.431	0.7690	0.8200	1.0074
29.0	30	32.611	16.889	0.412	0.7910	0.8019	1.0088
30.0	31	33.163	17.459	0.394	0.8124	0.7846	1.0102
31.0	32	33.691	18.028	0.377	0.8330	0.7675	1.0110
32.0	33	34.195	18.594	0.361	0.8531	0.7504	1.0114
33.0	34	34.678	19.158	0.344	0.8731	0.7332	1.0119
34.0	35	35.138	19.718	0.328	0.8928	0.7156	1.0127
35.0	36	35.576	20.272	0.312	0.9121	0.6982	1.0139
36.0	37	35.992	20.822	0.297	0.9309	0.6810	1.0151
37.0	38	36.389	21.365	0.283	0.9490	0.6646	1.0162
38.0	39	36.767	21.902	0.269	0.9665	0.6487	1.0169
39.0	40	37.126	22.432	0.256	0.9838	0.6323	1.0175
40.0	41	37.467	22.954	0.243	1.0011	0.6161	1.0183
41.0	42	37.791	23.469	0.230	1.0182	0.5993	1.0194
42.0	43	38.097	23.974	0.217	1.0349	0.5827	1.0208
43.0	44	38.386	24.471	0.205	1.0510	0.5668	1.0222
44.0	45	38.660	24.958	0.194	1.0661	0.5512	1.0234
45.0	46	38.920	25.436	0.185	1.0804	0.5376	1.0242
46.0	47	39.167	25.906	0.176	1.0941	0.5243	1.0246
47.0	48	39.401	26.367	0.167	1.1075	0.5107	1.0249
48.0	49	39.623	26.820	0.158	1.1208	0.4972	1.0252
49.0	50	39.833	27.263	0.149	1.1342	0.4835	1.0258
50.0	51	40.032	27.696	0.141	1.1476	0.4697	1.0265
51.0	52	40.219	28.119	0.133	1.1609	0.4560	1.0274
52.0	53	40.395	28.532	0.125	1.1742	0.4419	1.0285
53.0	54	40.561	28.934	0.117	1.1873	0.4282	1.0297
54.0	55	40.716	29.326	0.110	1.2000	0.4146	1.0310
55.0	56	40.861	29.707	0.103	1.2118	0.4013	1.0323
56.0	57	40.998	30.077	0.097	1.2229	0.3889	1.0334
57.0	58	41.127	30.439	0.092	1.2332	0.3790	1.0343
58.0	59	41.249	30.792	0.087	1.2430	0.3694	1.0348
59.0	60	41.365	31.138	0.083	1.2523	0.3596	1.0351
60.0	61	41.475	31.475	0.078	1.2614	0.3496	1.0354
61.0	62	41.578	31.804	0.074	1.2705	0.3399	1.0358
62.0	63	41.676	32.124	0.070	1.2795	0.3301	1.0363
63.0	64	41.768	32.436	0.065	1.2884	0.3199	1.0368
64.0	65	41.854	32.739	0.061	1.2972	0.3101	1.0373
65.0	66	41.935	33.033	0.058	1.3058	0.3005	1.0379
66.0	67	42.011	33.319	0.054	1.3141	0.2912	1.0385
67.0	68	42.083	33.596	0.051	1.3221	0.2822	1.0390
68.0	69	42.150	33.866	0.048	1.3297	0.2734	1.0395
69.0	70	42.214	34.127	0.045	1.3371	0.2652	1.0400
70.0	71	42.273	34.382	0.042	1.3442	0.2575	1.0404
71.0	72	42.330	34.629	0.040	1.3512	0.2501	1.0408
72.0	73	42.382	34.870	0.038	1.3580	0.2428	1.0411
73.0	74	42.432	35.104	0.035	1.3646	0.2353	1.0415
74.0	75	42.479	35.330	0.033	1.3710	0.2275	1.0419
75.0	76	42.522	35.550	0.031	1.3770	0.2199	1.0423

Tableau n° 7

$$a = 2,5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

Tableau n° 8

t		x	y	D	α	C	β	$\frac{H}{H_0}$	
0.0	1	1	6.000	6.000	0.836	0.0000	1.1395	1.0000	1.0000
2.5	1	2	8.843	6.106	0.832	0.0749	1.1364	1.0000	1.0021
5.0	1	3	11.654	6.422	0.818	0.1489	1.1270	1.0021	1.0051
7.5	1	4	14.405	6.937	0.796	0.2214	1.1116	1.0051	1.0049
10.0	1	5	17.068	7.636	0.767	0.2920	1.0918	1.0049	0.9956
12.5	1	6	19.624	8.502	0.732	0.3610	1.0669	0.9956	0.9863
15.0	1	7	22.051	9.514	0.692	0.4295	1.0371	0.9863	0.9817
17.5	1	8	24.330	10.654	0.646	0.4981	1.0024	0.9817	0.9819
20.0	1	9	26.446	11.901	0.595	0.5667	0.9630	0.9819	0.9866
22.5	1	10	28.385	13.230	0.541	0.6349	0.9187	0.9866	0.9955
25.0	1	11	30.144	14.614	0.489	0.6988	0.8731	0.9955	1.0044
27.5	1	12	31.731	16.029	0.441	0.7575	0.8292	1.0044	1.0084
30.0	1	13	33.157	17.454	0.395	0.8121	0.7847	1.0084	1.0140
32.5	1	14	34.433	18.871	0.353	0.8632	0.7421	1.0140	1.0174
35.0	1	15	35.569	20.266	0.312	0.9120	0.6984	1.0174	1.0229
37.5	1	16	36.574	21.628	0.276	0.9578	0.6568	1.0229	1.0275
40.0	1	17	37.460	22.947	0.243	1.0013	0.6163	1.0275	1.0322
42.5	1	18	38.236	24.216	0.211	1.0429	0.5749	1.0322	1.0383
45.0	1	19	38.913	25.429	0.185	1.0804	0.5378	1.0383	1.0427
47.5	1	20	39.506	26.587	0.162	1.1146	0.5041	1.0427	1.0458
50.0	1	21	40.023	27.688	0.141	1.1480	0.4700	1.0458	1.0499
52.5	1	22	40.470	28.726	0.121	1.1811	0.4353	1.0499	1.0550
55.0	1	23	40.852	29.698	0.103	1.2117	0.4016	1.0550	1.0601
57.5	1	24	41.180	30.609	0.090	1.2381	0.3744	1.0601	1.0633
60.0	1	25	41.466	31.467	0.078	1.2616	0.3499	1.0633	1.0658
62.5	1	26	41.713	32.273	0.068	1.2841	0.3252	1.0658	1.0685
65.0	1	27	41.926	33.024	0.058	1.3059	0.3008	1.0685	1.0714
67.5	1	28	42.108	33.723	0.049	1.3260	0.2780	1.0714	1.0739
70.0	1	29	42.264	34.374	0.042	1.3444	0.2578	1.0739	1.0761
72.5	1	30	42.398	34.980	0.037	1.3615	0.2395	1.0761	1.0781
75.0	1	31	42.513	35.542	0.031	1.3770	0.2202	1.0781	1.0803
77.5	1	32	42.611	36.061	0.026	1.3907	0.2029	1.0803	1.0820
80.0	1	33	42.696	36.545	0.023	1.4025	0.1912	1.0820	1.0833
82.5	1	34	42.772	37.003	0.021	1.4126	0.1802	1.0833	1.0843
85.0	1	35	42.839	37.435	0.018	1.4218	0.1699	1.0843	1.0853
87.5	1	36	42.898	37.843	0.016	1.4308	0.1601	1.0853	1.0862
90.0	1	37	42.950	38.226	0.014	1.4397	0.1500	1.0862	1.0872
92.5	1	38	42.996	38.585	0.013	1.4487	0.1398	1.0872	1.0881
95.0	1	39	43.035	38.920	0.011	1.4576	0.1303	1.0881	1.0892
97.5	1	40	43.069	39.230	0.009	1.4664	0.1196	1.0892	1.0902
100.0	1	41	43.098	39.514	0.008	1.4748	0.1092	1.0902	1.0912
102.5	1	42	43.122	39.774	0.006	1.4827	0.0997	1.0912	1.0921
105.0	1	43	43.142	40.011	0.005	1.4902	0.0910	1.0921	1.0930
107.5	1	44	43.159	40.227	0.005	1.4969	0.0832	1.0930	1.0938
110.0	1	45	43.173	40.425	0.004	1.5029	0.0760	1.0938	1.0945
112.5	1	46	43.185	40.606	0.003	1.5081	0.0694	1.0945	1.0951
115.0	1	47	43.195	40.772	0.003	1.5128	0.0634	1.0951	1.0957
117.5	1	48	43.203	40.923	0.002	1.5170	0.0580	1.0957	1.0962
120.0	1	49	43.210	41.062	0.002	1.5208	0.0538	1.0962	1.0967
122.5	1	50	43.217	41.193	0.002	1.5242	0.0509	1.0967	1.0971
125.0	1	51	43.222	41.316	0.002	1.5273	0.0481	1.0971	1.0975
127.5	1	52	43.227	41.433	0.001	1.5302	0.0455	1.0975	1.0978
130.0	1	53	43.231	41.544	0.001	1.5329	0.0430	1.0978	1.0982
132.5	1	54	43.235	41.648	0.001	1.5354	0.0407	1.0982	1.0985
135.0	1	55	43.239	41.747	0.001	1.5376	0.0385	1.0985	1.0987
137.5	1	56	43.242	41.840	0.001	1.5397	0.0364	1.0987	1.0990
140.0	1	57	43.244	41.929	0.001	1.5417	0.0344	1.0990	1.0993
142.5	1	58	43.247	42.012	0.001	1.5434	0.0324	1.0993	1.0995
145.0	1	59	43.249	42.090	0.001	1.5450	0.0299	1.0995	1.0997
147.5	1	60	43.250	42.161	0.001	1.5465	0.0275	1.0997	1.0999
150.0	1	61	43.252	42.227	0.001	1.5479	0.0254	1.0999	1.1001
152.5	1	62	43.253	42.288	0.000	1.5491	0.0234	1.1001	1.1003
155.0	1	63	43.255	42.344	0.000	1.5503	0.0215	1.1003	1.1005
157.5	1	64	43.256	42.396	0.000	1.5513	0.0198	1.1005	1.1006
160.0	1	65	43.256	42.443	0.000	1.5523	0.0183	1.1006	1.1008
162.5	1	66	43.257	42.487	0.000	1.5532	0.0168	1.1008	1.1009

a = 2,5 m

 $\Delta t = 2,5$ s

t	x	y	D	α	C	β	$\frac{H}{H_0}$
0.0	1	6.000	6.000	0.836	0.0000	1.1395	1.0000
10.0	2	17.030	7.604	0.769	0.2888	1.0927	1.0338
20.0	3	26.347	11.851	0.597	0.5666	0.9645	1.0338
30.0	4	33.044	17.327	0.398	0.8042	0.7885	1.0539
40.0	5	37.350	22.750	0.248	0.9952	0.6224	1.1411
50.0	6	39.922	27.465	0.145	1.1475	0.4770	1.1680
60.0	7	41.385	31.258	0.081	1.2580	0.3561	1.2189
70.0	8	42.199	34.168	0.044	1.3382	0.2640	1.2767
80.0	9	42.656	36.371	0.024	1.3942	0.1954	1.3284
90.0	10	42.922	38.066	0.015	1.4358	0.1545	1.3640
100.0	11	43.075	39.360	0.009	1.4706	0.1149	1.3864
110.0	12	43.156	40.297	0.004	1.4981	0.0807	1.4053
120.0	13	43.198	40.963	0.002	1.5173	0.0565	1.4194
130.0	14	43.222	41.462	0.001	1.5302	0.0448	1.4292
140.0	15	43.236	41.860	0.001	1.5395	0.0359	1.4362
150.0	16	43.245	42.168	0.001	1.5462	0.0273	1.4414
160.0	17	43.250	42.396	0.000	1.5510	0.0198	1.4454
170.0	18	43.253	42.562	0.000	1.5546	0.0144	1.4485
180.0	19	43.254	42.682	0.000	1.5573	0.0104	1.4485
190.0	20	43.256	42.769	0.000	1.5595	0.0076	1.4509
200.0	21	43.256	42.833	0.000	1.5613	0.0055	1.4529
210.0	22	43.257	42.878	0.000	1.5628	0.0040	1.4545
220.0	23	43.257	42.912	0.000	1.5640	0.0029	1.4558
230.0	24	43.257	42.936	0.000	1.5650	0.0021	1.4569
240.0	25	43.257	42.954	0.000	1.5659	0.0015	1.4578
250.0	26	43.257	42.966	0.000	1.5666	0.0011	1.4586

Tableau n° 9

a = 2,5 m

 $\Delta t = 10$ s

0.0	1	6.000	6.000	0.836	0.0000	1.1395	1.0000
7.5	2	14.388	6.926	0.796	0.2199	1.1120	1.0190
15.0	3	22.015	9.496	0.692	0.4302	1.0377	1.0190
22.5	4	28.314	13.202	0.543	0.6335	0.9197	0.9557
30.0	5	33.078	17.400	0.396	0.8110	0.7864	0.9369
37.5	6	36.489	21.550	0.278	0.9547	0.6591	0.9281
45.0	7	38.845	25.329	0.187	1.0721	0.5406	0.9036
52.5	8	40.412	28.599	0.123	1.1757	0.4396	0.8835
60.0	9	41.428	31.352	0.080	1.2585	0.3533	0.8567
67.5	10	42.079	33.606	0.051	1.3210	0.2819	0.8398
75.0	11	42.494	35.425	0.032	1.3717	0.2242	0.8293
82.5	12	42.766	36.910	0.021	1.4081	0.1824	0.8197
90.0	13	42.950	38.139	0.015	1.4365	0.1524	0.8114
97.5	14	43.072	39.146	0.010	1.4633	0.1227	0.8043
105.0	15	43.148	39.937	0.006	1.4872	0.0937	0.8043
112.5	16	43.193	40.543	0.003	1.5056	0.0717	0.7990
120.0	17	43.220	41.011	0.002	1.5188	0.0549	0.7953
127.5	18	43.238	41.388	0.001	1.5286	0.0465	0.7925
135.0	19	43.250	41.707	0.001	1.5363	0.0394	0.7902
142.5	20	43.259	41.978	0.001	1.5423	0.0333	0.7883
150.0	21	43.265	42.198	0.001	1.5470	0.0263	0.7867
157.5	22	43.268	42.371	0.000	1.5506	0.0207	0.7854
165.0	23	43.271	42.507	0.000	1.5534	0.0162	0.7844
172.5	24	43.273	42.613	0.000	1.5558	0.0127	0.7836
180.0	25	43.274	42.697	0.000	1.5577	0.0100	0.7836
187.5	26	43.275	42.762	0.000	1.5593	0.0078	0.7829
195.0	27	43.275	42.813	0.000	1.5607	0.0061	0.7829
202.5	28	43.276	42.854	0.000	1.5619	0.0048	0.7817
210.0	29	43.276	42.885	0.000	1.5630	0.0038	0.7813

a = 2,5 m

 $\Delta t = 7,5$ s

On peut donc établir une relation entre les bons résultats obtenus sur β et la grandeur $C1. \Delta t$:

- très bons résultats sur β en tableau 1 ($C1. \Delta t$ petit) ;
- très mauvais résultats sur β en tableau 9 ($C1. \Delta t$ grand).

Mais la célérité $C1$ au point de départ n'est pas seule en cause, l'erreur commise sur β sera d'autant plus grande dans une itération, que le produit $C. \Delta t$ est grand, où " C " est la célérité au point calculé à l'itération donnée (maille/seconde). On comprend alors que si la célérité est importante pour un certain nombre de points de l'orthogonale, on commettra une grosse erreur sur β (voir tableau 10).

Après avoir considéré l'importance de la grandeur $C1. \Delta t$, considérons la grandeur $\Delta \alpha_i$, variation de l'angle α entre les itérations $i, i + 1$.

Dans le cas présent, la plus forte variation correspond au passage du premier point de l'orthogonale au deuxième, soit $\Delta \alpha_1$. Relevons $\Delta \alpha_1$ pour les différentes valeurs de la maille " a " et portons les dans le **tableau récapitulatif**.

Si l'on considère le rapport $R = \frac{C1. \Delta t}{\Delta \alpha_1}$, on peut se rendre compte que plus R est grand, plus l'écart entre " β calculé" et " $\beta = 1$ théorique" est grand. Nous n'irons pas au-delà de cette analyse rustique.

7.2.3. CONCLUSION PRATIQUE : CHOIX DU MAILLAGE "a" ET DU PAS PAS DE TEMPS " Δt "

- a) Pour le tracé des orthogonales, on aura intérêt à prendre " a " le plus petit possible ; " Δt " a peu d'influence.
- b) Pour le calcul du coefficient de réfraction, la maille " a " devra être du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de la houle non réfractée ; " Δt " pourra être de l'ordre de grandeur de la période.

* * *

t	x	y	D	α	C	β	$\frac{H}{H_0}$
0.0	1	5.000	4.600	0.904	0.0000	1.1841	1.0000
5.0	1	10.857	5.078	0.878	0.1627	1.1672	1.0000
10.0	1	16.429	6.426	0.818	0.3122	1.1271	0.9001
15.0	1	21.520	8.462	0.734	0.4486	1.0682	0.6871
20.0	1	25.997	10.994	0.632	0.5807	0.9920	0.4760
25.0	1	29.763	13.825	0.517	0.7088	0.8982	0.2860
30.0	1	32.822	16.768	0.416	0.8232	0.8057	0.1164
35.0	1	35.259	19.674	0.329	0.9228	0.7170	-0.0398
40.0	1	37.165	22.438	0.256	1.0113	0.6321	-0.1788
45.0	1	38.631	24.989	0.193	1.0871	0.5503	-0.3021
50.0	1	39.748	27.301	0.149	1.1544	0.4822	-0.4120
55.0	1	40.586	29.361	0.109	1.2151	0.4133	-0.5041
60.0	1	41.208	31.176	0.082	1.2661	0.3585	-0.5859
65.0	1	41.672	32.769	0.061	1.3088	0.3091	-0.6543
70.0	1	42.014	34.152	0.045	1.3468	0.2645	-0.7149
75.0	1	42.266	35.345	0.033	1.3786	0.2270	-0.7669
80.0	1	42.454	36.379	0.024	1.4040	0.1952	-0.8111
85.0	1	42.597	37.286	0.019	1.4240	0.1734	-0.8489
90.0	1	42.709	38.092	0.015	1.4415	0.1537	-0.8812
95.0	1	42.796	38.802	0.011	1.4587	0.1337	-0.9099
100.0	1	42.859	39.410	0.008	1.4754	0.1130	-0.9354
105.0	1	42.904	39.922	0.006	1.4905	0.0943	-0.9574
110.0	1	42.936	40.349	0.004	1.5031	0.0788	-0.9761
115.0	1	42.958	40.707	0.003	1.5131	0.0658	-0.9917
120.0	1	42.974	41.007	0.002	1.5211	0.0550	-1.0048
125.0	1	42.986	41.266	0.002	1.5276	0.0492	-1.0160

Tableau n° 10

$$a = 2,5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 5 \text{ s}$$

0.0	1	5.000	4.600	0.904	0.0000	1.1841	1.0000
2.0	1	7.363	4.679	0.899	0.0670	1.1806	1.0000
4.0	1	9.705	4.914	0.886	0.1329	1.1724	0.9840
6.0	1	12.006	5.296	0.868	0.1962	1.1607	0.9483
8.0	1	14.253	5.814	0.845	0.2565	1.1454	0.8919
10.0	1	16.433	6.453	0.817	0.3141	1.1263	0.8227
12.0	1	18.534	7.200	0.785	0.3694	1.1043	0.7523
14.0	1	20.549	8.044	0.751	0.4230	1.0804	0.6816
16.0	1	22.471	8.970	0.714	0.4758	1.0535	0.6097
18.0	1	24.291	9.970	0.673	0.5285	1.0236	0.5412
20.0	1	26.003	11.031	0.631	0.5814	0.9908	0.4760
22.0	1	27.600	12.142	0.586	0.6343	0.9551	0.4142
24.0	1	29.077	13.290	0.539	0.6867	0.9167	0.3556
26.0	1	30.436	14.461	0.494	0.7362	0.8779	0.3002
28.0	1	31.682	15.644	0.454	0.7820	0.8412	0.2470
30.0	1	32.824	16.827	0.414	0.8251	0.8039	0.1951
32.0	1	33.866	18.003	0.378	0.8655	0.7682	0.1455
34.0	1	34.816	19.164	0.344	0.9041	0.7330	0.0979
36.0	1	35.679	20.304	0.311	0.9416	0.6973	0.0525
38.0	1	36.460	21.417	0.281	0.9770	0.6631	0.0093
40.0	1	37.164	22.500	0.254	1.0107	0.6302	-0.0318
42.0	1	37.799	23.549	0.228	1.0436	0.5966	-0.0709
44.0	1	38.366	24.560	0.203	1.0746	0.5639	-0.1080
46.0	1	38.876	25.533	0.183	1.1027	0.5348	-0.1431
48.0	1	39.333	26.469	0.165	1.1290	0.5077	-0.1762
50.0	1	39.744	27.366	0.147	1.1547	0.4802	-0.2076
52.0	1	40.109	28.223	0.131	1.1804	0.4524	-0.2374
54.0	1	40.432	29.038	0.115	1.2056	0.4246	-0.2657
56.0	1	40.717	29.808	0.101	1.2288	0.3977	-0.2925
58.0	1	40.969	30.539	0.090	1.2491	0.3763	-0.3176

$$a = 2,5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 2 \text{ s}$$

TABLEAU RECAPITULATIF

	a = 10 m				a = 5 m			a = 2,5 m			
	1	5	10	15	2,5	5	10	1	2,5	7,5	10
Δt (s)											
C1. Δt (mailles)	0,23	1,16	2,32	3,47	1,39	2,77	5,55	1,14	2,85	8,55	11,4
$\Delta \alpha_1$ (radian)	0,0315	0,1569	0,3080	0,4469	0,0737	0,1469	0,2896	0,0300	0,0749	0,2199	0,2888
écart de β sup et inf (%) sur 60 s de calcul	+ 0,5 - 0,1	+ 0,8 - 0,1	+ 1,3 - 0,0	+ 1,7 - 0,0	+ 4,5 - 2,7	+ 1,2 - 3,6	+ 0,0 - 5,5	+ 3,5 - 2,0	+ 6,3 - 2,0	+ 0,0 - 16,0	+ 28,0 - 0,0
R (maille/rad)	7,3	7,4	7,5	7,8	18,9	18,9	19,2	38,0	38,0	38,9	39,5
Caractéristiques de la houle au point de départ	Célérité : 2,32 m/s Longueur d'onde 23 m				Célérité : 2,77 m/s Longueur d'onde 28 m			Célérité : 2,85 m/s Longueur d'onde 28 m			

8. EXEMPLE D'APPLICATION :

ETUDE DE LA REFRACTION DE LA HOULE DANS LE GOLFE D'AJACCIO

* * *

Le programme de réfraction a étudié la réfraction d'une
houle :

- * de période $T = 8$ s ;
- * de direction Sud - Sud-Ouest, entrant dans le golfe d'Ajaccio.

La saisie des courbes bathymétriques disponibles sur cartes marines a été menée par digitalisation. le résultat de cette opération est accessible par tracé graphique (fig.24). Il a été décidé, par la suite, d'introduire des courbes intermédiaires supplémentaires.

Après extraction d'une fenêtre, le programme de calcul des orthogonales terminé, une sortie graphique permet de visualiser la déformation des orthogonales, parallèles entre elles au départ (les points de départ des orthogonales se trouvent entre les cotes 75-100 m -fig.25-).

Le programme de tracé des orthogonales permet :

- * de visualiser les points de calculs :
 - + = la théorie d'Airy est valable en ce point ;
 - = la théorie d'Airy n'est plus valable en ce point (en option) (d'après le critère de Le Méhauté) ;

il faut, pour cela, introduire le creux significatif de la houle (fig. 26) ;

- * de tracer les orthogonales sans matérialiser les points de calcul (fig. 27 - 28).

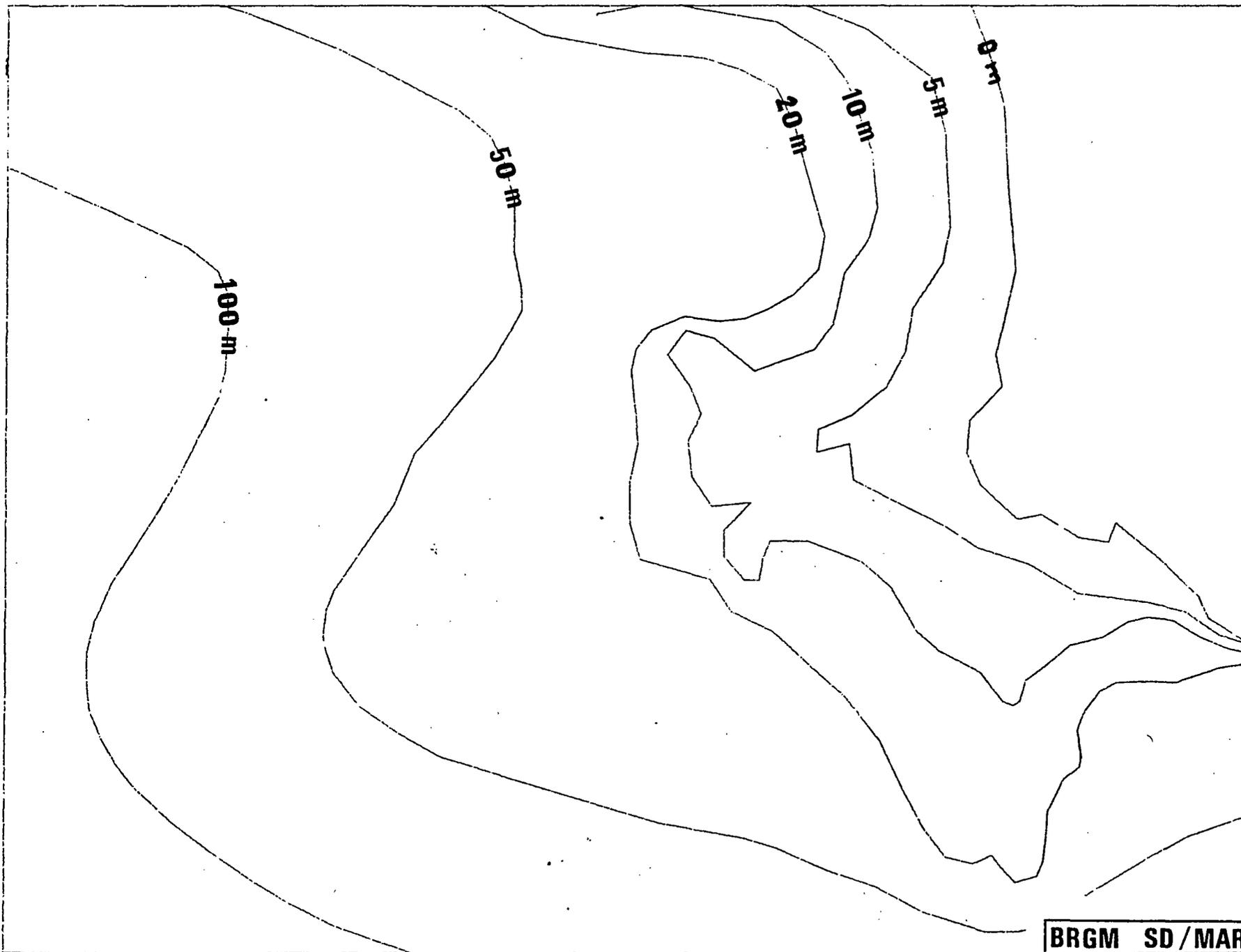
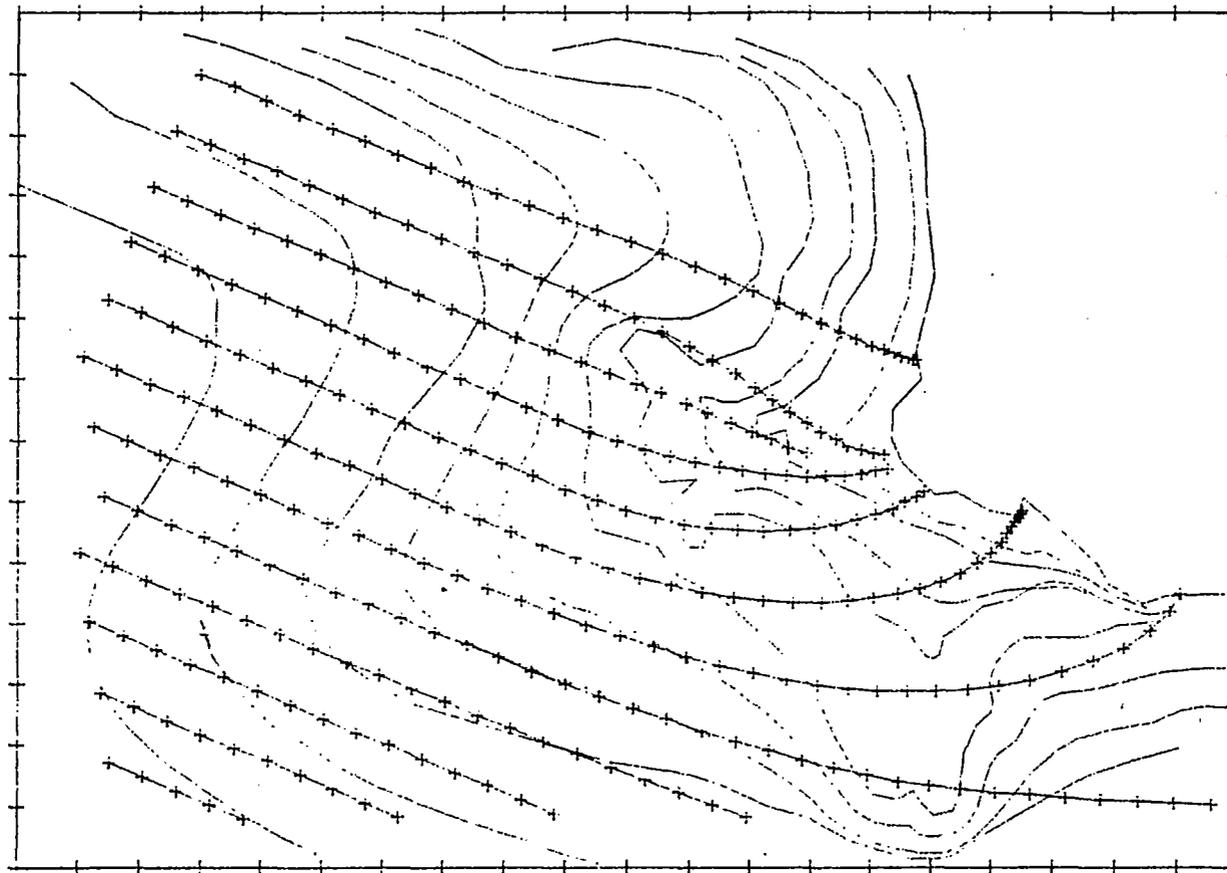


FIG. 24 - Courbes bathymétriques dans le golfe d'Ajaccio

FIG. 25 - REFRACTION DE LA HOULE DANS LE GOLFE D'ANGASSIO
PLAN : "APPROCHE"

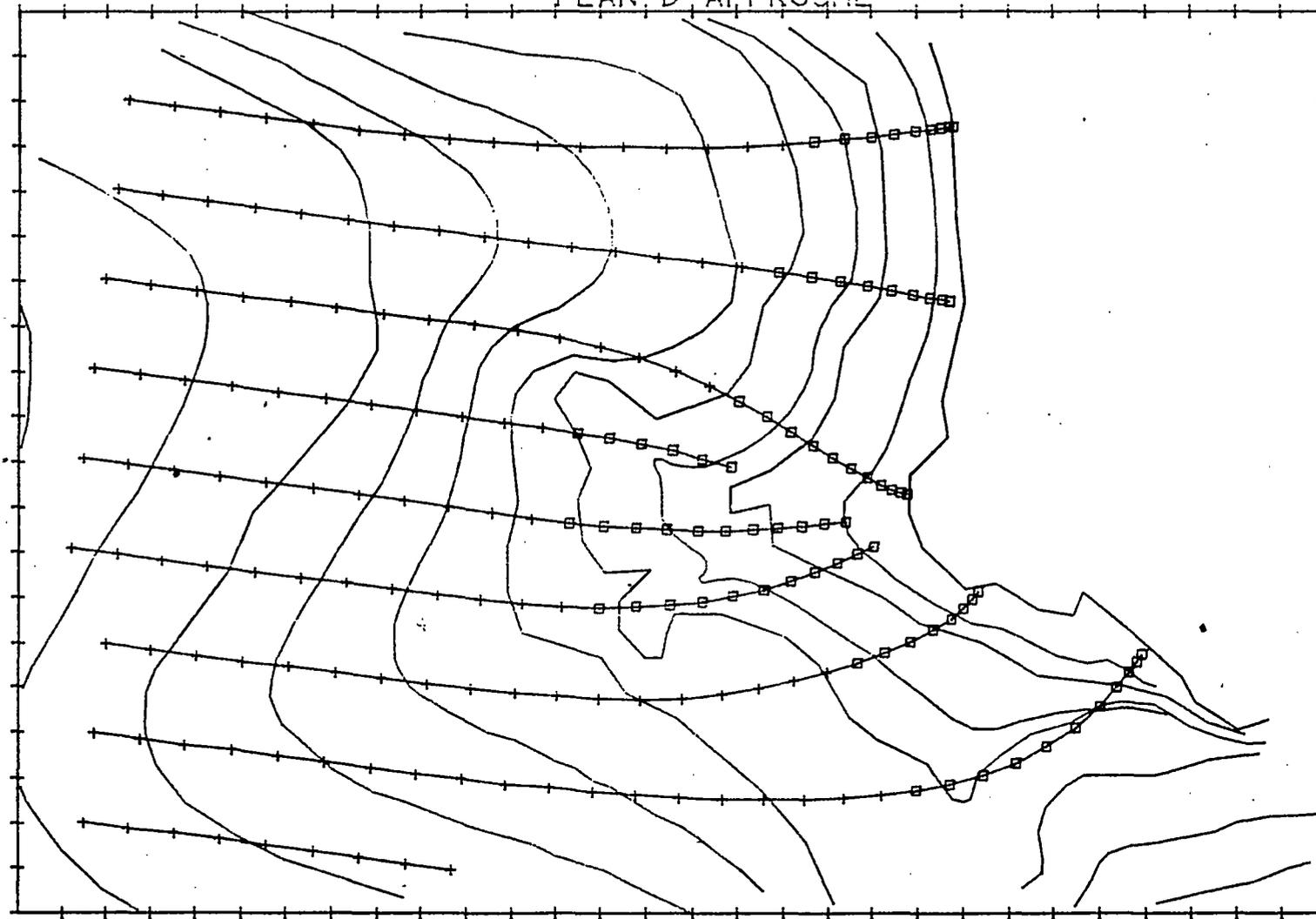


CARACTERISTIQUES DE LA HOULE : DIRECTION : SUD-SUD-OUEST
PERIODE : 8 s
COTE DU PLAN D'EAU : 0.00m

ECHELLE : maille = 85 m

BRGM SD/MAR

Fig. 26 - REFRACTION DE LA HOULE DANS LE GOLFE D'AJACCIO
PLAN D'APPROCHE



CARACTERISTIQUES DE LA HOULE : DIRECTION : SUD-SUD-OUEST
PERIODE : 8s
COTE DU PLAN D'EAU : 0.00m

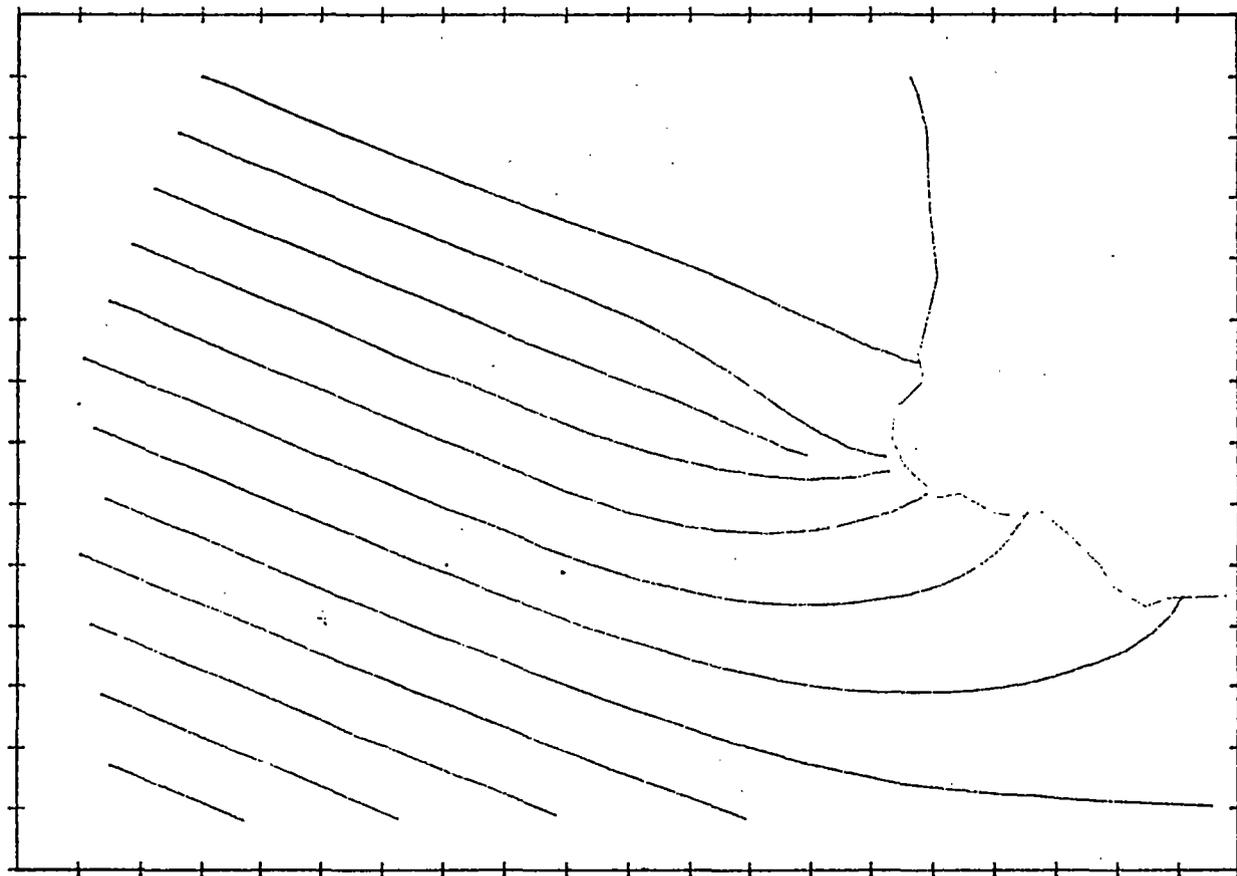
ECHELLE : maille = 50 m

$H_0 = 0.5$ m

BRGM SD/MAR

Fig. 27 -

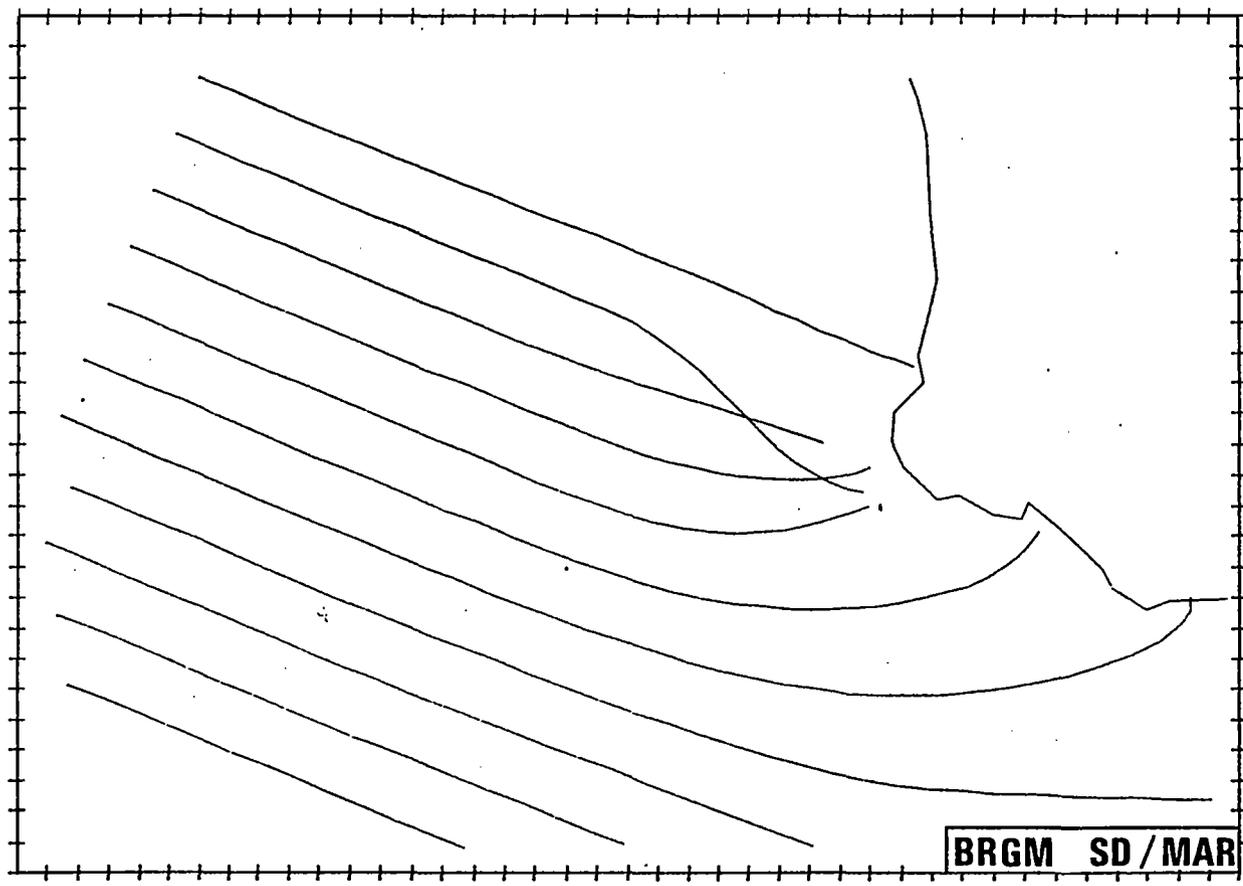
REPRESENTATION DES CARACTERISTIQUES DE LA HOULE
PLAN D'APPROCHE



$\alpha=85.m$

CARACTERISTIQUES DE LA HOULE : DIRECTION : SUD-SUD-OUEST
PERIODE : 8 s
COTE DU PLAN D'EAU : 0.00m

BRGM SD/MAR



$a=43.m$
 $dt=4.s$
 $L_0=100.m$
 $T=8.s$

Fig. 28 - Représentation des orthogonales (golfe d'Ajaccio) - Plan d'approche

Le programme de calcul des orthogonales a été exécuté pour deux longueurs de maille :

$$a = 85 \text{ m et } a = 43 \text{ m.}$$

Comme nous le savons, la longueur de maille "a" a une grande importance sur la forme des orthogonales. Les sorties graphiques permettent de s'en rendre compte (fig. 27-28).

Remarque - Sur la fig. 28, on peut voir les orthogonales se recouper. Cela n'est physiquement pas acceptable. La zone où elles se recoupent présente des courbes bathymétriques "arrondies". Dans cette zone, le phénomène de **diffraction** doit apparaître et, dans la mesure où le programme n'a pas tenu compte de ce phénomène, les valeurs obtenues ne sont certainement pas significatives. A remarquer (fig. 26) que le calcul n'est plus valable en théorie linéaire dans cette zone.

A la fin de l'exécution du programme de calcul des orthogonales, toutes les caractéristiques :

- orientation α ;
- coefficient β ;
- coefficient de réfraction $\frac{H}{H_0}$;

sont connues en tous les points des orthogonales et disponibles en fichier pour des traitements ultérieurs éventuels.

La connaissance de l'angle α et de H/H_0 aux points de déferlement permet, notamment, d'évaluer le transport solide littoral tout le long de la côte étudiée (selon les formules du type Chatou (réf.2), CERC (ref. 3).

* *
* *

9. CONCLUSION

* *
*

La théorie linéaire de la houle permet de modéliser une houle réelle avec une mise en oeuvre numérique relativement simple.

Le modèle permet d'obtenir des résultats qualitatifs et quantitatifs des caractéristiques d'une houle réelle réfractée par les fonds littoraux.

L'intérêt de disposer d'un modèle de calcul de houle en zone littoral n'est plus à démontrer : les résultats numériques obtenus permettent d'évaluer le transport solide auquel est soumise une côte, de dimensionner les enrochements d'une jetée,...

Les limites d'application d'un programme numérique mis au point sont, certes, importantes ; elles sont imposées, d'une part par la nature même de la théorie linéaire (faible cambrure de la houle), d'autre part par le choix qui a été fait de ne considérer que le phénomène de réfraction. Aussi, ne faut-il pas le voir comme un programme pouvant traiter n'importe quelle houle se propageant sur un fond quelconque, mais comme un bon outil, d'autant plus efficace dans le cas de côtes relativement régulières et de fonds à pentes homogènes.

* *
*

L I S T E D E R E F E R E N C E S

1. **A.S.T.E.O.** (janv. 1983) - Journées d'information "érosion et défense des côtes".
2. **BERKHOFF J.C.W.** (1976) - Mathematical models for simple harmonic linear water waves. Wave diffraction and refraction. Waterloopkundig laboratorium, Delft hydraulic laboratory, publication n. 163.
3. **C.E.R.C.** (U.S. Army coastal engineering research center), 1973 - Shore protection manual, vol. I.
4. **GRAILLOT A.** - Travaux maritimes, tome 1, cours de l'E.N.T.P.E.
5. **GRUAT J.** - Cours d'hydrodynamique maritime de l'E.N.S.E.E.I.H. de Toulouse.
6. **LEPETIT J.P.** (1967) - Analogie entre les ondes de gravité et les ondes ultra-sons.
Bull. de la Direction des études et recherches, série A, supplément N. 4, 1967.
7. **LECLERC J.P., BELLESSERT B., MIGNIOT C.** (1976) - Action de la houle sur les sédiments.
Publication du C.N.E.X.O.
8. **NAKAMURA M., SHIRAIKI H., SASAKI Y.** (1966) - Wave decaying due to breaking. Proceedings of tenth conference of coastal engineering, vol. 1, sept. 1966.
9. **QUÉLENNEC R.E., MANOHAR M.** (1976) - Numerical wave refraction and computer estimation of littoral drift : application to Nile delta coast.
Proceedings of seminar on Nile delta shore processes, Alexandria, oct. 1976, published by "the UNDP/UNESCO project of coastal protection studies under the Academy of scientific research and technology, Alexandria, Egypt, sept. 1977.
10. **QUÉLENNEC R.E.** (1984) - Eléments de dynamique sédimentaire littorale. Géomorphologie et hydrodynamique sédimentaire".
UNESCO-ONU (DIESA) - PNUE, rapport B.R.G.M. 84 SGN 272 EAU.
11. **Séminaire national de PROPRIANO (Corse du Sud)** - (mai 1981) - "La gestion régionale des sédiments".
Bull. BRGM, section 3, n. 1, 1982.
12. **S.H.F.** (Sté hydrotechnique de France) - (1984) - Problèmes côtiers posés par le mouvement des sédiments et la pollution. Question II - Mécanismes d'évolution du littoral.
18èmes journées de l'hydraulique, Marseille, sept. 1984.
13. **SMITH B.S.L., CAMFIELD F.E.** (1972) - A refraction study and program for periodic waves approaching a shoreline, and extending beyond the breaking point.
College of Delaware, Technical report, n. 16.

A N N E X E A

ACQUISITION DES DONNEES BATHYMETRIQUES

ET

DETERMINATION DES PROFONDEURS

AUX NOEUDS D'UN MAILLAGE

* *
* *

A.1. ACQUISITION DES DONNEES BATHYMETRIQUES

* *
*

Les profondeurs marines sont souvent disponibles sous deux formes :

- * nuages de points, avec leur profondeur ; résultats bruts d'écho-sondages ;
- * courbes bathymétriques, iso-profondeur ; résultats d'un lissage des points antérieurs.

Nous utiliserons les cartes marines avec courbes bathymétriques.

A.1.1. La digitalisation (appelée aussi numérisation)

a) Principe

Elle est effectuée par une table à digitaliser (fig. Aa) qui à tout point saisi fait correspondre des coordonnées machines (fig Ab) stockées dans un fichier.

Cette méthode permet donc de disposer des points définissant une courbe bathymétrique dans un **déla**i **relativement bref** et **sans aucun** calcul de la part du manipulateur.

b) Mise en oeuvre

Pour une plus grande souplesse d'emploi des données saisies, il est nécessaire, au début de la digitalisation d'une courbe, de faire référence à un point particulier (point-repère), à un système d'axe et à un facteur d'échelle.

En effet, s'il fallait introduire une courbe supplémentaire dans le fichier bathymétrique, il serait fastidieux de ressaisir l'ensemble des courbes.

Aussi, si l'on veut disposer d'une bathymétrie plus fine dans certaines zones d'intérêt, sera-t-il intéressant de digitaliser les courbes sur des plans à grande échelle, alors que d'autres zones, plus étendues et moins riches en informations bathymétriques, seront saisies à une plus petite échelle.

Le repérage utilisé (fig. Aa)

- * un point d'origine de repère : PR ; il doit être visible sur tous les plans que l'on se propose de digitaliser ;
- * la direction sud-nord, donnée par deux points S et N quelconques.

On dispose alors d'un repère orthogonal, d'origine PR et vecteurs \vec{SN} , \vec{EO} .

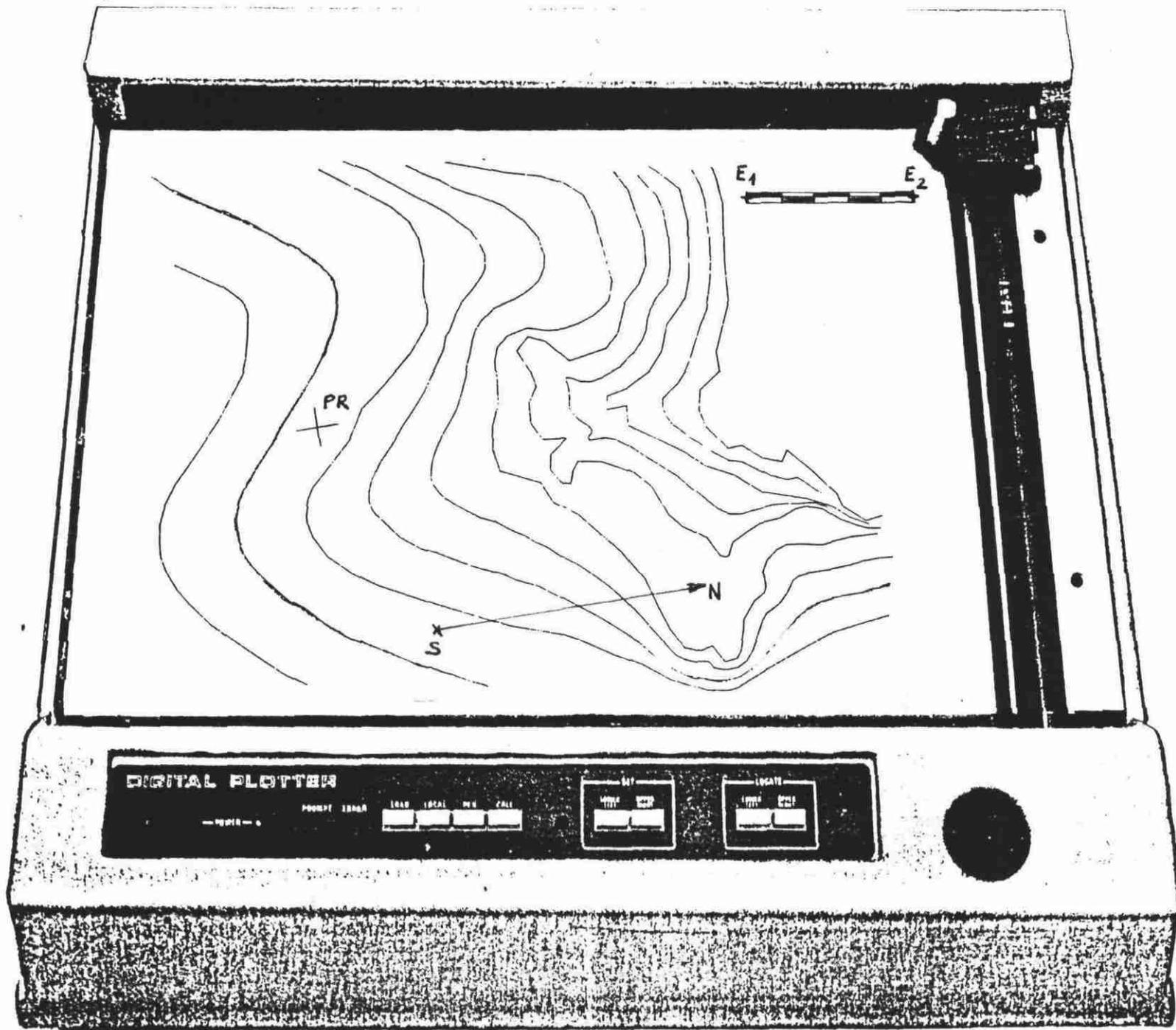


fig. Aa

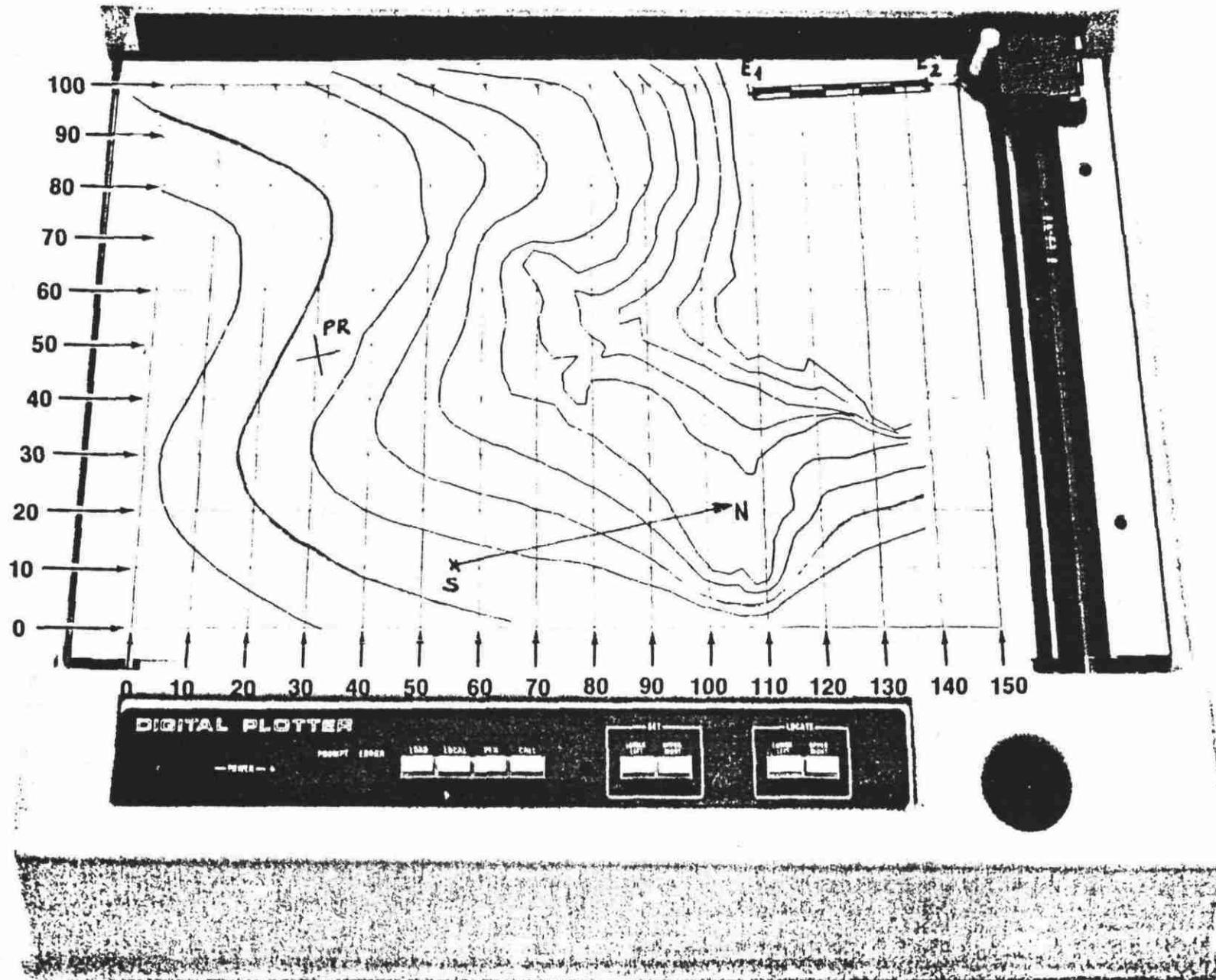


Fig. Ab

L'échelle (fig. Aa)

Elle est définie par :

- * une distance sur le plan, matérialisée par deux points E1 et E2 quelconques ;
- * une longueur réelle (mètres) rentrée au clavier par l'utilisateur.

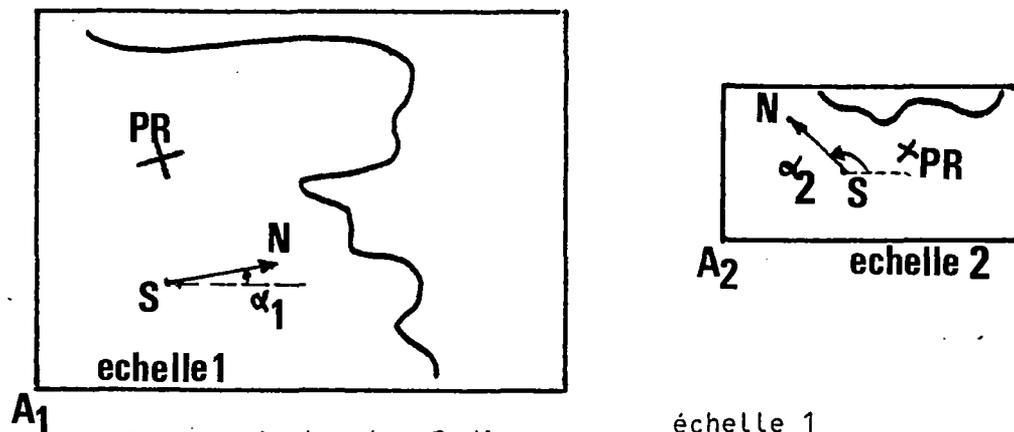
A.1.2. Traitement du fichier bathymétriques

Le fichier bathymétrique contient autant de séquences :

/ repérage ⁽ⁱ⁾ / échelle ⁽ⁱ⁾ / coordonnées des points de la courbe ⁽ⁱ⁾ ... /
que de courbes digitalisées.

Un tel fichier n'est pas homogène. Si le repérage se fait par rapport au même repère physique, les coordonnées machines peuvent ne pas être les mêmes (rotation, translation, homothétie).

On procède alors à une superposition de toutes les courbes, comme on procéderait à la superposition de plans sur papier calque d'échelles différentes (photocopie réduction/agrandissement).

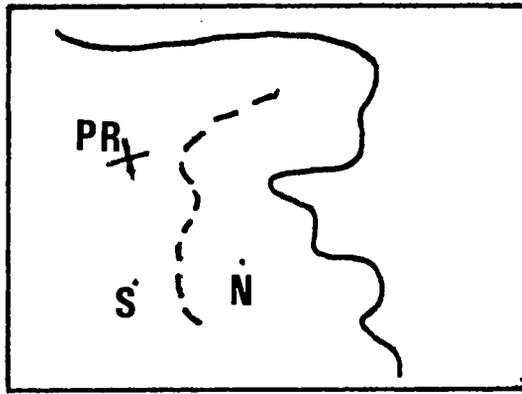


On grossit le plan 2 d'un rapport $\frac{\text{échelle 1}}{\text{échelle 2}}$

On fait une rotation autour de A2 d'un angle $\alpha_1 - \alpha_2$

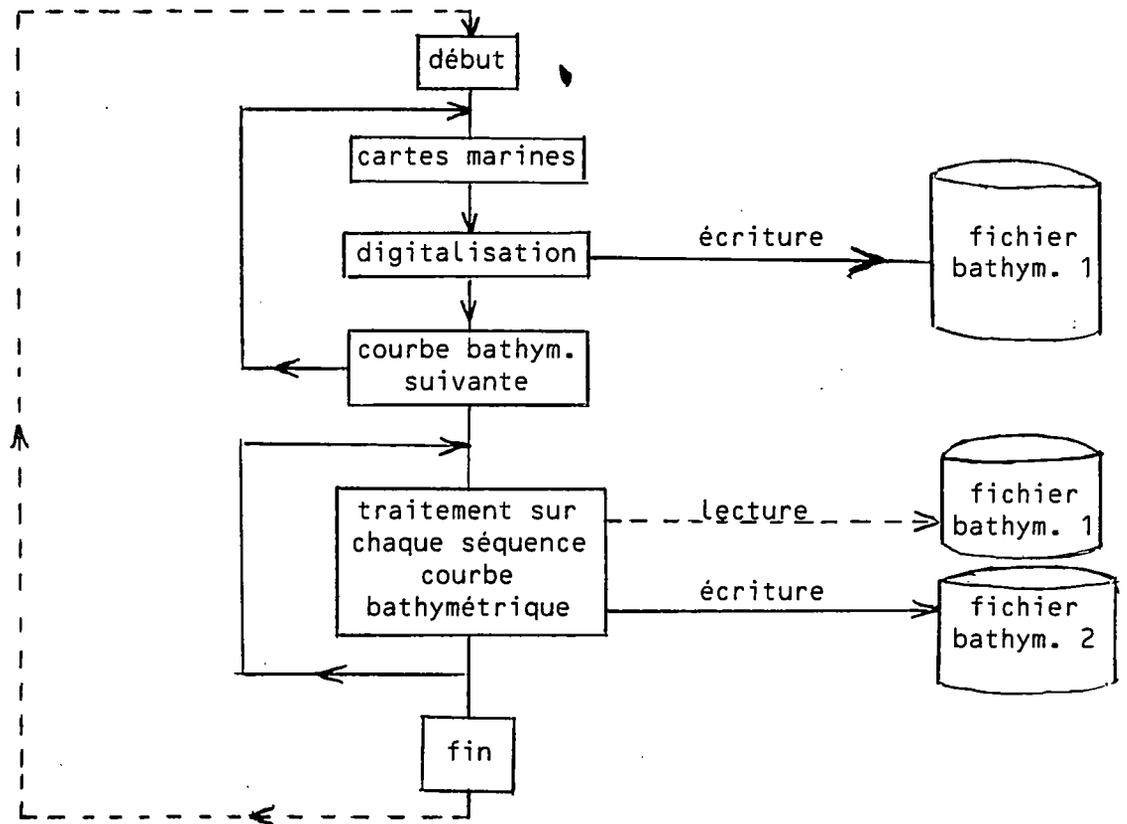
On fait, enfin, une translation afin de superposer les deux points PR.

On obtient alors :



Conclusion : en fin de traitement du fichier bathymétrique, tout se passe comme si on avait enrichi une carte de détails relevés sur d'autres cartes.

A.1.3. Chaîne d'acquisition des données bathymétriques



A.2. DETERMINATION DES PROFONDEURS AUX NOEUDS D'UN MAILLAGE

* *

A.2.1. Extraction du domaine soumis à l'étude de la réfraction

A la fin de l'acquisition-traitement exposés ci-dessus, les courbes bathymétriques sont disponibles sur un certain domaine.

Ce domaine peut représenter la côte sur une grande étendue. Aussi, si l'utilisateur se propose d'étudier un morceau de cette côte, aura-t-il intérêt à faire un "gros plan" sur la zone du littoral désirée.

L'avantage d'un tel procédé est d'ignorer toute partie du domaine digitalisé qui n'influence pas le résultat sur le petit domaine extrait.

Méthode d'extraction (fig. Ac)

L'utilisateur définit une "fenêtre" en introduisant :

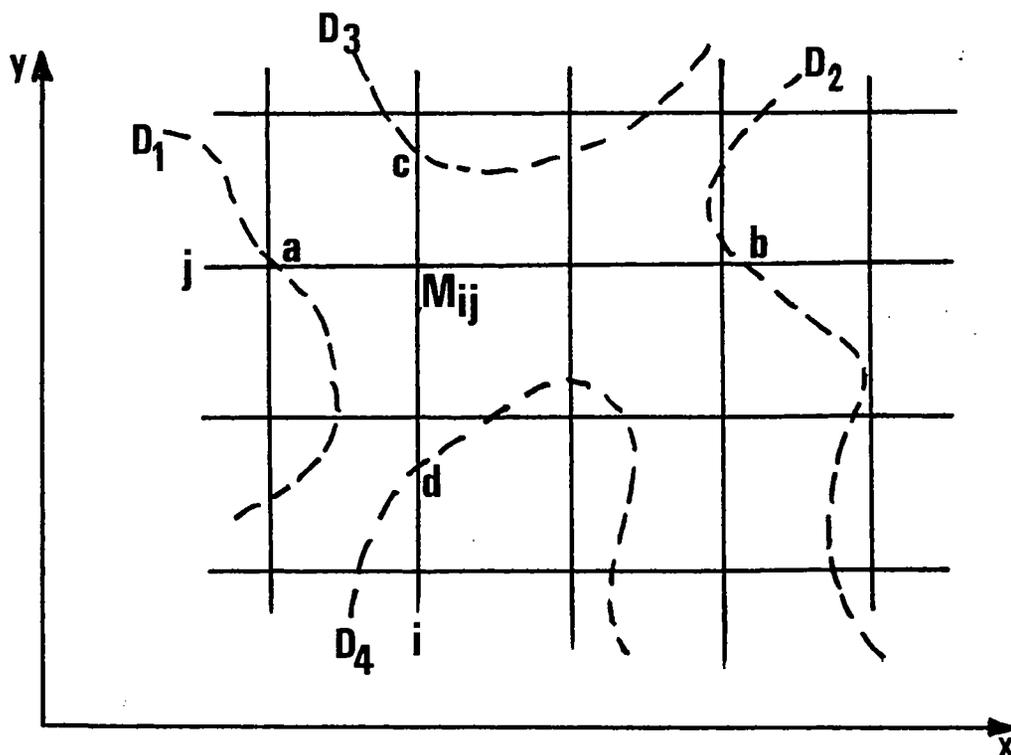
* les coordonnées de l'origine de la fenêtre, OF, dans le repère (PR, Sud-Nord, Est-Ouest), en mètres ;

* l'angle αF ;

* la longueur de la fenêtre suivant OF, X et suivant OF, Y, en mètres.

Le domaine d'étude est alors parfaitement défini ; l'utilisateur peut à présent coller un maillage sur la fenêtre, en imposant M ou N. Toutes les coordonnées sont alors exprimées en unité de maille.

A.2.2. Principe de la méthode d'interpolation



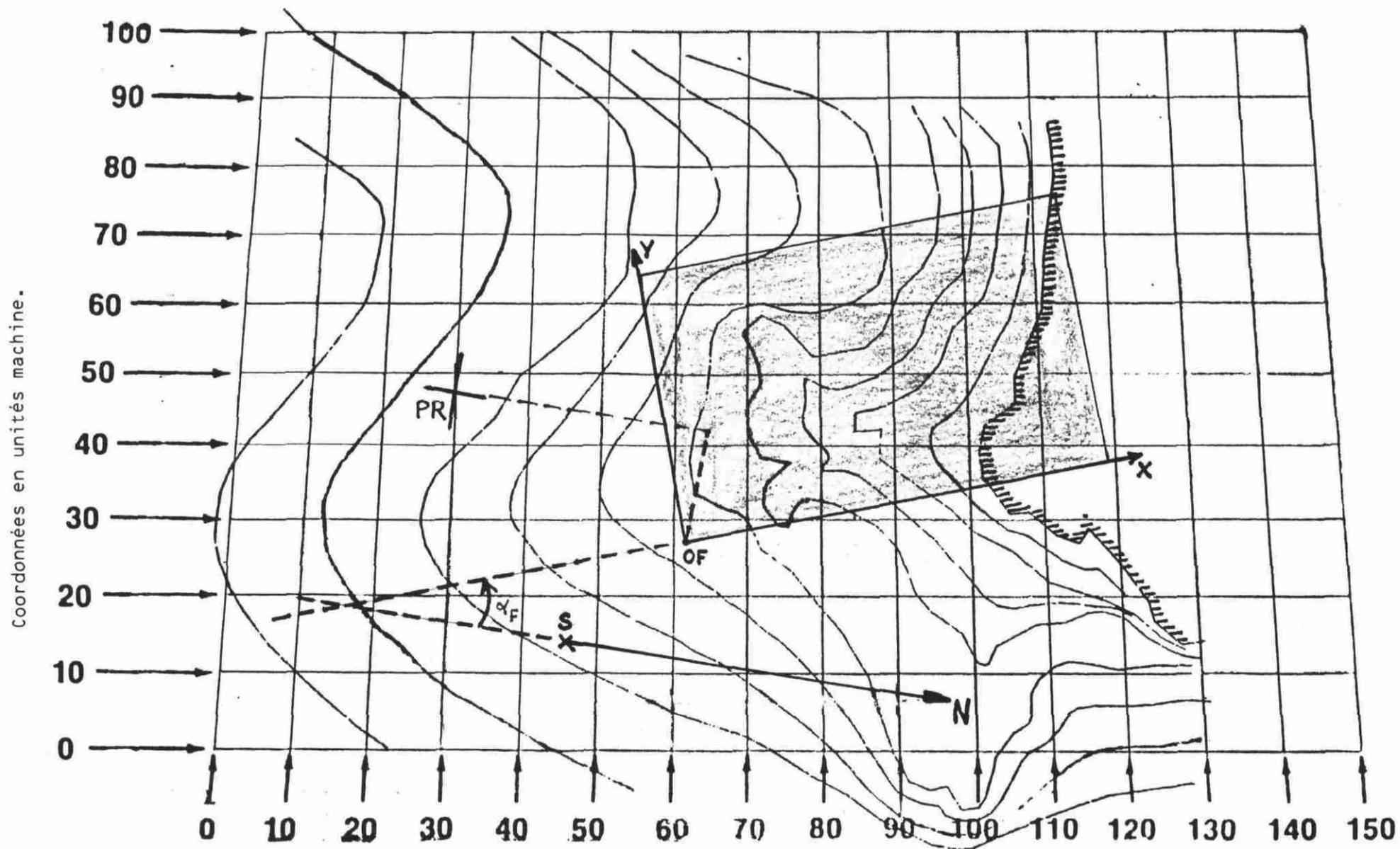


Fig. Ac - Illustration du "gros plan" sur Le domaine d'étude.

Soit M_{IJ} le noeud du maillage où l'on veut interpoler la profondeur D_{IJ} à partir des courbes bathymétriques.

La méthode consiste à déterminer :

* quelle est la courbe "à gauche" de M_{IJ} , "à droite" de M_{IJ} , "au-dessus" de M_{IJ} , "en-dessous" de M_{IJ} (respec. les points a, b, c et d sur les courbes de profondeur respect. D_1 , D_2 , D_3 et D_4) ;

* quelles sont les distances :

d (M_{IJ} , a) notée δ_a

d (M_{IJ} , b) notée δ_b

d (M_{IJ} , c) notée δ_c

d (M_{IJ} , d) notée δ_d .

Alors, l'interpolation de la profondeur au point M_{IJ} s'obtient selon l'expression :

$$D_{IJ} = \frac{\frac{1}{\delta_a} D_1 + \frac{1}{\delta_b} D_2 + \frac{1}{\delta_c} D_3 + \frac{1}{\delta_d} D_4}{\frac{1}{\delta_a} + \frac{1}{\delta_b} + \frac{1}{\delta_c} + \frac{1}{\delta_d}}$$

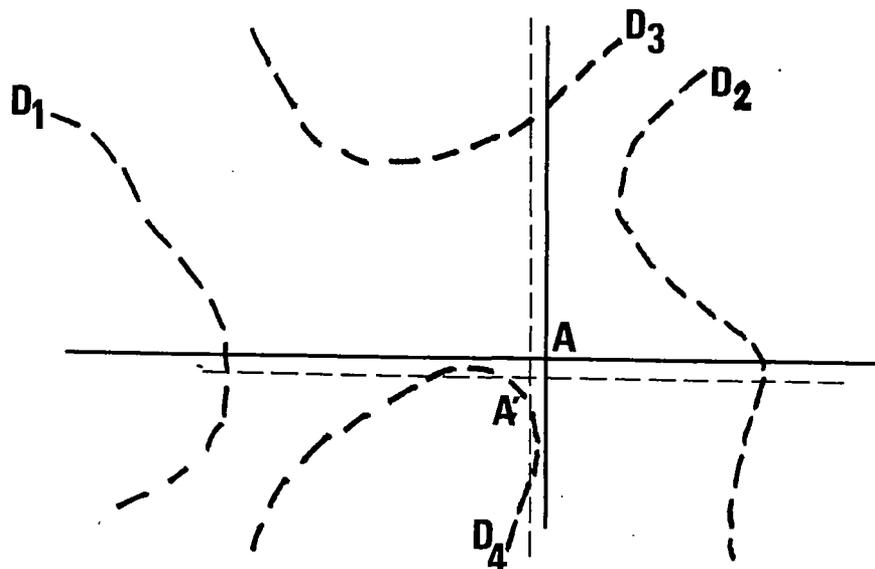
Si le point i n'existe pas, on prendra : $\frac{1}{\delta_i} = 0$

Si le point i est tel que $\delta_i \approx 0$, on prendra $D_{IJ} = D_i$.

Cette méthode n'est pas optimale :

* l'interpolation dépend de l'orientation du maillage, du fait des notions "à gauche", "à droite", "au-dessus" et "au-dessous" ;

* des discontinuités peuvent apparaître ; exemple :



pour le point A, la courbe D_4 est totalement ignorée. Par contre, pour le point A' , pourtant proche de A, la courbe D_4 a un très fort poids.

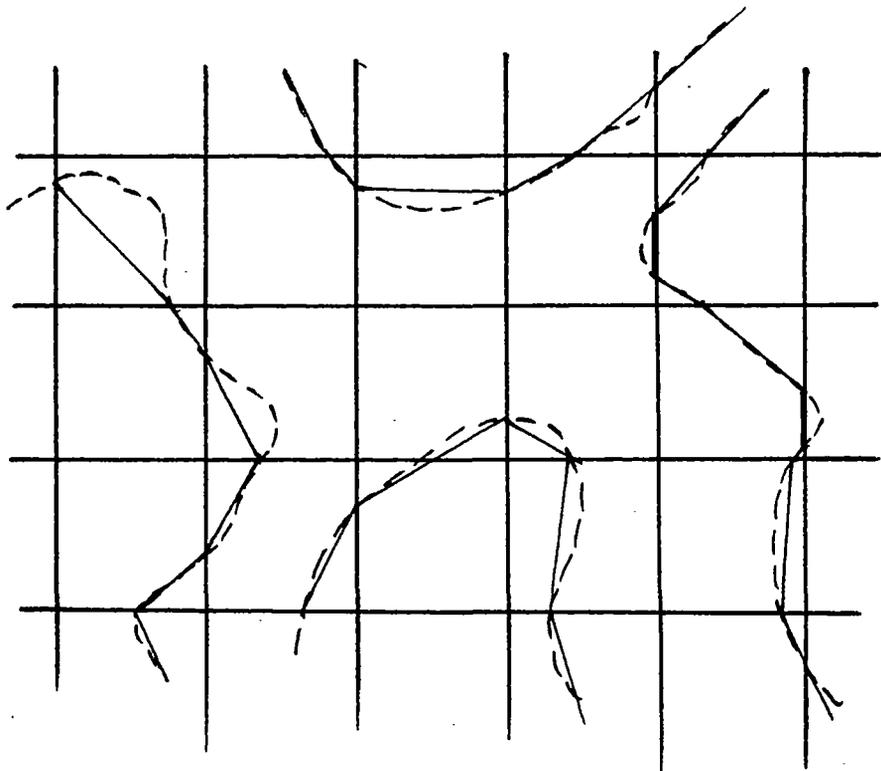
Cependant, ces défauts ne peuvent avoir qu'une importance toute minime. En effet, les courbes bathymétriques sont déjà le résultat d'un lissage de valeurs ponctuelles. Il ne faudra donc pas s'attendre à disposer des profondeurs aux noeuds d'une maille avec une très bonne précision, et ce quelle que soit la méthode d'interpolation utilisée.

A.2.3. Transformation du fichier bathymétrique

Le fichier bathymétrique considéré est celui résultant de l'extraction.

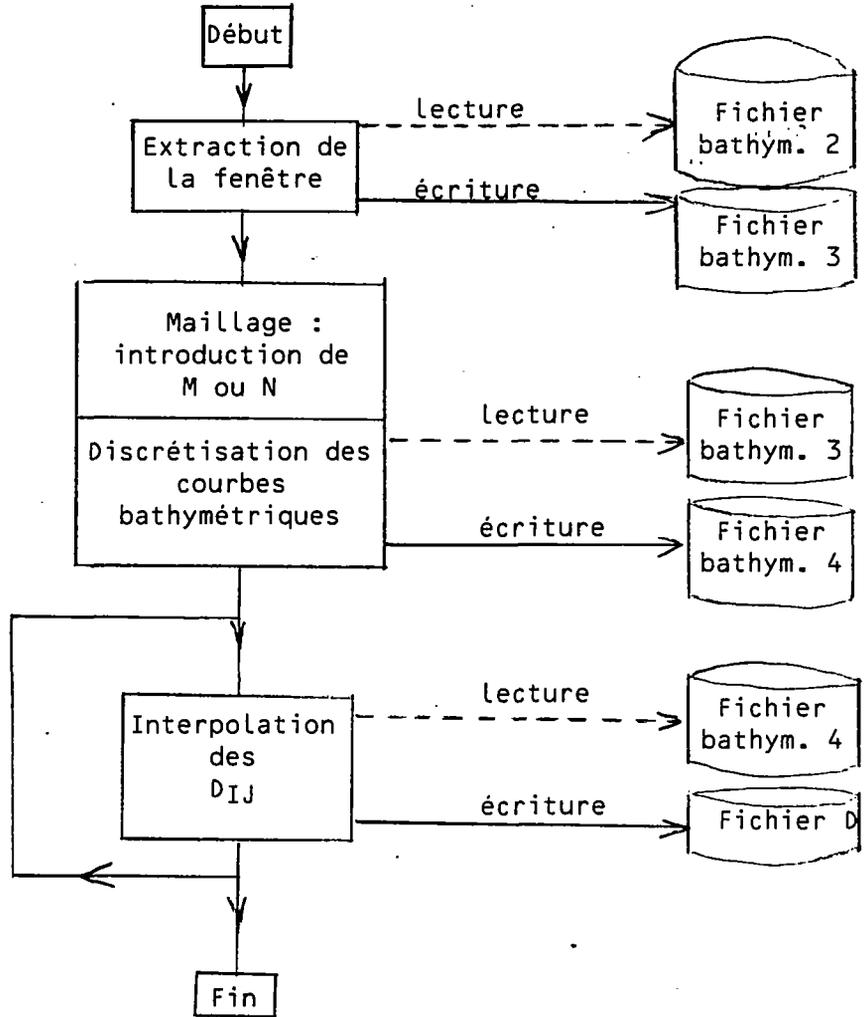
En vue de simplifier la procédure de recherche des courbes bathymétriques entrant dans l'interpolation de la profondeur en un noeud du maillage, il convient de considérer les courbes bathymétriques comme une succession de segments définis par les points d'intersection des courbes avec le maillage.

Exemple :



Une telle discrétisation des courbes engendre des modifications de tracé d'autant plus faibles que le maillage est fin.

A.2.4. Algorithme général de discrétisation des profondeurs



A N N E X E B

ETUDE DES VITESSES ORBITALES

(DANS LE CADRE DE LA THEORIE LINEAIRE)

* * *

Une particule d'eau est soumise, sous l'effet de la houle, à une vitesse appelée vitesse orbitale, de composante u et w ,

$$\vec{V} = \text{grad } \phi \quad (\text{voir 3.5})$$

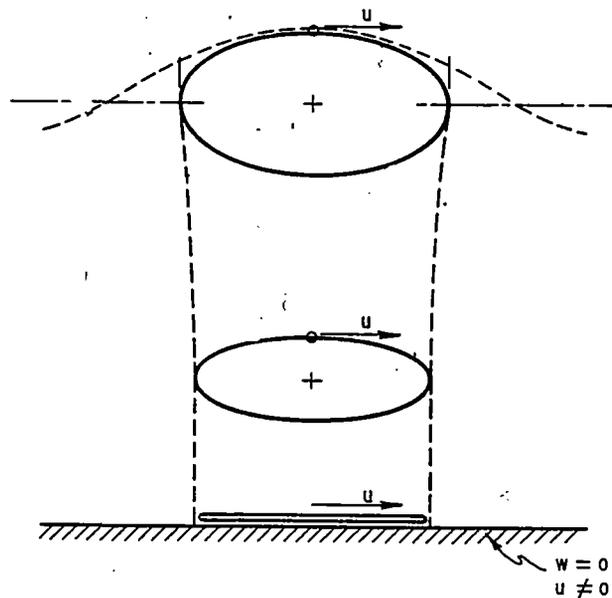
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Les composantes u et w sont maximales lorsque :

$$\frac{t}{T} - \frac{x}{L} = n \text{ entier}$$

et

$$z = -\frac{H}{2}$$



(d'après réf. 3)

Notons $|u|$, $|w|$ les modules de u et w . Ainsi :

$$|u| = \pi \frac{H}{T} \frac{\text{ch} 2\pi \frac{D + H/2}{L}}{\text{sh} 2\pi \frac{D}{L}}$$

$$|w| = \pi \frac{H}{T} \frac{\text{sh} 2\pi \frac{D + H/2}{L}}{\text{sh} 2\pi \frac{D}{L}}$$

ou encore en divisant ces expressions par le terme gT :

$$\frac{|u|}{gT} = \pi \frac{H}{gT^2} \frac{\text{ch} \left\{ 2\pi \frac{D}{L} + \pi \frac{H}{L} \right\}}{\text{sh} \left\{ 2\pi \frac{D}{L} \right\}} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{|w|}{gT} = \pi \frac{H}{gT^2} \frac{\text{sh} \left\{ 2\pi \frac{D}{L} + \pi \frac{H}{L} \right\}}{\text{sh} \left\{ 2\pi \frac{D}{L} \right\}}$$

On sait que pour tout X , $\text{ch } X \geq \text{sh } X$.

Ainsi, dans la mesure où :

$$\frac{|u|}{gT} \geq \frac{|w|}{gT}$$

suffit-il d'étudier la fonction $\frac{|u|}{gT}$ pour déterminer les ordres de grandeur de $|u|$ et $|w|$.

Considérons donc l'expression (B.1) ; on peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{|u|}{gT} = \pi \frac{H}{gT^2} \frac{\text{ch} \left\{ 2\pi \left(\frac{D}{L_0} + \pi \frac{H}{gT^2} \right) \cdot \frac{L_0}{L} \right\}}{\text{sh} \left\{ 2\pi \frac{D}{L_0} \cdot \frac{L_0}{L} \right\}}$$

L_0 , longueur d'onde en eau profonde.

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$$

$$\frac{|u|}{gT} = \pi \frac{H}{gT^2} \frac{\text{ch} \left\{ 4\pi^2 \left(\frac{D}{gT^2} + \frac{1}{2} \frac{H}{gT^2} \right) \cdot \frac{L_0}{L} \right\}}{\text{sh} \left\{ 4\pi^2 \frac{D}{gT^2} \cdot \frac{L_0}{L} \right\}}$$

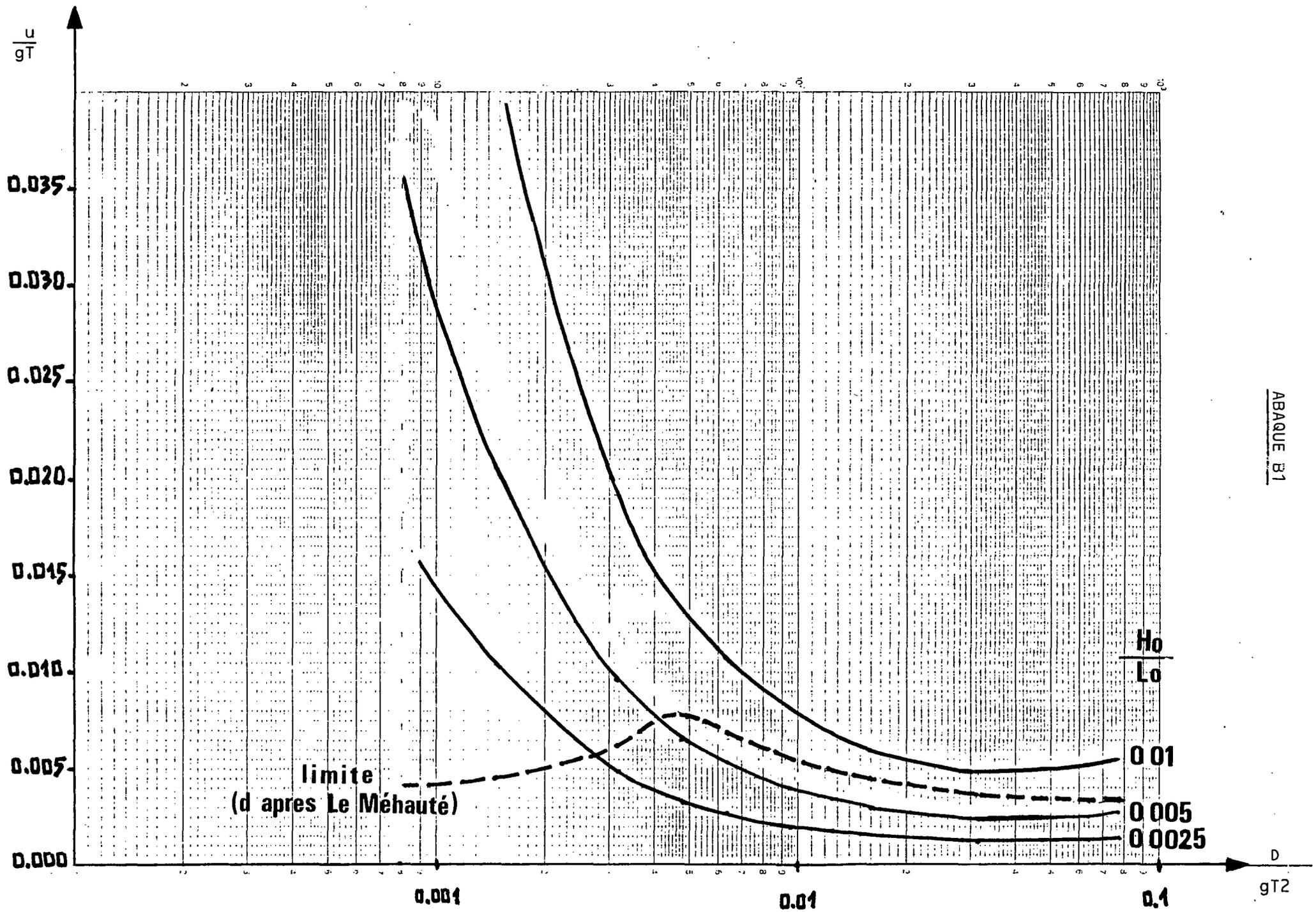
On voit donc apparaître dans cette expression les termes $\frac{H}{gT^2}$ et $\frac{D}{gT^2}$ déjà rencontrés au chapitre 2 (fig. 12 et 15).

L'abaque B1 représente $\frac{|u|}{gT}$ en fonction de $\frac{D}{gT^2}$, et ce pour plusieurs valeurs de la combrure de la houle $\frac{H_0}{L_0}$.

Nous avons porté sur cette abaque les limites de validité de la théorie d'Airy exposées en 2.2.4. La courbe en pointillés correspond à la ligne limite donnée en fig. 15.

La théorie linéaire apporte donc des restrictions importantes. L'abaque 1 permet de se rendre compte que, pour des houles de faible cambrure $\frac{H_0}{L_0}$, les vitesses orbitales sont relativement faibles et le terme $\frac{v^2}{2g}$ peut effectivement être négligé, notamment devant le terme gz

(équation 3.0).



IMPORTANCE DES VITESSES ORBITALES ET LIMITE IMPOSEE PAR LA THEORIE LINEAIRE

A N N E X E C

COMPARAISON DES CRITERES DE DEFERLEMENT

DE STOKES ET DE MUNK

(PROPAGATION RECTILIGNE DE LA HOULE)

* * *

STOKES définit le lieu de déferlement comme étant le lieu où la composante horizontale de la vitesse orbitale, u , devient égale à la célérité de propagation de la houle.

Compte tenu des expressions de u , C , fonctions de $\frac{D}{L_0}$ et de $\frac{H_0}{L_0}$ il a été établi l'abaque C1. Celle-ci permet de déterminer les profondeurs où une houle, de cambrure au large $\frac{H_0}{L_0}$ donnée, déferlera selon le critère de Stokes.

MUNK, s'appuyant aussi bien sur des considérations théoriques qu'expérimentales appliquées à la propagation d'une onde solitaire par dessus un fond horizontal, prend comme critère de déferlement le rapport $\frac{H}{D} = 0,78$.

L'abaque C2 représente $\frac{H}{D}$ en fonction de $\frac{D}{L_0}$, pour plusieurs valeurs de la cambrure au large $\frac{H_0}{L_0}$; celle-ci permet de déterminer les profondeurs au point de déferlement.

Comparons ces critères en déterminant pour plusieurs valeurs de $\frac{H_0}{L_0}$, le rapport critique $\left\{ \frac{D}{L_0} \right\}_d$ au déferlement :

$\frac{H_0}{L_0}$	0,1	0,07	0,05	0,02	0,01	0,005	0,0025	
$\left\{ \frac{D}{L_0} \right\}_d$	STOKES	0,066	0,044	0,033	0,0155	0,010	0,0072	0,0054
	MUNK	0,078	0,047	0,03	0,009	0,0035	0,0014	0,00052
Profondeur au déferlement STOKES	0,85	0,94	1,10	1,72	2,86	5,14	10,4	
Profondeur au déferlement MUNK								

Ainsi, si les critères de STOKES et de MUNK sont équivalents pour des houles de cambrure au large supérieure à 0,05, il n'en est plus de même pour des houles peu cambrées :

* pour des houles très cambrées $\left\{ \frac{H_0}{L_0} > 0,06 \right\}$ le déferlement se produit avant si l'on applique le critère de Munk ;

* pour les houles peu cambrées $\left\{ \frac{H_0}{L_0} < 0,06 \right\}$ le déferlement se produit avant si l'on applique le critère de Stokes.

Dans le cadre de la théorie linéaire, les seules houles étudiées ne peuvent avoir une cambrure telle que $\frac{H_0}{gT^2} > 0,001$ (voir 2.2.4).

or $L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$, par conséquent, la théorie linéaire étudiera seulement les houles telles que $\frac{H_0}{L_0} < 0,001 \cdot 2\pi$, soit $\frac{H_0}{L_0} < 0,0063$ (voir abaque C2).

Aussi, dans ces conditions, est-on amené à choisir l'un des deux critères, dans la mesure où l'on se trouve dans un domaine où les résultats sont très différents.

Exemple :

Plaçons-nous dans le cas d'une houle de cambrure $\frac{H_0}{L_0} = 0,0063$ (limite de validité).

Considérons une houle de période $T = 10$ s, alors :

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = 156 \text{ m et } H_0 = 0,98 \text{ m.}$$

L'abaque C1 et le critère de Stokes permettent de déterminer $\frac{D}{L_0} = 0,008$ au point de déferlement, d'où $D = 1,25$ m.

L'abaque C2 permet de donner l'amplitude H pour cette profondeur :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{H_0}{L_0} = 0,0063 \\ \frac{D}{L_0} = 0,008 \end{array} \right\} \frac{H}{D} = 0,265$$

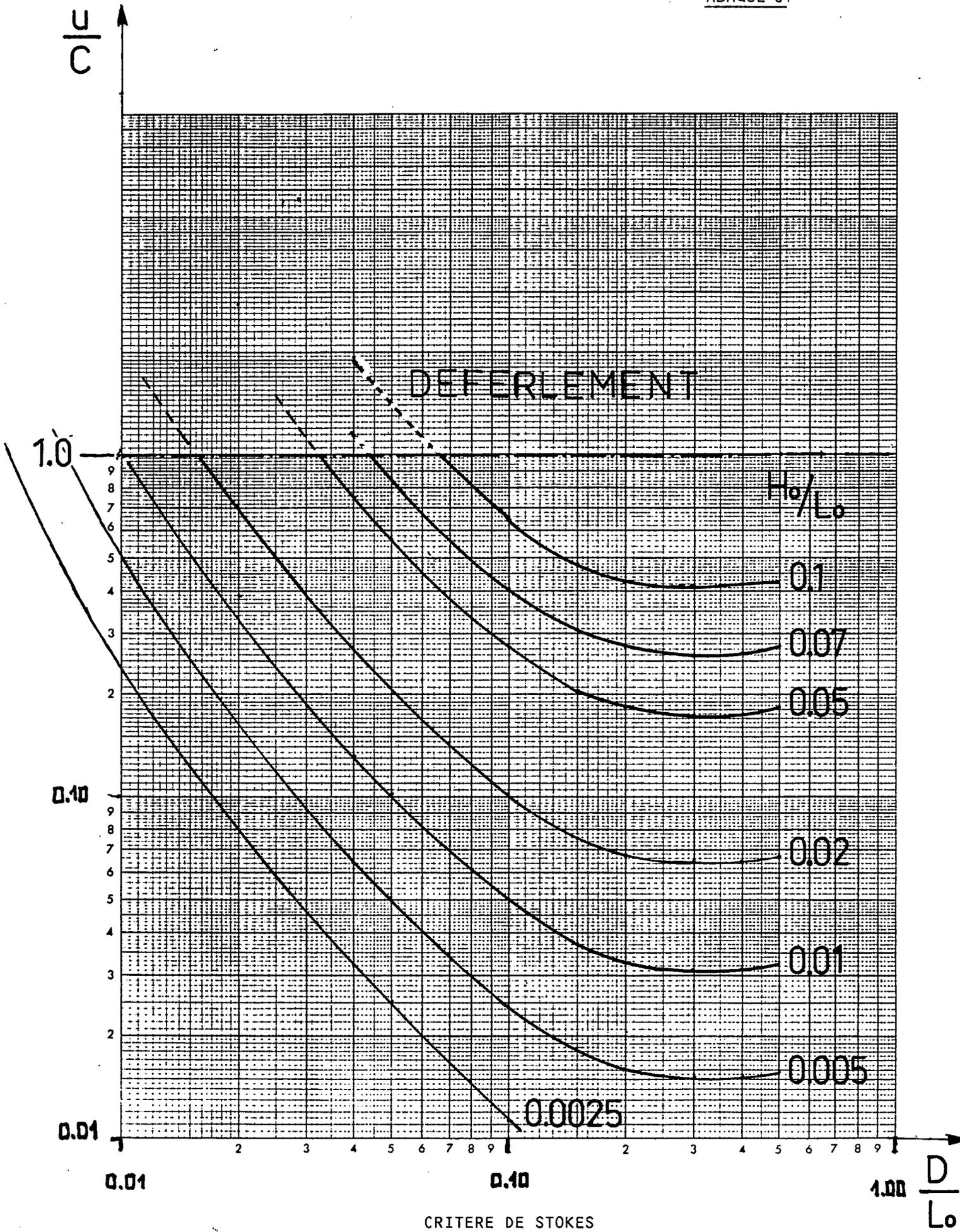
d'où $H = 0,33$ m au lieu de déferlement.

L'abaque C2 et le critère de Munk permettent de montrer que $\frac{D}{L_0} = 0,0019$ au point de déferlement. D'où $D = 0,30$ m et alors :

$$H = 0,78 \cdot 0,30 = 0,23 \text{ m.}$$

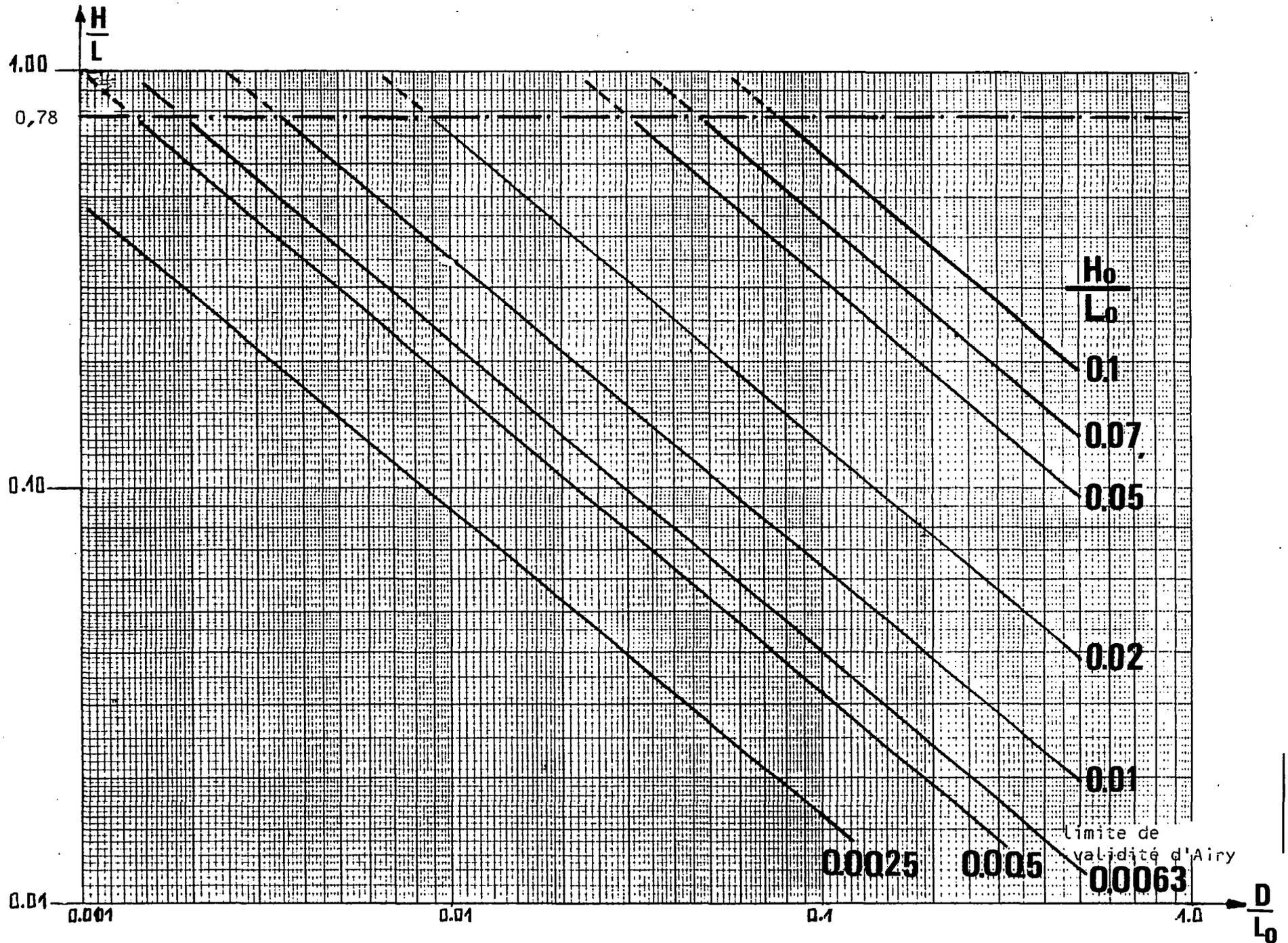
Conclusion

Cet exemple peut montrer que pour des houles s'inscrivant dans la théorie linéaire d'Airy (très faibles cambrure et amplitude), le critère de déferlement de Stokes est beaucoup plus réaliste que celui de Munk.



CRITERE DE STOKES

CRITERE DE MUNK



ABOQUE C2