

MINISTÈRE DE L'INDUSTRIE

BUREAU DE RECHERCHES GÉOLOGIQUES ET MINIÈRES

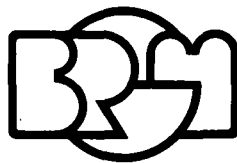
SERVICE GÉOLOGIQUE NATIONAL

B.P. 6009 - 45018 Orléans Cédex - Tél.: (38) 63.80.01

MÉMENTO D'HYDRAULIQUE SOUTERRAINE
(Deuxième édition)

par

M. BONNET



Département hydrogéologie

B.P. 6009 - 45018 Orléans Cédex - Tél.: (38) 63.80.01

78 SGN 397 HYD

Mars 1978

R E S U M E

Ce mémento a pour principale ambition de fixer un langage de base commun à toutes les personnes qui ont, au B.R.G.M., à travailler sur des problèmes dont la définition et la résolution impliquent le recours à l'"hydraulique souterraine" et à la mise en oeuvre de modèles d'écoulement en milieu poreux.

Il n'a pas de prétention à l'originalité et reprend seulement les notations et formulations les plus classiques de l'hydrodynamique souterraine qui sont à la base de tous les concepts théoriques comme de toutes les méthodes pratiques. Mais on espère qu'il aidera les utilisateurs à éviter l'écueil que constitue la dispersion de ces éléments fondamentaux dans de trop nombreux ouvrages (souvent en langue anglaise) et leur exposé selon des points de vue différents et avec des notations également très diverses.

Ainsi, ce mémento complète et appuie les rapports méthodologiques déjà publiés par le Département sur les applications de l'hydrodynamique en hydrogéologie qui tous excluent volontairement toute présentation détaillée des notions et équations fondamentales.

Il insiste tout particulièrement sur les principaux modèles conceptuels d'écoulement que l'hydrogéologue doit désormais au moins connaître, sinon utiliser indirectement par le moyen de "modèles de représentation" des systèmes hydrogéologiques, pour aborder l'étude des nouveaux problèmes qui lui sont posés (transferts de pollution, transferts thermiques, etc.).

Dans sa forme actuelle, le mémento comprend les grands chapitres suivants :

- En première partie, les principales notions fondamentales élémentaires sur lesquelles est basée l'hydrodynamique en milieu poreux :
 1. Propriétés physiques de l'eau et du milieu poreux, avec rappel des notations et unités les plus courantes.
 2. Lois fondamentales de la mécanique (et, de manière moins détaillée, de la thermique) applicables aux écoulements en milieu poreux.
- En deuxième partie, les principaux modèles conceptuels d'écoulement en milieu poreux exprimés sous la forme d'équations (aux dérivées partielles) du mouvement dans diverses conditions de structure du milieu et de nature du fluide en mouvement :
 3. Ecoulements monophasiques.
 4. Ecoulements diphasiques immiscibles.
 5. Ecoulements diphasiques miscibles.
 6. Transferts couplés.

AVANT-PROPOS

Dans la première édition de ce mémento, en 1972, nous écrivions :

"La diffusion de ce mémento, resté longtemps document provisoire, à l'intention de quelques spécialistes, a été rendue nécessaire par l'accroissement du nombre des ingénieurs qui ont, et auront de plus en plus désormais, à utiliser les concepts et appliquer les méthodes de l'hydraulique souterraine dans le cadre des études d'hydrogéologie : interprétation des pompages d'essai, projets d'exploitation, de rabattement ou d'alimentation artificielle de nappes, étude et prévision des variations naturelles de niveaux, étude des phénomènes d'intrusion saline, élaboration de modèles, etc.

On sait, en effet, que ces travaux ne peuvent et ne doivent pas être le fait des seuls spécialistes en hydraulique souterraine, mais doivent être réalisés en équipe ou même le plus souvent par l'hydrogéologue qui a conduit les investigations de terrain selon une méthodologie qui lui aura, certes, été le plus souvent transmise par des spécialistes, mais qu'il devra cependant avoir parfaitement assimilée".

Depuis, aucune des motivations invoquées ci-dessus n'a disparu. Au contraire, on a assisté à un accroissement des efforts pour faire entrer le raisonnement quantitatif dans l'hydrogéologie opérationnelle, notamment par l'emploi aussi systématique que possible de la méthode du modèle.

Le texte précédent a donc été repris en insistant davantage sur tous les points qui sont essentiels pour bien comprendre les principes fondamentaux de cette méthode.

Par ailleurs, il a, comme le précédent, pour principale ambition de fixer un langage de base commun à toutes les personnes qui auront au B.R.G.M. à travailler sur des problèmes dont la définition et la résolution impliquent l'appel à l'hydraulique souterraine et la mise en oeuvre de modèles d'écoulement.

Dans cette optique, il n'a pas de prétention à l'originalité et reprend seulement les notions et formulations les plus classiques qui sont à la base aussi bien de toutes les méthodes pratiques qui permettent d'identifier les paramètres des systèmes hydrogéologiques que des principaux modèles conceptuels d'écoulement. Mais on espère qu'il aidera les utilisateurs à éviter l'écueil que constitue la dispersion de ces éléments fondamentaux dans de trop nombreux ouvrages (souvent en langue anglaise) et leur exposé selon des points de vue différents et avec des notations également très diverses.

Il est évident qu'en cas d'ambiguïté ou même de divergence entre les auteurs dans la définition d'un terme ou d'un concept, une seule option a été retenue et est proposée*. Et il est bien entendu qu'il est très souhaitable que, sauf indication expressément énoncée, l'ensemble des ingénieurs du B.R.G.M. s'y rallie dans ses écrits et ses exposés. (Ceci est valable également, voire surtout, pour les notations et les formulations d'équations, au moins pour les plus fondamentales). Nous pensons que le respect de cette discipline facilitera incontestablement les échanges et fortifiera la cohérence et l'unité des productions des ingénieurs du Bureau en hydrogéologie.

* conformément au Dictionnaire français d'hydrogéologie, G. CASTANY, J. MARGAT, 1977, BRGM.

Ainsi, ce mémento est destiné à compléter et appuyer l'ensemble des rapports méthodologiques déjà publiés par le Département hydrogéologie sur les applications de l'hydrodynamique en hydrogéologie opérationnelle, qui tous excluent volontairement la présentation détaillée et a fortiori la discussion des notions et équations fondamentales (les "modèles conceptuels").

A l'inverse, ici, toute référence aux applications pratiques des formules a été évitée. On pourra se reporter aux rapports évoqués ci-dessus, dont une liste est donnée en bibliographie, ou pour ce qui concerne le problème général de l'emploi des modèles en hydrogéologie, à la thèse* sur le sujet dont ce mémento constitue une annexe théorique.

Dans sa nouvelle forme, le mémento est subdivisé en deux grandes parties qui peuvent être consultées de manière indépendante :

- La première partie rassemble les principales notions fondamentales élémentaires sur lesquelles est basée l'hydrodynamique en milieu poreux :
 - I/ Propriétés physiques de l'eau et du milieu poreux, avec rappel des notations et unités les plus courantes.
 - II/ Lois fondamentales de la mécanique (et, de manière moins détaillée, de la thermique) applicables aux écoulements en milieu poreux.
- La deuxième partie présente les principaux modèles conceptuels d'écoulement en milieu poreux exprimés sous la forme d'équations (aux dérivées partielles) du mouvement dans diverses conditions de structure du milieu et de nature du fluide en mouvement :
 - III/ Ecoulements monophasiques.
 - IV/ Ecoulements diphasiques immiscibles.
 - V/ Ecoulements diphasiques miscibles.
 - VI/ Transferts couplés.

On voit à cet énoncé que cette nouvelle version a été assez largement complétée pour tenir compte des développements théoriques et pratiques les plus récents, dans des domaines nouveaux auxquels doivent désormais s'intéresser les hydrogéologues et notamment : écoulements en milieu non saturé, transferts de corps dissous ou de chaleur en milieu aquifère.

Il est bien entendu reconnu que ce texte est perfectible et n'est, sans doute, pas exempt d'erreurs matérielles, voire de points discutables ou peu clairs.

Prière de les signaler au Département hydrogéologie qui s'efforcera d'en tenir compte au moins pour la diffusion de liste(s) d'errata et peut-être par la mise en chantier d'une troisième édition !

* BONNET M., 1978 .- *Méthodologie des modèles de simulation en hydrogéologie.* thèse d'état es sciences, Nancy.

S O M M A I R E

Table des symboles

Note sur les systèmes d'unité

PREMIERE PARTIE : NOTIONS ET BASES THEORIQUES FONDAMENTALES

1. PROPRIETES ELEMENTAIRES DE L'EAU ET DU MILIEU POREUX	1
1.1. Propriétés de l'eau	1
1.2. Grandeurs physiques fondamentales. Notion de milieu continu équivalent	13
1.3. Propriétés physiques du "milieu"	22
2. LES LOIS FONDAMENTALES DE L'HYDRODYNAMIQUE DES MILIEUX POREUX	30
2.1. Principe de conservation. Equation de continuité	30
2.2. Equation d'équilibre. Loi de Darcy	31
2.3. Equations d'état	34
2.4. Autres équations de transfert	34

DEUXIEME PARTIE : PRINCIPALES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DU MOUVEMENT DE L'EAU EN MILIEU POREUX ("MODELES CONCEPTUELS DE L'ECOULEMENT")

3. ECOULEMENTS MONOPHASIQUES	43
3.1. Ecoulements en charge	43
3.2. Ecoulements à surface libre	48
4. ECOULEMENTS DIPHASIQUES IMMISCIBLES	59
4.1. Généralités sur les écoulements polyphasiques immiscibles	59
4.2. Cas de l'écoulement diphasique air/eau dans les sols : écoulement en milieu non saturé	61
4.3. Cas du "biseau salé"	64
5. ECOULEMENTS DIPHASIQUES MISCIBLES	66
5.1. Généralités	66
5.2. Cas de l'écoulement d'une solution hétérogène	67
5.3. Cas de l'écoulement d'une solution homogène : le modèle du traceur parfait	68
6. TRANSFERTS COUPLES : THERMIQUE ET DE MASSE	69

TABLE DES SYMBOLES

I. - PARAMETRES ET GRANDEURS GEOMETRIQUES ET MECANIQUES

Symboles		Dimensions
A	Toute aire	L^2
b	Epaisseur (ou puissance) d'un milieu	L
C	Concentration massique d'un soluté	ML^{-3}
D_m	Diffusion moléculaire	L^2T^{-1}
D_{cin}	Dispersion cinématique	L^2T^{-1}
$\overline{D}$	Tenseur de dispersion apparente	L^2T^{-1}
D_{ij}	Composantes du tenseur de dispersion	L^2T^{-1}
D_L	Dispersion longitudinale (composante de $\overline{D}$ selon la direction du vecteur vitesse)	L^2T^{-1}
D_T	Dispersion transversale (composante de $\overline{D}$ normalement à la direction du vecteur vitesse)	L^2T^{-1}
g	Accélération de la pesanteur	LT^{-2}
h	Cote de la surface libre	L
h_p	Hauteur piézométrique	L
H	Charge hydraulique (de préférence en écoulement bidimensionnel)	L
i	Pente de la surface libre ($\approx$ gradient hydraulique si hypothèse de DUPUIT)	sans
K	Perméabilité intrinsèque	L^2
K	Perméabilité à l'eau (de Darcy)	LT^{-1}
K_h	Perméabilité horizontale	LT^{-1}
K_v	Perméabilité verticale	LT^{-1}
p	pression	$ML^{-1}T^{-2}$
q	Flux (en volume) échangé à travers une surface libre	LT^{-1}
$\vec{q}_\alpha^*$	Flux de diffusion (en masse) d'une soluté α (dû aux fluctuations par rapport à la vitesse (massique) $\vec{v}^*$)	$ML^{-2}T^{-1}$
$\vec{q}_\alpha'$	Flux de diffusion (en masse) d'une soluté α (dû aux fluctuations par rapport à la vitesse volumique v')	$ML^{-2}T^{-1}$
Q	Débit en volume	L^3T^{-1}
s	Rabattement (variation de niveau piézométrique)	L
s_i	Degré de saturation d'un fluide i	sans
S	Coefficient d'emmagasinement (d'une couche)	sans
S_s	Coefficient d'emmagasinement spécifique	

Symboles		Dimensions
t	Temps	T
T_s	Tension superficielle	MT^{-2}
T	Transmissivité	L^2T^{-1}
$\vec{v}$	Vitesse intergranulaire d'un fluide homogène ou d'une solution	LT^{-1}
$\vec{v}_\alpha$	Vitesse microscopique d'un soluté dissous	LT^{-1}
$\vec{v}^*$	Vitesse microscopique (massique) d'une solution	LT^{-1}
$\vec{v}'$	Vitesse microscopique (volumique) d'une solution	LT^{-1}
$\vec{v}'_\alpha$	Vitesse (volumique) moyenne ou vitesse de convection d'un soluté	LT^{-1}
$\vec{v}'_\epsilon$	Vitesse (volumique) de fluctuation (d'un soluté)	LT^{-1}
$\vec{v}^*$	Vitesse (massique) moyenne d'une solution	LT^{-1}
$\vec{v}^*_\epsilon$	Vitesse (massique) de fluctuation (d'une solution)	LT^{-1}
$\vec{v}_e$	Vitesse effective ($v_e = v^*$)	LT^{-1}
$\vec{V}$	Vitesse de filtration (ou vitesse de Darcy)	LT^{-1}
x	Cotes dans un système orthonormé	
y		
z		
Z_s	Cote du substratum d'un aquifère	
Z_T	Cote du toit d'un aquifère	
α	Coefficient de compressibilité de la matrice poreuse	$M^{-1}LT^2$
β	Coefficient de compressibilité de l'eau	$M^{-1}LT^2$
γ	Poids spécifique de l'eau	$ML^{-2}T^{-2}$
Δ	Différences entre valeurs finies	
θ	Teneur en eau volumique	sans
ϵ	Valeur arbitraire et inconnue mais toujours relativement petite	variable
μ	Viscosité dynamique	$ML^{-1}T^{-1}$
ν	Viscosité cinématique	L^2T^{-1}
ρ	Masse spécifique	ML^{-3}
σ	Contrainte	$ML^{-1}T^{-2}$
ω	Porosité	
ω_{eff}	Porosité efficace	
ω_{cin}	Porosité cinématique	
ϕ_m	Energie par unité de masse	potentiels
ϕ_v	Energie par unité de volume	
ϕ	Energie par unité de poids (= charge hydraulique)	
ψ	Tension ou suction	L

II. - PARAMETRES ET GRANDEURS THERMIQUES

Symboles

Dimensions

C_α	Chaleur massique ou capacité calorifique (l'indice indique le milieu s = solide, f = fluide, a = aquifère, l = éponte)	$QM^{-1}\theta^{-1}$
E_t	Coefficient d'échange thermique solide - fluide	
$\vec{F}_{c\alpha}$	Flux thermique par conduction (dans le milieu α)	
$\vec{F}_{vf}$	Flux thermique par convection	
$\vec{F}_{df}$	Flux thermique par dispersion	
Q	Quantité de chaleur	$M=ML^2T^{-2}$
λ_α	Conductivité thermique du milieu α	$MLT^{-3}\theta^{-1}$
Λ	Diffusivité thermique	L^2T^{-1}
θ	Température	

NOTE SUR LES SYSTEMES D'UNITE

Pour ce qui concerne les grandeurs mécaniques, nous ferons exclusivement référence à trois systèmes d'unité :

- 1/ Le Système International, seul système "légal" en France
(Décret n° 61-501 du 3 mai 1961) : m, kg (masse) sec
- 2/ Le système C.G.S. encore fréquemment employé dans les tables de caractéristiques physiques : cm, g (masse), sec
- 3/ Le système dit "English engineering" encore très utilisé dans les pays anglo-saxons (U.S.A. surtout) : foot, pound (force), second (en abrégé : ft, lb, sec).

Pour les grandeurs thermiques (moins usuelles), voir § I.3.4.

Pour passer d'un système à l'autre, on retiendra les égalités suivantes :

$$1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ m} = 30,48 \text{ cm}$$

$$1 \text{ lb (masse)} = 0,4536 \text{ kg} = 453,6 \text{ g.}$$

PREMIERE PARTIE

NOTIONS ET BASES THEORIQUES FONDAMENTALES

I. PROPRIETES ELEMENTAIRES DE L'EAU ET DU MILIEU POREUX

I.1. Propriétés de l'eau

Dans la mesure où, en hydrogéologie, nous nous intéressons principalement aux écoulements naturels en milieux aquifères superficiels, il faut d'abord bien rappeler les propriétés physiques de l'eau dans les conditions dites "normales" de température et de pression. Nous préciserons à cette occasion les principales unités employées dans la littérature européenne et anglo-saxonne*.

I.1.1 Masse spécifique

Définition : La masse spécifique ("density" des anglo-saxons) d'un corps est la masse de l'unité de volume de ce corps (dans des conditions précisées de température et de pression).

Notation usuelle : ρ

Dimensions : $M L^{-3}$

Unités : En France, l'unité légale est le kg/m^3 (S.I.). En Europe, on emploie encore couramment le g/cm^3 (C.G.S.). Dans l'English Engineering System qui admet comme unité de base la livre-force ou pound-force (symbole lb), l'unité de masse spécifique se déduit de celle de poids spécifique (la lb/ft^3) : c'est la lb (poids) sec^2/ft^4 et l'on a :

$$1 \text{ lb} \cdot sec^2/ft^4 = \frac{453 \times 981}{(30.48)^4} = 0.518 \text{ g/cm}^3.$$

Pour l'eau : La masse spécifique prise à la pression atmosphérique est assez peu variable en fonction de la température. Elle admet un maximum proche de 1 aux environs de 4° .

t	0	4	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ρ	0,9999	1	0,9982	0,9957	0,9922	0,9881	0,9832	0,9778	0,9718	0,9653	0,9585

* Voir note préliminaire

On a donc, tant que la température reste inférieure à 50°, :

$1 - \rho$ (en g/cm³) < 10⁻²
 soit $\rho \neq 1$ g/cm³ = 10³ kg/m³ = 1 kg/dm³,
 ou en unités américaines : $\rho \neq 1,93$ lb.sec²/ft⁴

Pour les variations en fonction de la pression, voir ci-après paragraphe I.1.5.

I.1.2 Poids spécifique

Définition : C'est le poids de l'unité de volume. Il est relié à la masse spécifique par la relation $\gamma = \rho g$.

Dimensions : ML⁻³ x LT⁻² = ML⁻²T⁻² ou MLT⁻²/L³.

Unités : - légale en France (S.I.) : le Newton/m³ (N/m³)

- système C.G.S. : la dyne/cm³ (dyn/cm³)

$$1 \text{ N/m}^3 = \frac{105 \text{ dyne}}{10^6 \text{ cm}^3} = 10^{-1} \text{ dyn/cm}^3$$

- le kgp/m³ ou le gp/cm³ sont désormais interdits en France

- encore utilisé aux U.S.A. (Engineering System) : la lb/ft³

$$1 \text{ lb/ft}^3 = \frac{453 \times 981}{(30.48)^3} \text{ dyn/cm}^3 = 15,8 \text{ dyn/cm}^3 = 158 \text{ N/m}^3.$$

Pour l'eau et dans les mêmes conditions que pour la masse spécifique:
 $\gamma \neq 1 \times 981 = 981 \text{ dynes/cm}^3 = 1 \text{ g}_p/\text{cm}^3 \neq 62 \text{ lb/ft}^3$

I.1.3 Viscosité dynamique

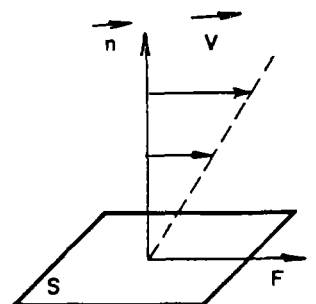
Définition : C'est un coefficient de frottement qui est défini par la formule

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{d\vec{V}}{dn}$$

$\frac{F}{S}$ = force tangentielle unitaire exercée sur
 une plaque par un écoulement présentant un
 gradient de vitesse selon la direction $\vec{n}$
 (perpendiculaire à la plaque) égal à $\frac{d\vec{V}}{dn}$

Notation classique : μ

Dimensions : MLT⁻¹ . L⁻¹ x T = ML⁻¹T⁻¹



Unités : - S.I. : le Poiseuille, Pl, 1 Pl = 1 kg/m/s = 1N/s/m²

- C.G.S. : le* Poise Po : 1 Po = 1 g/cm/s = 1 dyne s/cm² = 10⁻¹ Pl

- Aux U.S.A., les pétroliers (Muskat) utilisent le poise, les hydrauliciens le lbf.sec/ft² = 480 poises.

Pour l'eau : La viscosité varie beaucoup avec la température comme le montre le tableau ci-dessous.

θ	(1)	(2)	θ	(1)	(2)
0	1,797	1,7921	23	937	9258
1	1,739	1,7313	24	916	9142
2	1,683	1,6728	25	895	8937
3	1,628	1,6191	26	0,875	0,8737
4	1,576	1,5674	27	855	8545
5	1,525	1,5188	28	836	8360
6	1,476	1,4728	29	818	8180
7	1,429	1,4284	30	800	8007
8	1,384	1,3860	35	723	7225
9	1,341	1,3462	40	656	6560
10	1,301	1,3077	45	599	5988
11	1,264	1,2713	50	550	5494
12	1,230	1,2363	55	508	5064
13	1,197	1,2028	60	0,473	0,4688
14	1,167	1,1709	65	437	4355
15	1,138	1,1404	70	407	4061
16	1,110	1,1111	75	381	3799
17	1,083	1,0828	80	357	3565
18	1,056	1,0559	85	335	3355
19	1,031	1,0299	90	314	3165
20	1,006	1,0050	95	0,299	0,2994
21	0,982	0,981	100°		0,2838
22	959	9579			

(1) J. DUCLAUX (1934) - (2) HODGMAN (1951)

* Poise est masculin.

En pratique, on retiendra :

Pour l'eau à 20° $\mu = 1,008 \pm 0,02$ centipoises $\neq 1$ Cp
ou $\mu = 2,08 \cdot 10^{-5}$ lb/ft²

On a d'autre part la formule approximative suivante (formule de HELMHOLTZ) :

$$\mu = \frac{0,0178}{1 + 0,0337 \theta + 0,000222 \theta^2} \text{ Cp}$$

I.1.4 Viscosité cinématique

Définition et dimensions : C'est le rapport de la viscosité dynamique à la masse spécifique. On la note par la lettre ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\text{ML}^{-1} \text{T}^{-1}}{\text{ML}^{-3}} = \text{L}^2 \text{T}^{-1}$$

Unités : - Systèmes S.I. et C.G.S. : le m²/s et le cm²/s ou Stokes
- Aux U.S.A., 1e ft²/s = 925 cm²/s.

Pour l'eau : à 20°

$$\begin{aligned} \nu &= 1 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s} \\ \nu &= 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s} \neq 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}. \end{aligned}$$

I.1.5 Coefficient de compressibilité

Définition : Le coefficient de compressibilité de l'eau β est défini par :

$$\beta = - \frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta p} = \frac{1}{\Delta p}$$

où $\frac{\Delta V}{V}$ représente la variation relative de volume provoquée par la variation de pression Δp (une variation positive de pression provoque une contraction de volume).

On a donc aussi :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \beta \Delta p$$

β permet d'exprimer, à température donnée, les variations de masse spécifique en fonction de la pression.

Dimensions : Le coefficient de compressibilité est homogène à l'inverse d'une pression, soit :

$$\beta = (ML^{-1} T^{-2})^{-1} = M^{-1} LT^2$$

Unités : - En Europe, le système C.G.S. : (barye)⁻¹

Mais on utilise également des unités non homogènes :

- . 1e kg/cm²)⁻¹
- . 1e (m d'eau)⁻¹ = (1/10 kg/cm²)⁻¹
- . 1'unité de volume/atmosphère ou (atm.)⁻¹.

- Aux U.S.A. :

- . 1e (p.s.i.)⁻¹ = (square inch/pound).

Pour l'eau : A 20° et au voisinage de la pression atmosphérique, on a :

$$\begin{aligned} \beta &\neq 47.10^{-6} \text{ (kg/cm}^2\text{)}^{-1} = 47.10^{-7} \text{ (m d'eau)}^{-1} \\ &\neq 49.10^{-6} \text{ (atm.)}^{-1} \\ &\neq 46.10^{-11} \text{ (baryes)}^{-1} \\ &\neq 3,3.10^{-6} \text{ in}^2/\text{lb.} \end{aligned}$$

On retiendra :

$$\beta \neq 4,7.10^{-6} \text{ (m d'eau)}^{-1} \text{ à } 20^\circ$$

ou pour les calculs approchée :

$$\beta \neq 5.10^{-6} \text{ (m d'eau)}^{-1} \neq 5.10^{-5} \text{ (atm.)}^{-1} \neq 5.10^{-10} \text{ (barye)}^{-1}.$$

β varie légèrement en fonction de la température comme le montrent les tableaux ci-après qui donnent donc également les variations relatives de ρ d'après une formule analytique basée sur les travaux expérimentaux de DODSON et STANDING.

Compressibilité de l'eau en cm^2/dyne
d'après mesures de HODGMAN (1957)

Condition adiabatique (à 1 atm.)		Condition isotherme	
$\theta^\circ \text{ C}$ température	$\beta \text{ cm}^2/\text{dyne}$	$\beta = \frac{C}{L + P}$	avec :
0	$5,01 - 5,04 \times 10^{-11}$	C	L (dyne/cm ²)
10	4,78	(pour l'eau)	
20	4,58	0,1368	$29,96 \times 10^8$
25	4,57		
30	4,46		
30,8	4,35		
34,78	4,41		
35	4,48	0,1368	30,55
40	4,41		
45	4,44	0,1368	30,81
50	4,40		
55	4,44	0,1368	30,78
60	4,43		
65	4,48	0,1368	30,52
75	4,55	0,1368	30,05
85	4,65	0,1368	29,39
90	4,68		
100	4,80		
HODGMAN (1957)			

Compressibilité de l'eau en unités de volume, par atmosphère,
d'après AMAGAT (1893)
Pression en atmosphère :

Température C°	1-25	25 - 50	100 x 200
0	$52,5 \times 10^{-6}$	$51,6 \times 10^{-6}$	$49,2 \times 10^{-6}$
10	50,0	49,2	46,1
20	49,1	47,6	44,2
50			42,5
100			46,8

COMPRESSIBILITE VOLUMIQUE $\frac{dv}{v} \equiv \frac{\Delta p}{\beta}$ DE L'EAU PURE
EN FONCTION DE LA TEMPERATURE ET DE LA PRESSION

* * *						
* P * T * EN DEGRES						
* m * 10 20 30 40 50 *						
* d'eau *						

* 0 *	-0.000000	* -0.000000	* -0.000000	* -0.000000	* -0.000000	* -0.000000
* 10 *	-0.000050	* -0.000046	* -0.000045	* -0.000044	* -0.000044	* -0.000044
* 20 *	-0.000100	* -0.000092	* -0.000090	* -0.000088	* -0.000088	* -0.000088
* 30 *	-0.000251	* -0.000231	* -0.000224	* -0.000221	* -0.000219	* -0.000219
* 40 *	-0.000376	* -0.000346	* -0.000336	* -0.000331	* -0.000328	* -0.000328
* 50 *	-0.000501	* -0.000460	* -0.000448	* -0.000440	* -0.000437	* -0.000437
* 60 *	-0.000751	* -0.000689	* -0.000670	* -0.000659	* -0.000653	* -0.000653
* 70 *	-0.001000	* -0.000916	* -0.000890	* -0.000876	* -0.000869	* -0.000869
* 80 *	-0.001249	* -0.001143	* -0.001110	* -0.001092	* -0.001083	* -0.001083
* 90 *	-0.001497	* -0.001358	* -0.001329	* -0.001307	* -0.001297	* -0.001297
* 100 *	-0.001745	* -0.001593	* -0.001546	* -0.001521	* -0.001509	* -0.001509
* 110 *	-0.001992	* -0.001816	* -0.001762	* -0.001734	* -0.001720	* -0.001720
* 120 *	-0.002239	* -0.002038	* -0.001977	* -0.001945	* -0.001930	* -0.001930
* 130 *	-0.002485	* -0.002260	* -0.002191	* -0.002156	* -0.002139	* -0.002139
* 140 *	-0.002730	* -0.002480	* -0.002404	* -0.002365	* -0.002347	* -0.002347
* 150 *	-0.002975	* -0.002700	* -0.002616	* -0.002574	* -0.002554	* -0.002554
* 160 *	-0.003219	* -0.002918	* -0.002827	* -0.002781	* -0.002760	* -0.002760
* 170 *	-0.003463	* -0.003136	* -0.003037	* -0.002987	* -0.002965	* -0.002965
* 180 *	-0.003706	* -0.003352	* -0.003245	* -0.003192	* -0.003169	* -0.003169
* 190 *	-0.003948	* -0.003568	* -0.003453	* -0.003396	* -0.003372	* -0.003372
* 200 *	-0.004189	* -0.003783	* -0.003659	* -0.003609	* -0.003574	* -0.003574
* 210 *	-0.004429	* -0.003997	* -0.003865	* -0.003801	* -0.003775	* -0.003775
* 220 *	-0.004669	* -0.004210	* -0.004070	* -0.004002	* -0.003974	* -0.003974
* 230 *	-0.004908	* -0.004422	* -0.004273	* -0.004202	* -0.004173	* -0.004173
* 240 *	-0.005146	* -0.004633	* -0.004476	* -0.004401	* -0.004371	* -0.004371
* 250 *	-0.005383	* -0.004844	* -0.004677	* -0.004599	* -0.004568	* -0.004568
* 260 *	-0.005619	* -0.005053	* -0.004878	* -0.004797	* -0.004764	* -0.004764
* 270 *	-0.005854	* -0.005262	* -0.005077	* -0.004993	* -0.004959	* -0.004959
* 280 *	-0.006088	* -0.005469	* -0.005276	* -0.005188	* -0.005154	* -0.005154
* 290 *	-0.006322	* -0.005676	* -0.005474	* -0.005382	* -0.005347	* -0.005347
* 300 *	-0.006554	* -0.005882	* -0.005670	* -0.005575	* -0.005539	* -0.005539
* 310 *	-0.006785	* -0.006087	* -0.005866	* -0.005767	* -0.005730	* -0.005730
* 320 *	-0.007015	* -0.006292	* -0.006061	* -0.005959	* -0.005921	* -0.005921
* 330 *	-0.007244	* -0.006495	* -0.006255	* -0.006149	* -0.006110	* -0.006110
* 340 *	-0.007471	* -0.006697	* -0.006448	* -0.006338	* -0.006299	* -0.006299
* 350 *	-0.007698	* -0.006899	* -0.006640	* -0.006527	* -0.006487	* -0.006487
* 360 *	-0.007923	* -0.007100	* -0.006832	* -0.006715	* -0.006674	* -0.006674
* 370 *	-0.008147	* -0.007300	* -0.007022	* -0.006901	* -0.006860	* -0.006860
* 380 *	-0.008370	* -0.007499	* -0.007211	* -0.007087	* -0.007045	* -0.007045
* 390 *	-0.008592	* -0.007697	* -0.007400	* -0.007272	* -0.007229	* -0.007229
* 400 *	-0.008812	* -0.007894	* -0.007588	* -0.007456	* -0.007413	* -0.007413
* 410 *	-0.009031	* -0.008091	* -0.007775	* -0.007640	* -0.007596	* -0.007596
* 420 *	-0.009249	* -0.008286	* -0.007961	* -0.007822	* -0.007777	* -0.007777
* 430 *	-0.009465	* -0.008481	* -0.008146	* -0.008004	* -0.007958	* -0.007958

On rappelle $\beta = \frac{\Delta V}{V} \frac{1}{p}$

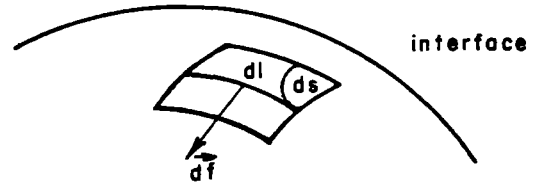
* * * *									
* * T *									
* P * * 60 70 80 90 100 *									
* * *									

* 0 *	-0.000000	* -0.000000	* -0.000000	* -0.000000	* -0.000000	* -0.000000	* -0.000000	* -0.000000	*
* 10 *	-0.000044	* -0.000044	* -0.000045	* -0.000046	* -0.000046	* -0.000047	* -0.000047	* -0.000047	*
* 20 *	-0.000088	* -0.000088	* -0.000090	* -0.000092	* -0.000092	* -0.000095	* -0.000095	* -0.000095	*
* 30 *	-0.000132	* -0.000132	* -0.000134	* -0.000136	* -0.000136	* -0.000139	* -0.000139	* -0.000139	*
* 40 *	-0.000176	* -0.000176	* -0.000178	* -0.000180	* -0.000180	* -0.000183	* -0.000183	* -0.000183	*
* 50 *	-0.000219	* -0.000221	* -0.000224	* -0.000229	* -0.000229	* -0.000236	* -0.000236	* -0.000236	*
* 60 *	-0.000263	* -0.000266	* -0.000270	* -0.000275	* -0.000275	* -0.000282	* -0.000282	* -0.000282	*
* 70 *	-0.000307	* -0.000310	* -0.000314	* -0.000319	* -0.000319	* -0.000326	* -0.000326	* -0.000326	*
* 80 *	-0.000351	* -0.000354	* -0.000358	* -0.000363	* -0.000363	* -0.000370	* -0.000370	* -0.000370	*
* 90 *	-0.000395	* -0.000398	* -0.000402	* -0.000407	* -0.000407	* -0.000414	* -0.000414	* -0.000414	*
* 100 *	-0.000439	* -0.000442	* -0.000446	* -0.000451	* -0.000451	* -0.000458	* -0.000458	* -0.000458	*
* 110 *	-0.000483	* -0.000486	* -0.000490	* -0.000495	* -0.000495	* -0.000502	* -0.000502	* -0.000502	*
* 120 *	-0.000527	* -0.000530	* -0.000534	* -0.000539	* -0.000539	* -0.000546	* -0.000546	* -0.000546	*
* 130 *	-0.000571	* -0.000574	* -0.000578	* -0.000583	* -0.000583	* -0.000590	* -0.000590	* -0.000590	*
* 140 *	-0.000615	* -0.000618	* -0.000622	* -0.000627	* -0.000627	* -0.000634	* -0.000634	* -0.000634	*
* 150 *	-0.000659	* -0.000662	* -0.000666	* -0.000671	* -0.000671	* -0.000678	* -0.000678	* -0.000678	*
* 160 *	-0.000703	* -0.000706	* -0.000710	* -0.000715	* -0.000715	* -0.000722	* -0.000722	* -0.000722	*
* 170 *	-0.000747	* -0.000750	* -0.000754	* -0.000759	* -0.000759	* -0.000766	* -0.000766	* -0.000766	*
* 180 *	-0.000791	* -0.000794	* -0.000798	* -0.000803	* -0.000803	* -0.000810	* -0.000810	* -0.000810	*
* 190 *	-0.000835	* -0.000838	* -0.000842	* -0.000847	* -0.000847	* -0.000854	* -0.000854	* -0.000854	*
* 200 *	-0.000879	* -0.000882	* -0.000886	* -0.000891	* -0.000891	* -0.000898	* -0.000898	* -0.000898	*
* 210 *	-0.000923	* -0.000926	* -0.000930	* -0.000935	* -0.000935	* -0.000942	* -0.000942	* -0.000942	*
* 220 *	-0.000967	* -0.000970	* -0.000974	* -0.000979	* -0.000979	* -0.000986	* -0.000986	* -0.000986	*
* 230 *	-0.001011	* -0.001014	* -0.001018	* -0.001023	* -0.001023	* -0.001030	* -0.001030	* -0.001030	*
* 240 *	-0.001055	* -0.001058	* -0.001062	* -0.001067	* -0.001067	* -0.001074	* -0.001074	* -0.001074	*
* 250 *	-0.001099	* -0.001102	* -0.001106	* -0.001111	* -0.001111	* -0.001118	* -0.001118	* -0.001118	*
* 260 *	-0.001143	* -0.001146	* -0.001150	* -0.001155	* -0.001155	* -0.001162	* -0.001162	* -0.001162	*
* 270 *	-0.001187	* -0.001190	* -0.001194	* -0.001199	* -0.001199	* -0.001206	* -0.001206	* -0.001206	*
* 280 *	-0.001231	* -0.001234	* -0.001238	* -0.001243	* -0.001243	* -0.001250	* -0.001250	* -0.001250	*
* 290 *	-0.001275	* -0.001278	* -0.001282	* -0.001287	* -0.001287	* -0.001294	* -0.001294	* -0.001294	*
* 300 *	-0.001319	* -0.001322	* -0.001326	* -0.001331	* -0.001331	* -0.0013			

I.1.6 Tension superficielle

Définition : C'est l'énergie, par unité de surface, qu'il faut mettre en jeu au niveau d'une interface pour arracher les molécules superficielles de la masse fluide à l'action de molécules intérieures.

$$T_s = \frac{dW}{dS}$$



Dimensions : $ML^2 T^{-2}/L^{-2} = MT^{-2}$ ou MLT^{-2}/L

C'est aussi la force d'attraction exercée sur l'unité de longueur à la surface extérieure du fluide, soit :

$$T_s = \frac{df}{dl}$$

Unités : S.I. : le N/m

C.G.S. : la Dyn/cm $1N/m = 10^3 \text{ dyn/cm}$

Pour l'eau : $T_s \neq 74 \text{ dyn/cm}$ à 0°

$T_s \uparrow$ quand $t \uparrow$.

I.1.7 Propriétés thermiques (de l'eau)

I.1.7.1 Remarques sur les systèmes d'unité

L'étude des phénomènes thermiques implique la définition d'une seule grandeur supplémentaire la température θ qui peut s'exprimer dans deux unités

- le degré Celsius : $^\circ C$
- le degré Fahrenheit : $^\circ F$

avec la relation d'équivalence : $\theta_F = 32 + \frac{9}{5} \theta_C$

Ainsi, le Système International a retenu le $^\circ C$ et ne comprend que les 4 unités strictement nécessaires : m, kg, s, $^\circ C$.

Mais, afin de maintenir la distinction entre les deux formes d'énergie, mécanique et thermique, la plupart des systèmes dits "pratiques" utilisés par les thermiciens utilisent une unité de "quantité de chaleur" (ou énergie thermique) dont les plus courantes sont :

- la calorie (cal) : quantité de chaleur nécessaire pour élever 1g d'eau de 1° (à pression constante et aux environs de 15°), dont l'équivalent en énergie mécanique est : 1 cal = 4,184 Joules
- le British Thermal Unit (BTu) : quantité de chaleur nécessaire pour élever 1lb d'eau de 1°F (à pression constante et au voisinage de 39°F $\neq$ 4°C).

Utilisent, par exemple, ces unités les trois systèmes suivants encore largement employés dans de nombreux ouvrages :

1. cm, g, s, cal, °C (C.G.S.)
2. m, kg, h, kcal, °C (système "pratique" européen)
3. ft, lb, h, btu, °F (système "pratique" anglo-saxon).

On trouvera ci-après, sous forme de tableaux ⁽¹⁾ les facteurs de conversion entre unités thermiques des divers systèmes et avec le S.I. La compréhension de leur mode d'emploi sera facilitée par des exemples qui, joints à chaque tableau, éviteront l'hésitation fréquente entre la valeur correcte du facteur de conversion et son inverse.

Energie thermique Q

	J	cal	kcal	btu
J	1	0,2389	0,2389.10 ⁻³	0,948.10 ⁻³
cal	4,1855	1	1 . 10 ⁻³	3,9683.10 ⁻³
kcal	4,1855.10 ³	1.10 ³	1	3,9683
btu	1,055.10 ³	252	0,252	1

Ex. : 1 btu = 0,252 kcal

Q exprimé en btu = 3,9683 (Q exprimé en cal)

Q exprimé en J = 1055 (Q exprimé en btu).

(1) D'après GIBLIN (R.) .- Transmission de la chaleur par convection naturelle .- EYROLLES, Collection de l'ANRT - 1974.

Flux thermique Φ

	W	cal/s	kcal/h	btu/h
W	1	0,2389	0,860	3,4124
cal/s	4,1855	1	3,600	14,286
kcal/h	1,1627	0,2778	1	3,968
btu/h	0,29306	0,070	0,252	1

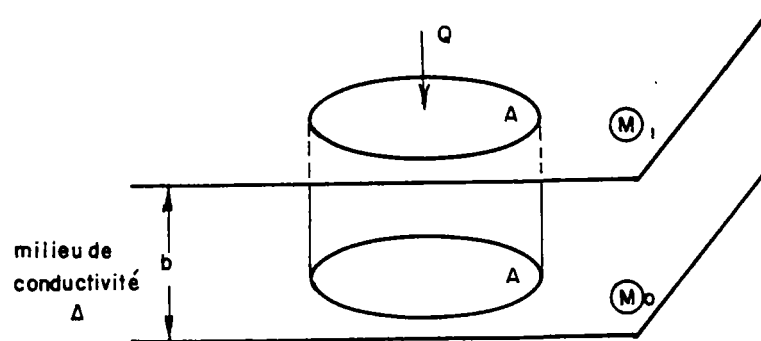
Ex. : Φ exprimé en btu/h = 3,4124 (Φ exprimé en W)

Φ exprimé en kcal/h = 0,860 (Φ exprimé en W)

I.1.7.2 Conductivité thermique

Définition et dimensions : C'est la quantité de chaleur par unité de surface qui en régime permanent s'écoule dans l'unité de temps sous l'effet d'un gradient de température unitaire, soit :

$$\lambda = \frac{Qb}{(\theta_1 - \theta_0) A \Delta t}$$



Avec Q = quantité de chaleur transmise à travers les cylindres de surface de base A pendant l'intervalle de temps Δt

$$\frac{\theta_1 - \theta_0}{d} = \text{gradient de température} \quad \theta_1 > \theta_0$$

D'où les dimensions :

flux thermique $\approx$ puissance

- pour le S.I. : MLT^{-3} ou $ML^2 T^{-3} / t \theta$

- pour les systèmes "pratiques" : $QL^{-1} T^{-1} \theta^{-1}$

Unités : Les plus usuelles sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Conductivité thermique λ

	W/m.°C	cal/cm.s.°C	kcal/m.h.°C	btu/ft.h.°F
W/m.°C	1	$2,389 \cdot 10^{-3}$	0,860	0,57785
cal/cm.s.°C.	418,55	1	360	241,91
kcal/m.h.°C.	1,1627	$2,778 \cdot 10^{-3}$	1	0,67197
btu/ft.h.°F.	1,7306	$4,1388 \cdot 10^{-3}$	1,4882	1

Ex. : 1 btu/ft.h.°F = 1,4882 kcal/m.h.°C

λ exprimé en btu/ft.h.°F = 0,57785 (λ exprimé en W/m °C)

λ exprimé en kcal/m.h.°C = 0,860 (λ exprimé en W/m °C)

Pour l'eau :

$$\lambda = 1.44 \cdot 10^{-3} \text{ cal/cm.s.}^\circ\text{C}$$

$$= 6.02 \cdot 10^{-1} \text{ W/m }^\circ\text{C}$$

Système international

$$= 3.48 \cdot 10^{-1} \text{ btu/ft.h.}^\circ\text{F}$$

λ varie très peu en fonction de la température selon une loi

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \epsilon \theta) \quad \epsilon < 0 \text{ et négligeable.}$$

I.1.7.3 Chaleur massique (ou capacité calorifique)

Définition : C'est la quantité de chaleur qu'il faut pour élever l'unité de masse de l'unité d'écart de température (à une pression donnée constante)

$$c_p = \frac{Q}{M \Delta \theta}$$

Dimensions : - pour le S.I. : $L^2 T^{-2} \theta^{-1} = ML^2 T^{-2} / M \theta$

- pour les autres systèmes : $QM^{-1} \theta^{-1}$

Unités et valeurs pour l'eau :

Chaleur massique c				
	J/kg.°C	cal/g.°C	kcal/kg.°C	btu/lb.°F
J/kg.°C...	1	$2,389.10^{-4}$	$2,389.10^{-4}$	$2,389.10^{-4}$
cal/g.°C..	$4,1855.10^3$	1	1	1
kcal/kg.°C	$4,1855.10^3$	1	1	1
btu/lb.°F	$4,1855.10^3$	1	1	1

Ex. : c exprimé en J/kg.°C = 4 185,5 (c exprimé en btu/lb. °F)

On remarquera l'extrême simplicité de ce tableau de conversion qui tient à ce que dans les systèmes "pratiques" l'unité d'énergie thermique représente l'énergie fournie à l'unité masse d'eau (g, kg, lb) pour élever sa température de l'unité d'écart de température (°C, °F).

En fait, c_p varie très peu en fonction de la pression et sera noté simplement c. L'indice pourra alors indiquer la nature du milieu : c_w pour l'eau, c_r pour la "roche" constituant le squelette poreux, c_a pour le milieu aquifère (eau + solide).

I.1.7.4 Diffusivité thermique

Définition : rapport de la conductivité thermique à la chaleur massique pour l'unité de masse du fluide

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\rho c_e}$$

Dimensions et unités : $L^2 T^{-1}$

Pour l'eau :

$$\Lambda = \frac{6.02 \cdot 10^{-1}}{10^3 \times 1} = 6.02 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} = 6.02 \text{ cm}^2/\text{s}$$

I.2. Grandeurs physiques fondamentales. Notion de milieu continu équivalent

Toutes les grandeurs présentées sont définies dans l'espace Euclidien à trois dimensions ($\mathbb{R}^3$) orthonormé (système cartésien).

I.2.1 Pression de fluide, pression de pore

Rappel : Les fluides (par opposition aux solides) ne peuvent subir de contraintes (forces par unité de surface) tangentiellles. Leur état de contrainte en tout point est donc résumé par la notation matricielle suivante illustrée par le schéma AI-1.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

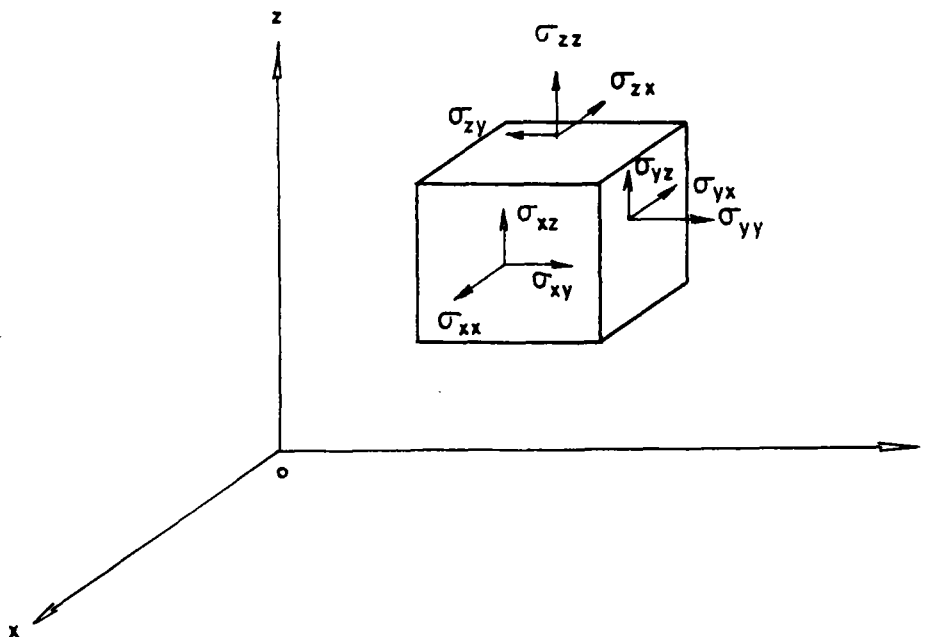


Figure AI-1 : Composantes de tension sur un volume élémentaire de milieu continu

La pression p est l'opposé de la contrainte normale (isotrope) qui règne au sein du fluide. C'est aussi, d'où le changement de signe, la force/unité de surface que le fluide exerce sur tout élément placé en ce point.

On appelle force de pression la force subie par le fluide en tout point du fait de l'existence d'un champ de contrainte (c'est-à-dire de pression). Ramenée à la masse volumique de fluide, elle s'exprime en notation matricielle par :

$$\vec{F}_p = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial p}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial p}{\partial z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p$$

Dans un milieu poreux, on appelle pression de pore la pression moyenne mesurée pour un volume de référence (V.R.), englobant un certain nombre de pores au sein desquels la pression de fluide peut être variable.

$$p = \frac{1}{\Delta V} \int_{(V.R.)} p \, dV$$

Le volume de référence considéré est en général le volume élémentaire de référence (V.E.R.) défini ci-après.

En hydrodynamique des milieux poreux, on ne considère que les pressions de pore, les seules mesurables en pratique. En général, on mesure ces pressions par référence à la pression atmosphérique prise égale à zéro et on les exprime en hauteur de fluide ("pression effective").

Unités : Rappelons les principales unités et équivalences (dimension $ML^{-1} T^{-2}$)

Dans le S.I., l'unité de pression est le Pascal : Pa.

$1 \text{ Pa} = 1 \text{ Newton/m}^2 = 10^5 \text{ dyne/10}^4 \text{ cm}^2 = 10 \text{ barye (C.G.S.)}$

mais on utilise beaucoup le bar = 10^6 barye qui peut être considéré comme un sous-multiple du Pa : $1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar}$.

Le tableau ci-après donne les équivalences entre certaines unités courantes (mais non homogènes) et le bar :

	bar	atmosphère	torr ou mm de mercure	mm d'eau
1 atmosphère =	1,01325	1	760	10 332,3
1 torr ou 1 mm de mercure } =	1,33322x10 ⁻³	$\frac{1}{760}$	1	13,5951
1 mm d'eau =	0,980665x10 ⁻⁴	0,967841x10 ⁻⁴	$\frac{1}{13,5951}$	1
1 kgf [*] /cm ² =	0,980665	0,967841	$\frac{10^4}{13,5951}$	10 ⁴ (ou 10m d'eau)

Aux U.S.A., l'unité la plus usitée est le p.s.i. = pound (force) per square inch :

$$1 \text{ p.s.i} = 6\,894,76 \text{ Pa} = 0,703 \text{ m d'eau.}$$

I.2.2 Vitesse particulaire. Vitesse de filtration ou Vitesse de Darcy. Volume élémentaire de référence. Milieu continu équivalent

La vitesse particulaire est la vitesse des particules de fluide au sein même des pores du milieu poreux. C'est la seule vitesse "réelle" (synonymes courants : vitesse intergranulaire, ou vitesse interstitielle).

Malheureusement, elle n'est pas accessible à la mesure et elle est sans doute très fluctuante, même en régime établi (régime permanent) :

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_e(t)$$

En fait, on ne peut mesurer que des flux massiques à travers des sections de surface ΔS non négligeables et, en tout cas, telles qu'elles incluent un nombre de pores assez grand pour que les fluctuations de vitesses particulières s'annulent en moyenne :

$$\left(\int_{\Delta S} \vec{v}_e \, ds = 0 \right)$$

* l'emploi du kgf est interdit depuis le 1er janvier 1962 (décret n°61-501 du 3.5.1961)

On appelle volume élémentaire de référence (V.E.R.) un volume limité par des surfaces répondant à ces critères. Par exemple, le cube de la figure AI.2.

Pour un tel volume, on appelle vitesse de filtration ou vitesse de Darcy le vecteur ayant pour composants les flux selon les trois directions principales. Et on a la relation :

$$V = \frac{\Delta S'}{\Delta S} \int_{(\Delta S)} \left(\vec{v} + v(t) \right) ds = \omega V_e$$

avec $\omega = \frac{\Delta S'}{\Delta S} = \frac{\text{Surface laissée à l'écoulement}}{\text{Surface totale}} = \text{porosité (dite cinématique, voir ci-après, §I.3.1)}.$

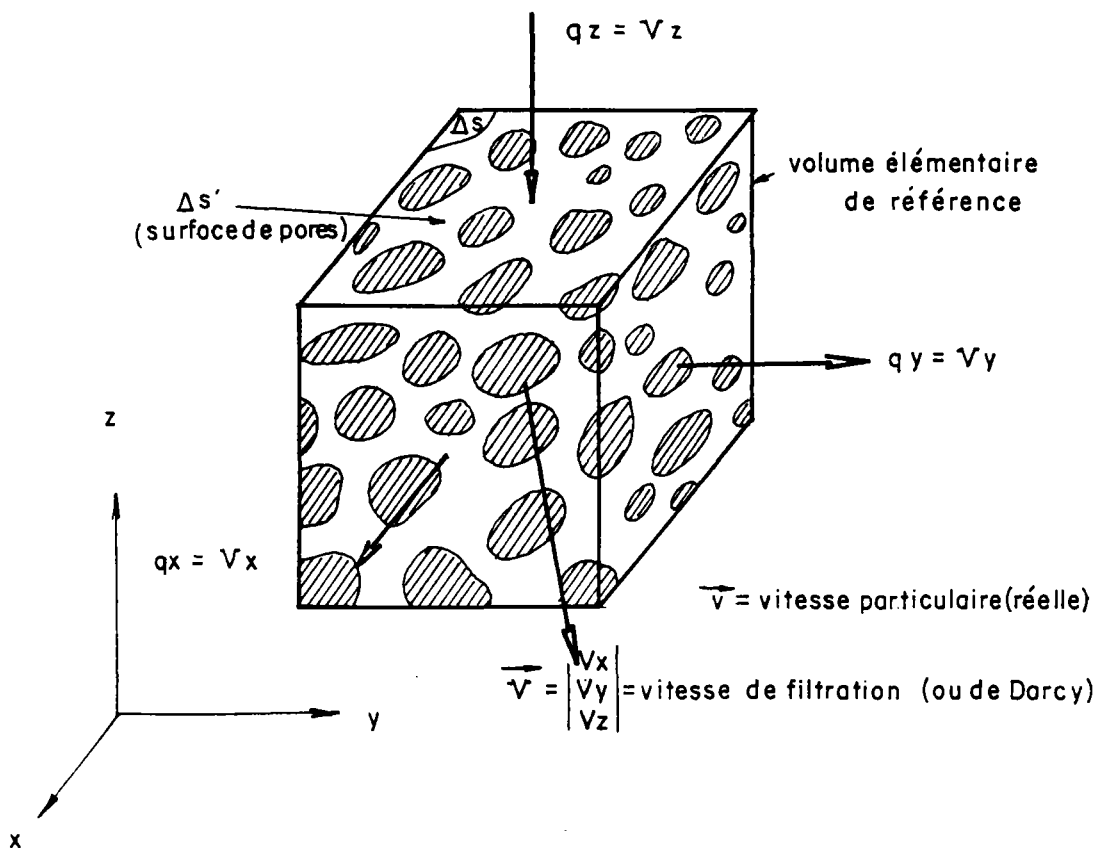


Figure AI-2 : Définition du volume élémentaire de référence et de la vitesse de filtration.

Les vecteurs vitesse de filtration et vitesse particulaire moyenne, ou vitesse effective, ainsi définis peuvent être rapportés au centre de gravité du V.E.R.

En décomposant le milieu réel en une juxtaposition de V.E.R., on obtient ainsi un champ de vecteurs "discret".

Le milieu continu équivalent est l'espace mathématique où le(s) champ(s) de vecteur(s) précédent(s) ont été complétés par continuité afin que les composantes de ces vecteurs puissent être considérées comme des fonctions continues et dérivables dans cet espace ($\mathbb{R}^3$ en général). Et on peut écrire en notation matricielle :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad \vec{V}_e = \begin{pmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \end{pmatrix}$$

Unités : - légale du S.I. : le m/s ou m³/sm²

- ou le cm/s (C.G.S.)

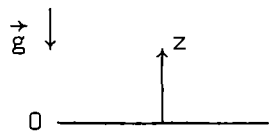
Eviter les unités non homogènes cm/j, m/j ou gpd (gallon per day).

I.2.3 Potentiel ou charge hydraulique et ses composantes

Le potentiel d'un fluide en un point est l'énergie qu'il faut développer pour porter l'unité de masse de ce fluide depuis un état de référence (arbitraire) à l'état qu'il présente en ce point.

L'expression du potentiel dépend donc du choix de l'état de référence et des conditions dans lesquelles est supposée se faire la transformation.

Pour ce qui concerne les fluides, et l'eau en particulier, dans le milieu géologique superficiel, on pose implicitement les choix et hypothèses suivants :

1°) Définition de l'état de référence	1/ origine des cotes arbitraire avec axe des z de bas en haut (sens contraire du gradient de pesanteur)	
	2/ origine des pressions : la pression atmosphérique (<u>supposée constante</u>)	$P_0 = P_{at} = 0$
	3/ masse spécifique de référence = masse spécifique à la pression 0	$\rho_0 = \rho \text{ à } p = P_{at}$
	4/ Vitesse du fluide nulle	$V_0 = 0$

2°) Conditions isothermes

3°) Eau peu salée et variations de salinité négligeables.

Dans ces conditions et pour un fluide compressible en écoulement assez rapide, on aura :

$$\Phi_m = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2}$$

énerg
énerg
énerg
de pression
de position
cinétique
~~~~~
~~~~~
~~~~~  
"énergie potentielle"

Mais, pour les écoulements à faible vitesse (dits rampants), comme les écoulements en milieu poreux d'un fluide incompressible (ou de compressibilité très faible induisant des variations de masse spécifique négligeable dans le champ de variation des pressions dans le système), cette expression générale du potentiel se simplifie en :

$$\Phi_m = \frac{p}{\rho} + gz \quad (\text{énergie par unité de masse})$$

ou, en ramenant l'énergie respectivement à l'unité de volume et à l'unité de poids, :

$$\Phi_V = p + \rho gz \quad (\text{énergie par unité de volume})$$

$$\phi = \frac{p}{\rho g} + z \quad (\text{énergie par unité de poids})$$

Cette dernière expression est la plus usitée pour exprimer l'énergie potentielle de l'eau dans un milieu poreux (superficiel et isotherme). Elle est alors dénommée "charge hydraulique".

Dans ces conditions, mais dans celles-ci seulement, la charge hydraulique est constituée de deux termes :

$$H_p = \frac{p}{\rho g} \quad \begin{array}{l} \text{énergie de pression par unité de poids} \\ = \text{hauteur piézométrique} \end{array}$$

$$H_z = z \quad \begin{array}{l} \text{énergie gravitaire par unité de poids} \\ = \text{charge altimétrique ou charge de position.} \end{array}$$

En ce qui concerne l'énergie de pression, il est d'usage de distinguer deux cas selon le mode pratique de mesure de ce terme (voir figure AI.3) :

- en milieu saturé, la pression de l'eau est supérieure à la pression atmosphérique et se mesure donc aisément par la hauteur de fluide ou "pression effective" dans un tube ou piézomètre ouvert au point considéré = la hauteur piézométrique. Dans ce cas, la charge hydraulique en ce point se matérialise par la cote du niveau piézométrique (ou en abrégé cote piézométrique) par rapport au plan de référence

$$\phi = H_p + z = \frac{p}{\rho g} + z$$

- en milieu non saturé, la pression de l'eau dans les pores est à la pression atmosphérique ; elle est donc, avec la convention prise pour l'état de référence, négative en valeur algébrique. On appelle encore "pression effective"  $h_p$  cette dépression mesurée en hauteur d'eau et en valeur algébrique. On appelle tension ou succion la valeur absolue de cette dépression

$$\psi = - \frac{p}{\rho g} = - h_p$$

La tension ou succion est mesurable par un tensiomètre, instrument qui réciproquement en permet la définition pratique (d'après terminologie de l'International Soil Science Society) :

"succion = pression négative, par rapport à la pression du gaz dans le milieu, à laquelle doit être portée une solution de composition identique à celle du sol pour se trouver en équilibre à travers une membrane poreuse avec l'eau du sol".

(voir figure AI.3).

Dans l'hypothèse (admise ci-dessus) où l'eau présente une salinité très faible, la succion est égale au potentiel capillaire ou (terme synonyme mais préférable) potentiel matriciel qui représente l'énergie à développer pour séparer l'eau de la matrice poreuse (à laquelle elle est en effet liée essentiellement, mais non uniquement, par les forces capillaires).

Au cas où la salinité de l'eau du sol serait non nulle, il faudrait en toute rigueur tenir compte dans l'expression de la charge hydraulique d'un potentiel osmotique dont la figure AI.3 suggère la définition (précisable par des considérations de thermodynamique). Il apparaît, d'après ce schéma, que, l'eau dans un tensiomètre se mettant, à terme plus ou moins long, en équilibre de teneur avec celle du sol, un tensiomètre mesure en général le potentiel matriciel.

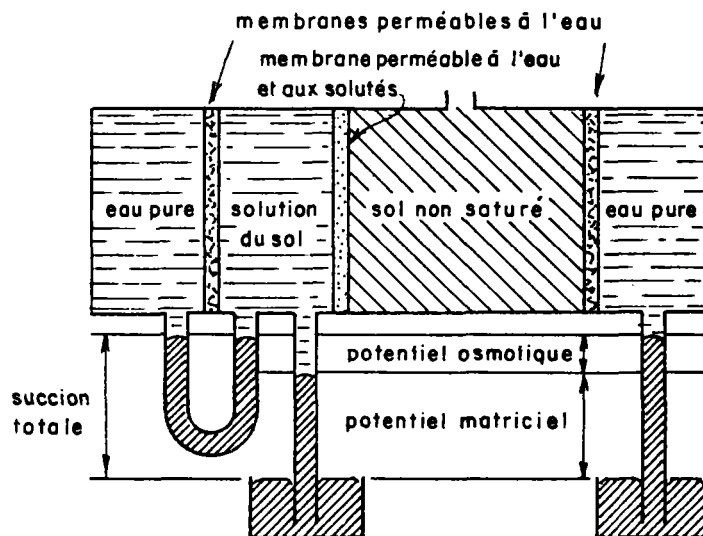


Figure AI-3 : Principe de la mesure du "potentiel matriciel" par un tensiomètre .  
Relations avec "succion totale" et "potentiel osmotique".

En définitive, la figure AI.4 résume les relations entre pressions et potentiels les plus usuels exprimés en énergie par unité de poids.

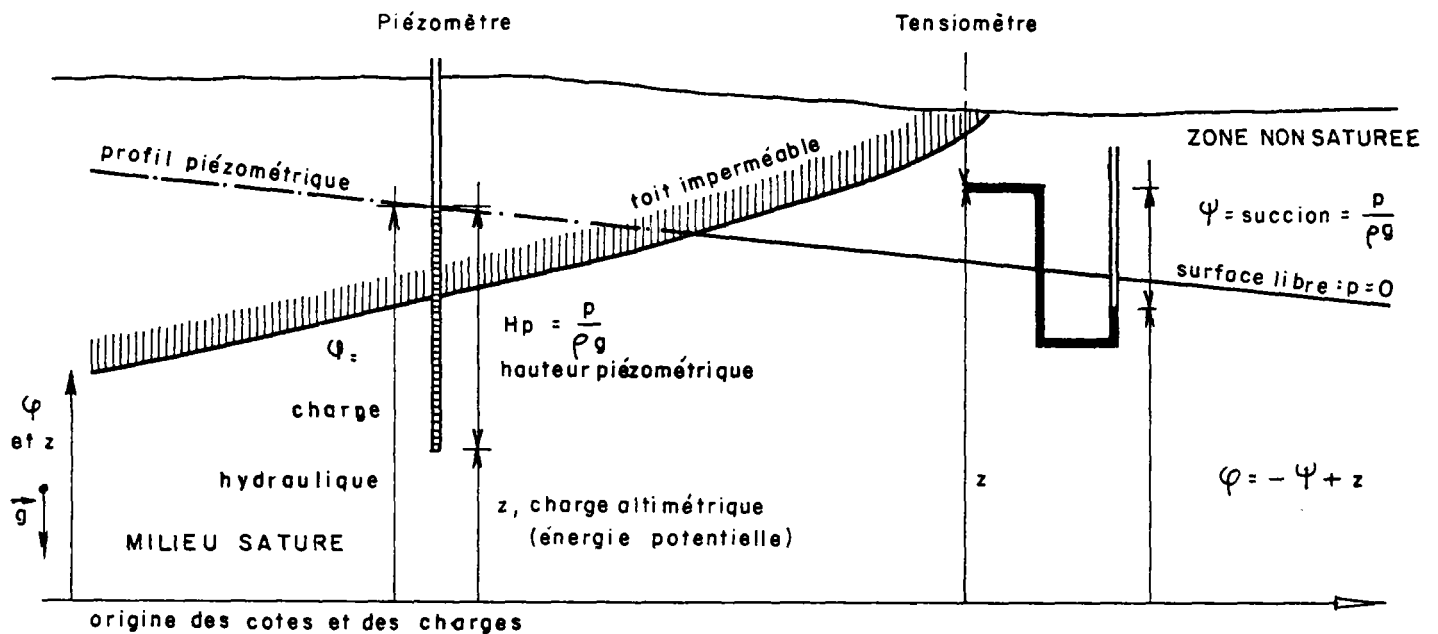


Figure AI-4 : Définition des références, notations et terminologies usuelles pour les potentiels en aquifère.

Dimension et unités :

potentiel par unité de masse :  $L^2 T^{-2}$

potentiel par unité de volume :  $ML^{-1} T^{-2}$  (pression)

potentiel par unité de poids :  $L$   
(ou charge)

Pour la charge, l'unité la plus répandue est le m.



### I.3. Propriétés physiques du "milieu"

On entend par "milieu" le "milieu continu équivalent" défini ci-dessus.

#### I.3.1 Porosité

Définition : On trouve dans la littérature de nombreuses définitions faisant intervenir le terme de porosité auquel est adjoit un qualificatif (cf. in : SCHOELLER, pp. 23-49 G. CASTANY et J. MARGAT, dictionnaire titres 4.47 et 4.52).

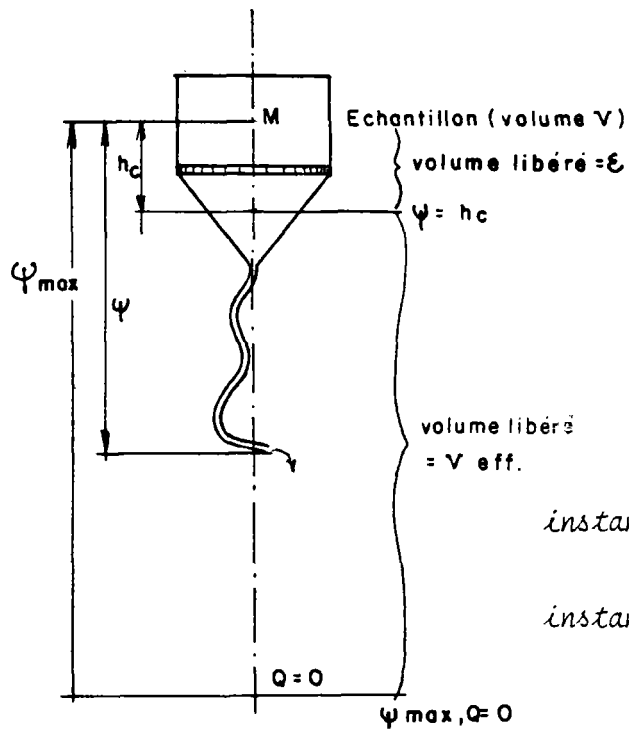
Du point de vue de la mécanique des fluides, il semble que, parmi toutes ces "porosités", trois seulement méritent d'être retenues :

- La porosité sensu stricto ou porosité intrinsèque, ou porosité totale : c'est pour un certain volume de milieu poreux (au moins égal au volume de référence) le rapport du volume des vides au volume total du milieu poreux, soit :

$$\omega = \frac{V_v}{V_t} \quad V_v : \text{volume des vides, } V_t : \text{volume total}$$

- La porosité efficace (encore appelée capacité d'absorption ou porosité libre ou porosité de drainage) ou "field capacity" des Américains. C'est le rapport au volume total,  $V_t$ , du volume d'eau effectif,  $V_{eff}$ , que peut libérer le milieu poreux sous l'action des seules forces de gravité au cours d'une expérience (drainage interne) de désaturation selon le principe décrit figure AI.5.

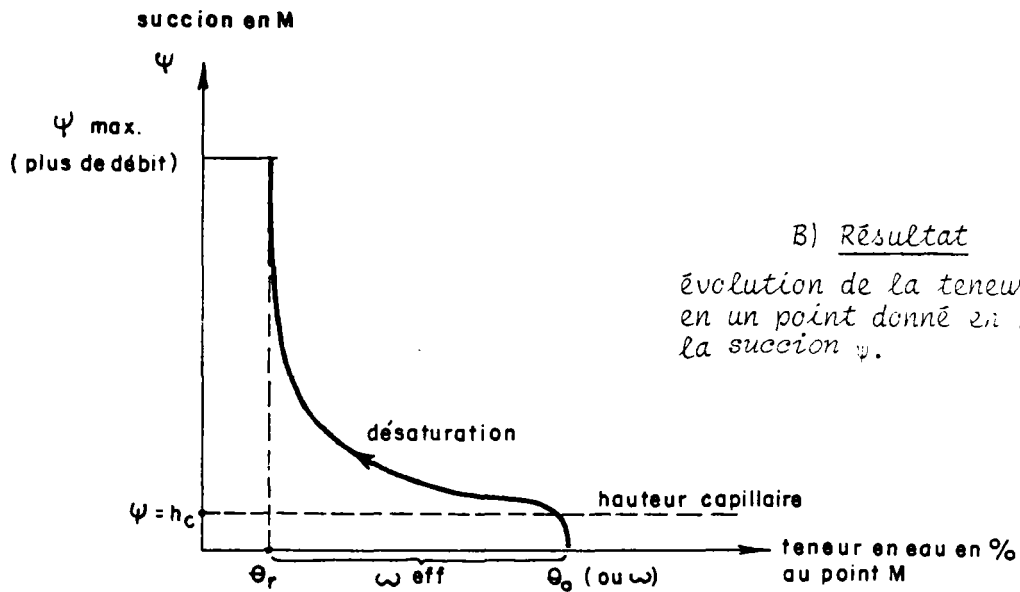
Remarque : Porosité sensu stricto  $\omega$  et porosité efficace  $\omega_{eff}$  sont numériquement égales à la teneur en eau volumique du sol saturé  $\theta_0$  et à la variation de la teneur en eau entre la saturation et l'état de saturation résiduelle ( $\theta_r$ ) mesurées lors d'une expérience de désorption sous l'action de la seule pesanteur (voir schéma figure AI.5.)



#### A) Schéma expérimental

instant 0 = échantillon saturé  
teneur en eau  $\theta_0$  (en M)

instant final = débit  $Q = 0$   
teneur en eau  $\theta_r$  (en M)



#### B) Résultat

évolution de la teneur en eau  $\theta$   
en un point donné en fonction de  
la suction  $\psi$ .

Figure AI-5 : Relations entre porosité, teneur en eau, suction

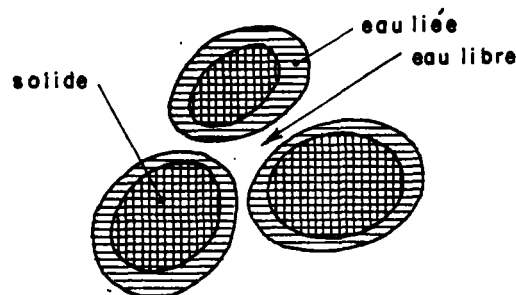
- La porosité cinématique déjà mentionnée ci-dessus au § I.2.2. C'est plutôt un rapport entre surfaces\* considérées sur le V.E.R. servant à la définition de la vitesse de filtration (fig. A2)

$$\omega_{cin} = \frac{\text{Surface laissée à l'écoulement du fluide}}{\text{Surface totale}}$$

avec (schéma ci-contre) :

"Surface laissée à l'écoulement = surface totale - solide - eau liée

On peut admettre en première approximation :  $\omega_{cin} \neq \omega_{eff}$ .



Unités : Les porosités sont des nombres sans dimension. En général, on les exprime en pour cent.

### I.3.2 Perméabilité

Définitions : On doit distinguer (même pour les études d'hydraulique) deux notions différentes :

- le coefficient de perméabilité ou mieux "perméabilité de DARCY" K qui se définit à partir de la relation expérimentale de DARCY (conditions résumées fig.A16, ci-après, § II.2)

$$Q = K \frac{\Delta\phi}{\Delta l} S$$

Q : débit volumique ( $L^3T^{-1}$ ) d'un fluide donné dans des conditions de température et de pression fixées

$\phi$  : charge hydraulique (L)

l : longueur (L)

S : section ( $L^2$ ).

K caractérise donc un couple : fluide - milieu poreux dans un état particulier.

- la perméabilité intrinsèque ou perméabilité sensu stricto k, qui se définit à partir de considérations d'analyse dimensionnelle par la formule :

---

\* On démontre que le rapport entre surfaces est isométrique au rapport entre les volumes correspondants dans le même V.E.R.

$$K = \frac{k\gamma}{\mu}$$

$\gamma$  : poids spécifique du fluide en écoulement (=  $\rho g$ )

$\mu$  : viscosité

$k$  caractérise le seul milieu poreux.

Dimensions : Aussi bien l'analyse dimensionnelle que les formules ci-dessus permettent de trouver :

$$K = L T^{-1}$$

$$k = L^{-2}$$

Unités : On distingue des unités homogènes et des unités non homogènes, mais consacrées par l'usage.

- unités homogènes :

. perméabilité de DARCY : dans le S.I., l'unité est le m/s.

C'est aussi la plus employée.

. perméabilité intrinsèque : Dans le S.I., on doit employer le  $m^2$ . L'unité C.G.S. ( $cm^2$ ) a reçu le nom de perm. Les anglo-saxons emploient fréquemment le  $ft^2$ .

- unités d'usage

. perméabilité de DARCY : les hydrogéologues américains emploient le MEINZER

$$1 \text{ Meinzer} = \frac{1 \text{ gallon/day}}{\text{square foot}} \text{ pour } \frac{\Delta\phi}{\Delta l} = 1 \text{ et une eau à } 15^\circ.$$

. perméabilité intrinsèque : dans l'industrie pétrolière, on emploie le DARCY :

$$1 \text{ Darcy} = \frac{1 \text{ centipoise} \times 1 \text{ cm}^3/\text{s}}{1 \text{ cm}^2}$$

1 atmosphère/cm

ou son sous-multiple le milli Darcy =  $10^{-3}$  Darcy.

### Relations entre les unités les plus employées

(pour déterminer ces relations, il est recommandé de passer par le système C.G.S.)

#### - perméabilité intrinsèque :

en se rappelant que :

$$1 \text{ centipoise} = 0,01 \text{ dyn.s./cm}^2$$

$$\text{et } 1 \text{ atmosphère} = 1,013 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$$

on trouve :

$$1 \text{ Darcy} = 0,987 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2 \neq 10^{-8} \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ Darcy} = 1,06 \cdot 10^{-11} \text{ ft}^2$$

#### - perméabilité de DARCY

De même, en notant que :

$$1 \text{ ft} = 30,5 \text{ cm} ; 1 \text{ gallon} = 3,78 \text{ l}$$

on trouve :

$$1 \text{ Meinzer} = 0,134 \text{ ft/day} = 4,72 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}$$

$$1 \text{ m/s} = 2,12 \cdot 10^{-6} \text{ Meinzer}$$

### Equivalences entre k et K

Si l'on prend comme fluide une eau douce à 15° et au voisinage de la pression atmosphérique, on a des relations fixes entre la perméabilité intrinsèque d'un matériau et la perméabilité de DARCY du couple eau - matériau :

Ainsi, pour  $K = 1 \text{ Darcy}$ , on a :

$$K = \frac{9,87 \cdot 10^{-9} \times 981}{10^{-2}} = 9,7 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s, soit}$$

$$K = 1 \text{ Darcy} \approx 9,7 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} \neq 10^{-5} \text{ m/s} (\approx \text{se dit "équivalent" à})$$

$$K = 1 \text{ Meinzer} \approx 4,72 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s} \neq 5 \cdot 10^{-2} \text{ Darcy}$$

En pratique, nous retiendrons essentiellement :

|                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $1 \text{ Darcy} \neq 10^{-8} \text{ cm}^2 \approx 10^{-5} \text{ m/s}$<br>(ou perm) |
|--------------------------------------------------------------------------------------|

pour l'eau à 20°C.

TABLEAU I - RECAPITULATIF DES PRINCIPALES UNITES MECANIQUES

| Grandeur<br>ou<br>Coefficient                        | Notation | Dimension       | Unités                |                                |                                                     |                                                                     | Valeurs à retenir<br><br>et principales relations entre unités                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------|----------|-----------------|-----------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                      |          |                 | S.I.                  | C.G.S.                         | "pratique"<br>Europe                                | "pratique"<br>U.S.A.                                                |                                                                                                                                                                                                                              |
| Masse<br>spécifique                                  | $\rho$   | $ML^{-3}$       | kg/m <sup>3</sup>     | g/cm <sup>3</sup>              |                                                     | lb.sec <sup>2</sup> /ft <sup>4</sup>                                | Eau à 4° : $\gamma = 1 \text{ kg/dm}^3$<br>$1 \text{ g/cm}^3 = 193 \text{ lb s}^2/\text{ft}^4$                                                                                                                               |
| Poids spé-<br>cifique<br>( $\gamma = \rho g$ )       | $\gamma$ | $ML^{-2}T^{-2}$ | Newton/m <sup>3</sup> | dyne/cm <sup>3</sup>           | kg p/m <sup>3</sup> *                               | lb/ft                                                               | Eau à 4° : $\gamma = 9806,55 \text{ N/m}^3$<br>$= 981 \text{ dyn/cm}^3 = 1 \text{ gp}^*/\text{cm}^3$<br>$1 \text{ lb/ft}^3 = 15.8 \text{ dyn/cm}^3 = 158 \text{ N/m}^3$                                                      |
| Viscosité<br>dynamique                               | $\mu$    | $ML^{-1}T^{-1}$ | Poiseuille<br>Pl      | Poise<br>Po                    |                                                     | centipoise<br>et lb.sec/ft <sup>2</sup>                             | Eau à 20° : $\mu \neq 10^{-3} \text{ Pl} = 1 \text{ cp}$<br>$= 2.08 \cdot 10^{-5} \text{ lb.s/ft}^2$<br>$1 \text{ lb/ft}^2 = 480 \text{ poises} = 48 \text{ Pl}$                                                             |
| Viscosité<br>cinématique<br>$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ | $\nu$    | $L^2T^{-1}$     | m <sup>2</sup> /s     | stokes<br>(cm <sup>2</sup> /s) |                                                     | ft <sup>2</sup> /sec                                                | Eau à 20° $\neq 1 \cdot 10^{-2} \text{ stokes} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$<br>$= 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{sec}$<br>$1 \text{ ft}^2/\text{sec} = 925 \text{ stokes}$                                  |
| Coefficient<br>de compres-<br>sibilité               | $\beta$  | $M^{-1}LT^2$    | (Pa) <sup>-1</sup>    | (barye) <sup>-1</sup>          | kg <sup>*</sup> f/cm <sup>2</sup>                   | (psi) <sup>-1</sup><br>(atm) <sup>-</sup><br>(m d'eau) <sup>-</sup> | Eau à 20°<br>$\neq (5 \cdot 10^{-6} \text{ m d'eau})^{-1} \neq 5 \cdot 10^{-5} (\text{atm})^{-1}$<br>$\neq 5 \cdot 10^{-11} (\text{barye})^{-1} = 510^{-10} (\text{Pa})^{-1}$                                                |
| Pressions                                            | $p$      | $ML^{-1}T^{-2}$ | Pascal                | barye                          | kg <sup>*</sup> f/cm <sup>2</sup><br>atm<br>m d'eau | psi                                                                 | $1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2 = 10 \text{ m d'eau} = 0,968 \text{ atm}$<br>$= 0,981 \text{ bar} =$<br>$1 \text{ at} = 1,033 \text{ kg}^*/\text{cm}^2 = 1,013 \text{ bar}$<br>$1 \text{ psi} = 0,0703 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$ |
| Perméabilité<br>intrinsèque                          | $k$      | $L^2$           | m <sup>2</sup>        | perm<br>(cm <sup>2</sup> )     | Darcy                                               | ft <sup>2</sup>                                                     | $1 \text{ Darcy} \neq 10^{-8} \text{ cm}^2 = 10^{-5} \text{ m/s}$<br>pour l'eau à 15°                                                                                                                                        |
| Coefficient<br>de Darcy                              | $K$      | $LT^{-1}$       | m/s                   | cm/s                           |                                                     | Meinzer<br>ou gpd/ft <sup>2</sup>                                   | $1 \text{ Meinzer} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Darcy}$<br>$= 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s} = 4,7 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$                                                                                                    |

### I.3.3 Flux de dispersion - Tenseur de dispersion - Dispersivité

La dispersion est le transfert d'un soluté dissous dû aux variations de la vitesse particulaire par rapport à la vitesse moyenne.

Au niveau de chaque V.E.R., il se traduit par un flux massique de dispersion qui s'exprime par :

$$Q_D = - \overline{D} \vec{\text{grad}} C$$

avec :

$C$  = concentration massique du soluté (dimension  $ML^{-3}$ )

$\overline{D}$  = tenseur de dispersion dont l'axe principal est colinéaire à la vitesse moyenne

Exprimé dans un système orthonormé lié à cette vitesse :

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} D_L & 0 & 0 \\ 0 & D_T & 0 \\ 0 & 0 & D_T \end{vmatrix}$$

$D_L$  est le coefficient de dispersion longitudinale

$D_T$  est le coefficient de dispersion transversale.

On admet pour les milieux poreux et les gradients de vitesse courants en hydrogéologie

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} \alpha_L & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_T \end{vmatrix} \rightarrow V_e$$

$\alpha_L$  est la dispersivité longitudinale

$\alpha_T$  est la dispersivité transversale.

#### Dimensions et unités

pour les dispersions longitudinale et transversale :  $L^2 T^{-1}$

soit le  $m^2/s$  en S.I.

pour les dispersivités :  $L$ , soit le  $m$

ordre de grandeur pour les milieux aquifères, d'après essais\* sur le terrain :  
 $0,2 < \alpha_L < 20$ .

---

\* Voir notamment J.P. SAUTY - Contribution à l'identification des paramètres de dispersion dans les aquifères par interprétation des expériences de traçage. Grenoble, 1977. Thèse de Docteur-Ingénieur.

### I.3.4 Propriétés thermiques du milieu

L'analyse des mécanismes de transferts thermiques conduit à distinguer :

- propriétés thermiques de la roche constituant la matrice solide définies comme pour tout milieu continu et donc comme pour l'eau (voir ci-dessus § I.1.7.2)
    - . conductivité thermique :  $\lambda_r$
    - . capacité calorifique :  $C_r$
    - . auxquels il faut ajouter, quand on distingue les transferts de chaleur en phase solide de ceux en phase liquide, un coefficient de transfert,  $E_t$ , entre les deux phases défini par :
 
$$Q_e = E_t (\theta_f - \theta_s) \times \Delta T \times \Delta V$$
 soit  $E_t$  = quantité de chaleur par unité de temps (flux thermique) échangée entre le solide et le fluide pour l'unité de volume du milieu  
 dimensions :  $Q/L^3T$  (J/m<sup>3</sup> ou cal/cm<sup>3</sup>.s)
  - propriétés du milieu continu équivalent thermique (défini comme le milieu équivalent hydraulique)
- L'indice permet de distinguer les propriétés du milieu aquifère  $\lambda_a$ ,  $C_a$  et celles de l'éponte encaissante  $\lambda_e$ ,  $C_e$ .

Le tableau ci-dessous récapitule quelques valeurs des conductivités thermiques et capacités calorifiques des milieux géologiques (roches ou aquifères).

| Milieu           | Conductivité thermique |                       | Capacité calorifique ou chaleur massique |                       |
|------------------|------------------------|-----------------------|------------------------------------------|-----------------------|
|                  | S.I. : W/m°C           | C.G.S. cal/cm.s.°C    | S.I. : J/kg °C                           | C.G.S. cal/g °C       |
| Air              | 2.43 10 <sup>-3</sup>  | 5.8 10 <sup>-5</sup>  | 1.004 10 <sup>3</sup>                    | 2.40 10 <sup>-1</sup> |
| Eau              | 6.02 10 <sup>-1</sup>  | 1.44 10 <sup>-3</sup> | 4.1855 10 <sup>3</sup>                   | 1.                    |
| Roches (moyenne) | 1.76                   | 4.2 10 <sup>-3</sup>  |                                          |                       |
| Granite          | 2.51                   | 6 10 <sup>-3</sup>    | 8.79 10 <sup>2</sup>                     | 2.1 10 <sup>-1</sup>  |
| Calcaire         | 1.67                   | 4 10 <sup>-3</sup>    | 9.21 10 <sup>2</sup>                     | 2.2 10 <sup>-1</sup>  |
| Grès             | 2.51                   | 6 10 <sup>-3</sup>    | 9.63 10 <sup>2</sup>                     | 2.3 10 <sup>-1</sup>  |
| Sol (moyenne)    | 9.63 10 <sup>-1</sup>  | 2.3 10 <sup>-3</sup>  | 8.37 10 <sup>2</sup>                     | 2 10 <sup>-1</sup>    |
| Sable sec        | 2.64 10 <sup>-1</sup>  | 6.3 10 <sup>-4</sup>  | 7.95 10 <sup>2</sup>                     | 1.9 10 <sup>-1</sup>  |
| Sable humide     | 5.86 10 <sup>-1</sup>  | 1.4 10 <sup>-3</sup>  | 1.004 10 <sup>3</sup>                    | 2.4 10 <sup>-1</sup>  |



## 2. LES LOIS FONDAMENTALES DE L'HYDRODYNAMIQUE DES MILIEUX POREUX

Elles résultent de l'application des principes fondamentaux de la mécanique à la masse fluide en mouvement et s'expriment à l'aide des grandeurs et paramètres définis dans le milieu continu équivalent.

### II.1 Principe de conservation - Equation de continuité

Le principe de conservation de la masse fluide s'exprime par l'équation de continuité qui s'obtient très simplement (il y a d'autres façons) en faisant la balance de matériel sur un élément infinitésimal cubique :

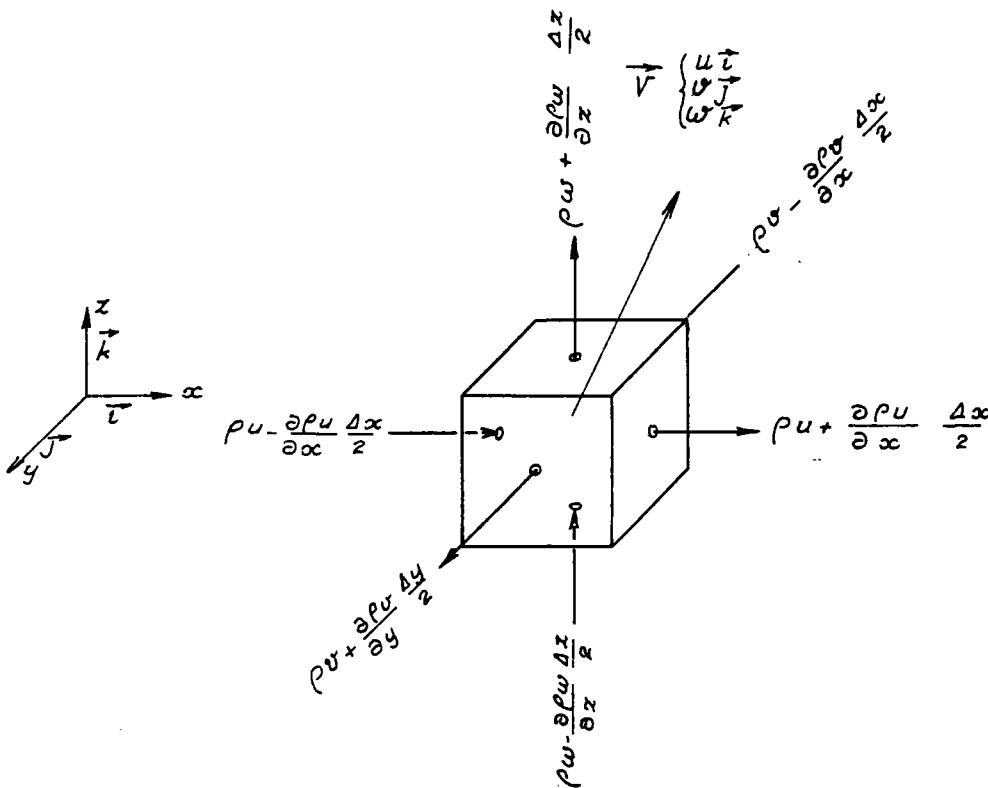


Figure AI.6 : Conservation de la masse dans un volume infinitésimal

Pour cet élément, le principe de conservation s'énonce physiquement ainsi :

*Toute variation du flux massique total algébrique à travers les parois du cube se traduit par une variation égale de la masse emmagasinée dans le cube ;*

soit sous forme mathématique :

$$\begin{array}{c}
 \text{(signe d'après convention)} \\
 \begin{array}{ccc}
 \text{Flux entrant} & \pm & \text{Flux sortant} \\
 \hline
 \text{selon } x = \left( \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{2} (\Delta y \cdot \Delta z) & & \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} (\Delta y \cdot \Delta z) \\
 \text{selon } y = \left( \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) \frac{\Delta y}{2} (\Delta x \cdot \Delta z) & & \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} (\Delta x \cdot \Delta z) \\
 \text{selon } z = \left( \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \frac{\Delta z}{2} (\Delta x \cdot \Delta y) & & \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} (\Delta x \cdot \Delta y)
 \end{array}
 \end{array}$$

Variation de la masse d'eau du cube, soit :  $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} \Delta x \Delta y \cdot \Delta z$

Si on admet (convention la plus usuelle) : flux sortant > 0, on trouve les deux formes classiques de l'équation de continuité :

$$(1a) \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = - \frac{\partial(\rho w)}{\partial t}$$

ou en écriture vectorielle :

$$(1b) \quad \text{div}(\rho \vec{V}) = - \frac{\partial(\rho w)}{\partial t}$$

### Remarques

1. Soulignons que, dans ce qui précède,  $\vec{V}(u,v,w)$  désigne la vitesse macroscopique du fluide, c'est-à-dire un flux par unité de surface, et non la vitesse microscopique réelle des particules fluides.
2. On notera que, dans certains cas particuliers, il est plus avantageux d'écrire l'équation de conservation en considérant un élément de volume non cubique (voir ci-après).

## II.2 Equation d'équilibre - Loi de DARCY

Selon le principe fondamental de la dynamique, pour tout système en mouvement, il y a équilibre entre les forces d'inertie engendrées par le mouvement et les forces agissant pour créer ce mouvement :

$$m \vec{I} = \Sigma \vec{F}$$

$m$  = masse

$\vec{I}$  = accélération du mouvement

$\Sigma \vec{F}$  = forces agissant sur le système.

Pour les fluides, cette loi s'applique strictement à chaque particule et conduit à l'équation de NAVIER STOCKES qui met en jeu les paramètres du fluide ( $\rho$  et  $\mu$ ) et les vitesses et pressions particulières. Mais cette loi s'applique uniquement dans le milieu réel où sont distingués fluide et solide jusqu'à l'échelle du pore.

Il faut donc trouver pour le milieu continu équivalent une forme convenable de l'équation d'équilibre.

L'expérience de DARCY, le raisonnement par analogie et l'analyse dimensionnelle permettent de proposer une telle forme, dite équation de DARCY généralisée, qui représente donc dans le cas particulier des écoulements en milieu poreux, et avec le modèle conceptuel choisi pour les transferts en masse, la principe fondamental de la dynamique (ou principe de conservation de la quantité de mouvement).

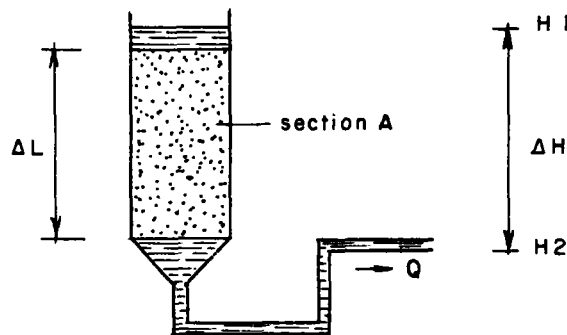


Figure A1-7 : Relation expérimentale de DARCY

En effet, l'expérience de DARCY suggère que le flux traversant une section de milieu poreux, c'est-à-dire la vitesse de filtration, est proportionnelle à l'énergie ( $\Delta h$ ) développée le long de la trajectoire de l'écoulement ( $\Delta L$ ) donc aux forces agissant pendant ce parcours ( $\Delta H \approx F \times \Delta L \rightarrow Q/A \approx K \frac{F \times \Delta L}{\Delta L}$ )

D'autre part, du point de vue conceptuel, ce flux doit être inversement proportionnel à la viscosité du fluide et proportionnel à la conductivité hydraulique ou perméabilité intrinsèque du milieu.

D'où la loi de DARCY généralisée à laquelle on peut donner la valeur d'un postulat exprimant pour le milieu continu équivalent le principe fondamental de la mécanique :

$$(2) \begin{cases} V_x = \frac{k_x}{\mu} \left( - \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \right) \\ V_y = \frac{k_y}{\mu} \left( - \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \right) \\ V_z = \frac{k_z}{\mu} \left( - \frac{\partial p}{\partial z} + F_z \right) \end{cases}$$

avec  $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$  = vitesse de filtration ou vitesse de DARCY

$$k = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} = \text{tenseur de perméabilité pour un terrain supposé anisotrope}$$

(les axes principaux d'anisotropie ayant été pris comme axes de référence)

$p$  = pression de pore

-  $\vec{\text{grad}} p$  = force de pression } appliquées à l'unité

$\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$  = résultante des forces de volume } de masse  $\rho$

$\mu$  = viscosité du fluide

Dans le cas où les seules forces de volume sont les forces de pesanteur, on a :

$$\vec{F} = - \rho \vec{\text{grad}} g z \text{ (avec axe } z \text{ de bas en haut)}$$

et il vient

$$(3) \quad \boxed{\vec{V} = - \frac{k}{\mu} (\vec{\text{grad}} p - \rho \vec{g})} \quad (\vec{g} \text{ orienté de haut en bas})$$

et pour les liquides non compressibles :

$$\vec{V} = - \frac{k \rho g}{\mu} \left( \vec{\text{grad}} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \right)$$

forme également admissible pour les fluides peu compressibles au voisinage des conditions normales et qui s'écrit, en faisant intervenir le potentiel hydraulique, :

$$(4) \quad \boxed{\vec{V} = - \frac{k\rho g}{\mu} \vec{\text{grad}} \phi} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\vec{V} = - K \vec{\text{grad}} \phi}$$

avec  $\rho = \rho_0$  et  $\phi = \frac{p}{\rho g} + z$ .

### II.3 Equations d'état

Pour les fluides en général, les équations d'état expriment les variations des propriétés physiques en fonction des paramètres d'état thermodynamiques. Ce sont donc des résultats de la forme :

$$f(p, \rho, \theta) = 0$$

$$f'(p, \mu, \theta) = 0$$

Dans l'eau, au voisinage des conditions normales ( $p = p_0$ ,  $\theta = \theta_0$ ), ces équations se ramènent en fait à :

$$(5) \quad \rho = \rho_0 e^{-\beta(p_0 - p)} \quad \text{pour la masse spécifique}$$

$$\mu = \mu(\theta) \quad \text{pour la viscosité.}$$

### II.4 Autres équations de transfert

L'eau peut servir de véhicule soit à des produits qu'elle dissout (ou solutés), soit à de l'énergie thermique (calories).

#### II.4.1 Transferts de solutés

##### II.4.1.1 Définitions et concepts de base à l'échelle microscopique

Soit du un volume élémentaire de fluide considéré à l'échelle microscopique, c'est-à-dire assez grand pour contenir un nombre élevé de particules (autorisant une prise de moyenne sur les paramètres particulières) et suffisamment petit pour être entièrement inclus dans un pore.

A cette échelle, on peut définir les notions suivantes :

- solution : mélange constitué d'un fluide solvant (pour nous l'eau) et d'un certain nombre (N) de produits dissous (ou solutés :  $\alpha$ ).

- masses spécifiques : Il faut distinguer :

$$\rho = \frac{dm}{du} = \text{masse spécifique de la solution}$$

$$\rho_\alpha = \frac{dm_\alpha}{du} = \text{masse spécifique (ou concentration) des solutés avec } dm \text{ et } dm_\alpha \text{ masses de solution ou de solutés contenus dans } du.$$

Et on aura :

$$(7) \quad \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \frac{dm_\alpha}{du} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N dm_\alpha}{du} = \frac{dm}{du} = \rho$$

- Vitesses microscopiques :

$\vec{v}_\alpha$  : vitesse microscopique de chaque soluté  $\alpha$  : moyenne des vitesses particulières pour le volume  $du$ .

$\vec{v}^*$  : vitesse massique de la solution

$$(8) \quad \vec{v}^* = \sum \rho_\alpha \vec{v}_\alpha / \sum \rho_\alpha = \sum \rho_\alpha \vec{v}_\alpha / \rho$$

(c'est la paramètre qui serait mesuré par un tube de Pitot placé dans  $du$  :  $\rho \vec{v}^*$  représente donc la quantité de mouvement du fluide).

$\vec{v}'$  : vitesse volumique de la solution

$$\vec{v}' = \sum \rho_\alpha u_\alpha \vec{v}_\alpha$$

avec  $\sum \rho_\alpha u_\alpha = 1$ ,  $u_\alpha$  = volume spécifique de chaque soluté.

L'usage de  $\vec{v}'$  est nécessaire quand les variations de concentration entraînent des variations de volume de la solution.

- Relation entre vitesses microscopiques : diffusion moléculaire

Du fait des variations de vitesse particulière autour des vitesses microscopiques moyennes, il existe des flux de diffusion moléculaire de chaque soluté que l'on peut exprimer par la loi de FICK (soit par exemple dans le cas d'un système à deux solutés  $\alpha$  et  $\beta$ ) :

$$(9) \quad \vec{q}_\alpha^* = \rho_\alpha (\vec{v}_\alpha - \vec{v}^*) = - \rho D_m \vec{\text{grad}}(\rho_\alpha / \rho)$$

$$(10) \quad \vec{q}_\alpha' = \rho_\alpha (\vec{v}_\alpha - \vec{v}') = - D_m \vec{\text{grad}} \rho_\alpha$$

( $D_m$  = coefficient de diffusion moléculaire du corps  $\alpha$  (par rapport à  $\beta$ ) en fluide libre)

et pour la solution

$$(11) \quad \vec{q}_d^* = \rho (\vec{v}^* - \vec{v}') = - D_m \vec{\text{grad}} \rho$$

#### II.4.1.2 Notions et équations fondamentales au niveau du V.E.R. (ou milieu contenu équivalent)

En étendant par prise de moyenne les concepts précédents au niveau du volume élémentaire de référence (V.E.R.), on peut établir\* l'équation de conservation des solutés et du fluide pour des grandeurs définies dans le milieu continu équivalent (surlignées dans ce qui suit).

1°) Pour les solutés :

Equation de conservation :

$$(12) \quad \frac{\partial \overline{\rho_\alpha}}{\partial t} = \text{div} (\overline{D_m} \overrightarrow{\text{grad}} \overline{\rho_\alpha}) - \text{div} (\overline{\rho_\alpha} \overrightarrow{V'_\alpha})$$

où  $\overline{\rho_\alpha} \overrightarrow{V'_\alpha}$  le flux massique du soluté au niveau du V.E.R. se décompose en

$$(13) \quad \overline{\rho_\alpha} \overrightarrow{V'_\alpha} = \overline{\rho_\alpha} \overrightarrow{V'_{\alpha}} + \overset{\circ}{\rho}_\alpha \overrightarrow{V'_\epsilon}$$

avec :

$\overrightarrow{V'_{\alpha}} = \overrightarrow{V'_{\alpha}}$  = vitesse (volumique) moyenne ou vitesse de convection

$\overrightarrow{V'_\epsilon} = \overrightarrow{V'_\epsilon}$  = vitesse de fluctuation

$\overset{\circ}{\rho}_\alpha$  = masse spécifique dans le V.E.R. (considéré comme stationnaire).

$\overline{\rho_\alpha} \overrightarrow{V'_{\alpha}}$  = flux de transfert par convection

$\overset{\circ}{\rho}_\alpha \overrightarrow{V'_\epsilon}$  = flux de transfert par dispersion cinématique (dû aux fluctuations de  $v'_\alpha$  dans le V.E.R.).

Ce dernier terme est en général explicité par une relation de forme analogue à la loi de FICK (on peut considérer cette expression comme un principe)

$$(14) \quad \overset{\circ}{\rho}_\alpha \overrightarrow{V'_\epsilon} = - D'_{\text{cin}} \overrightarrow{\text{grad}} \overline{\rho_\alpha}$$

soit pour la loi de conservation du soluté :

$$(15) \quad \frac{\partial \overline{\rho_\alpha}}{\partial t} = \text{div} \left[ (D_{\text{cin}} + \overline{D_m}) \overrightarrow{\text{grad}} \overline{\rho_\alpha} \right] - \text{div} (\overline{\rho_\alpha} \overrightarrow{V'_\alpha})$$

---

\* voir par exemple BEAR, 1972, pp. 98 à 104.

2°) De même pour la loi de conservation du fluide

$$(16) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \text{div} \{ (\bar{D}_{\text{cin}} + \bar{D}_m) \vec{\text{grad}} \bar{\rho} \} - \text{div} \{ \bar{\rho} \vec{V}' \}$$

ou encore, en exprimant par rapport à la vitesse massique :

$$(17) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \text{div} \{ \bar{\rho} \vec{V}^* \}$$

avec, comme pour les vitesses volumiques, :

$$(18) \bar{\rho} \vec{V}^* = \bar{\rho} \vec{V} + \bar{\rho} \vec{V}_e^*$$

flux  
massique = flux  
total = convectif + dispersif

$$(18') = \bar{\rho} \vec{V} + \bar{\rho} \vec{V}_e^* \quad (V^* \text{ et } V_e^* \text{ moyennes au niveau du V.E.R.})$$

En admettant également pour la flux dispersif une loi de diffusion :

$$(19) \bar{\rho} \vec{V}_e^* = - \bar{D}_{\text{cin}}^* \vec{\text{grad}} \bar{\rho}$$

Si on fait l'hypothèse (conceptuelle)  $\bar{D}'_{\text{cin}} \equiv \bar{D}_{\text{cin}}^* = \bar{D}_{\text{cin}}$ ,

on trouve pour le milieu équivalent, comme pour le milieu fluide :

$$(20) V^* - V' = - \bar{D}_{\text{cin}} \vec{\text{grad}} \bar{\rho}$$

Remarques :

1. Dans ce qui précède, la vitesse massique moyenne à l'échelle du V.E.R. qui a été notée  $\vec{V}^*$  est conceptuellement identique à la vitesse effective  $\vec{V}_e$  définie pour un flux homogène ci-dessus (§ I.2.2) à partir de la vitesse de DARCY

$$\vec{V}^* \equiv \vec{V}_e = \vec{V} / \omega_{\text{cin}}$$

2. En l'absence de mouvement,  $\vec{V}' = 0$ ,  $\bar{D}_{\text{cin}} = 0$ , et on trouve d'après (16) :

$$(21) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \text{div} \{ \bar{D}_m \vec{\text{grad}} \bar{\rho} \}$$

équation du transfert de masse par diffusion moléculaire dans un milieu poreux (loi de FICK).



3. Si l'on admet  $\rho \vec{V}_e^* \gg \rho \vec{V}_e^*$  pour le fluide solution, le flux massique de convection est largement supérieur au flux de dispersion, l'équation de conservation (17) s'écrit :

$$(17') \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \text{div} (\bar{\rho} \omega_{cin} \vec{V}_e^*)$$

4. La loi de DARCY s'applique à la solution à condition de raisonner en vitesse massique et l'on a :

$$\vec{V} = - \frac{k}{\mu} \text{grad} (\bar{p} + \bar{\rho} gz) = \vec{V}_e \cdot \omega_{cin} = \vec{V}^* \omega_{cin}$$

ou encore :

$$(22) \quad \vec{V}^* = \frac{k}{\mu \omega_{cin}} \text{grad} (p + \rho gz)$$

#### II.4.2 Transferts thermiques

Dans le milieu poreux, l'énergie calorifique est transportée selon les principaux modes suivants :

##### - Conduction dans le solide

$$(23) \quad F_{cs} = - \lambda_s \text{grad} \theta_s$$

$\lambda_s$  = conductibilité de la matrice solide  
 $\theta_s$  = température de la matrice solide.

##### - Conduction dans le fluide

$$(24) \quad F_{cf} = - \lambda_f \text{grad} \theta_f$$

$\lambda_f$  = conductivité du fluide  
 $\theta_f$  = température du fluide

##### - Convection par le fluide en mouvement

$$(25) \quad \vec{F}_{vf} = \rho_f C_f \vec{V}^* \theta_f$$

$\rho_f$  = masse spécifique du fluide  
 $C_f$  = chaleur massique (capacité calorifique)  
 $\vec{V}^*$  = vitesse(massique) =  $\vec{V}_e$

- Dispersion par les fluctuations de vitesse

$$(26) \quad \vec{F}_{df} = - D_{th} \vec{\text{grad}} \theta_f$$

forme de loi de diffusion posée par analogie avec l'expression (19) du flux de dispersion en masse car le flux de dispersion thermique a également pour origine les fluctuations de vitesse.

$D_{th}$  = dispersion thermique.

L'énergie calorifique en mouvement peut être stockée dans le solide ou dans le fluide :

$$(27) \quad \Delta Q_\alpha = \rho_\alpha C_\alpha \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial t} \quad \text{quantité de chaleur emmagasinée par unité de volume et de temps}$$

$\alpha$  = indice du milieu (s = solide ; f = fluide)

En outre, il y a à tout instant un échange entre solide et fluide qui tend à équilibrer les températures :

$$(28) \quad \Delta Q_e = E_t (\theta_f - \theta_s)$$

Remarques :

1. On admet en général que les transferts par diffusion dus à l'agitation moléculaire du fluide sont négligeables devant les transferts par conduction qui eux aussi subsistent même en l'absence de mouvement du fluide.
2. En théorie, il est posé que tout gradient de potentiel de quelque nature qu'il soit (hydraulique, électrique, thermique, osmotique) engendre un flux de même nature, mais peut aussi engendrer un flux couple de nature différente : en particulier, un gradient de température crée non seulement un flux thermique, mais aussi un flux massique (effet Soret) ; un gradient de concentration crée réciproquement un flux thermique (effet Dufour).
3. Dans la plupart des cas d'écoulement en milieu poreux, le temps nécessaire pour que les températures du fluide et du solide s'équilibrent est extrêmement petit. Ce qui veut dire que l'on admettra couramment  $E_t$  très grand, soit  $\theta_f = \theta_s = \theta$ .

DEUXIEME PARTIE

PRINCIPALES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES  
DU MOUVEMENT DE L'EAU EN MILIEU POREUX  
("MODELES CONCEPTUELS DE L'ECOULEMENT")

## Principes d'établissement (et de classification) des équations de mouvement

---

Par combinaison des diverses "lois fondamentales" reconnues applicables à un écoulement, on obtient une "équation de mouvement" qui constitue une représentation mathématique du "modèle conceptuel" admis pour cet écoulement (qui n'est donc que la résultante des modèles conceptuels élémentaires propres à chaque loi fondamentale).

L'équation du mouvement est toujours une "équation aux dérivées partielles" (E.D.P. en notation abrégée) faisant intervenir paramètres du fluide (définis en I.1) et paramètres du milieu (définis en I.3). Mais sa forme dépend :

- de la nature et du nombre des phases fluides en écoulement
- des conditions thermodynamiques définissant l'état du système
- des conditions de géométrie :
  - . du domaine, d'une part : toutes limites rigides = écoulements captifs ou en charge ; certaines limites variables = écoulements à surface libre,
  - . du champ de vitesses : toutes trajectoires parallèles = écoulement monodimensionnel ; toutes vitesses parallèles à un plan = écoulement bidimensionnel ; champ de vitesse quelconque = écoulement tridimensionnel.

Il s'ensuit une possibilité de classification des écoulements en fonction des conditions principales précédentes et donc de la forme de l'équation du mouvement.

Cette classification des "modèles conceptuels" est résumée dans le tableau récapitulatif ci-après. Les équations de mouvement correspondant à chaque modèle sont dérivées à partir des équations fondamentales dans les paragraphes suivants.

**Tableau II - Classification des principaux modèles d'écoulement usuels en hydrogéologie**

| nombre de phases                           | conditions et équations d'état                                                                                  | domaine d'écoulement           | dimension                                                             | autres hypothèses                                                                                                                                                                                                                                               | Forme de l'équation du mouvement modèle mathématique conceptuel                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | désignation usuelle                                                                             | code proposé éventuel. |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| 1<br>monophasique<br>(Eau)<br>isotherme    | $\theta = \theta_0$<br>$\rho = \rho_0 e^{\beta(p-p_0)}$<br>$\mu = \mu_0$                                        | captif                         | 3<br>(z de bas en haut)<br>2<br><br>2 ou 3                            | $\frac{\partial \phi}{\partial z} = \epsilon$<br><br>milieu homogène                                                                                                                                                                                            | (36) $\text{div } K \vec{\text{grad}} \phi = S_s \frac{\partial \phi}{\partial t}$<br><br>(39) $\text{div } T \vec{\text{grad}} H = S \frac{\partial H}{\partial t}$<br><br>$\Delta \phi = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | équation de Laplace                                                                             |                        |
|                                            | $\rho = \rho_0$<br>$\mu = \mu_0$                                                                                | "libre"                        | 2                                                                     | idem +<br>$S_s = 0$<br>continuité sur la S.L. et libération instantanée de l'eau de la zone N.S.<br><br>$\vec{\text{grad}} H = \vec{\text{grad}} h = \vec{I}$ (DUPUIT)<br><br>+ substratum horizontal<br>+ milieu homogène<br>+ sans apport et R.P <sup>t</sup> | $(K \vec{\text{grad}} \phi + \vec{q})(\vec{\text{grad}} \phi - \vec{k}_z) = \omega_{\text{eff}} \frac{\partial \phi}{\partial t}$<br><br>valable pour $\phi$ en (x,y,h)<br><br>$\text{div}(K_b \vec{\text{grad}} b) = -\text{div } K_b \vec{\text{grad}} Z_s$<br>$+ \omega_e \frac{\partial b}{\partial t} - q$<br><br>$\text{div}(K_h \vec{\text{grad}} h) = \omega_e \frac{\partial h}{\partial t} - q$<br>$\Delta h^2 = \frac{2\omega_e}{K} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{2q}{K}$<br><br>$\Delta h^2 = 0$ | condition de surface libre<br><br>équations de Boussinesq                                       |                        |
|                                            |                                                                                                                 |                                |                                                                       | formes linéarisées<br>$h = \bar{h} + s, s \ll \bar{h}$<br>+ milieu homogène                                                                                                                                                                                     | $\text{div } T \vec{\text{grad}} s = \omega_e \frac{\partial s}{\partial t} - q$<br><br>$\Delta h^2 = \frac{\partial h^2}{\partial t} \frac{\omega_e}{K \bar{h}} - \frac{q}{K \bar{h}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | équation de Forcheimer<br><br>S.L. linéarisée au 1er ordre<br><br>S.L. linéarisée au 2ème ordre |                        |
|                                            |                                                                                                                 |                                |                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                 |                        |
| 1<br>Eau + calories                        | $\theta$ variable<br>$\mu = \mu(\theta)$<br>$\rho = \rho(\theta)$                                               | captif ou libre                | 3 ou 2                                                                | mise en équilibre thermique instantanée entre matrice et fluide                                                                                                                                                                                                 | (71) $\left\{ \begin{array}{l} \text{équation du mouvement de l'eau (ci-dessus)} \\ \vec{V}_e = - \frac{k}{\mu \omega_{\text{cin}}} \vec{\text{grad}} (p + \rho g z) \\ \rho = \rho_0 [1 - n(\theta - \theta_0)] \quad d'ou \\ \mu = \mu(\theta) \quad K = K(\theta) \\ \rho_0 C_a \frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} [(\lambda_a + D_{th}) \vec{\text{grad}} \theta] \\ \quad - \text{div } \rho_f C_f \vec{V}_e \end{array} \right.$                                                                  |                                                                                                 |                        |
| 2<br>immiscibles<br>Air - Eau              | $\theta = \theta_0$<br>$\rho = \rho_0$<br>$\mu = \mu_0$<br>$P_0 = P_{at} = C^{te}$                              | entre atmosphère et substratum | 3<br><br>z de haut en bas<br><br>1                                    | $K = K(\theta)$<br>$h_p^{\text{eau}} = -\psi = h(\theta)$<br>air immobile : $P_{\text{air}} = P_{at}$<br>(à partir du sol)                                                                                                                                      | $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div}(D_{(\theta)} \vec{\text{grad}} \theta) - \frac{\partial K}{\partial z}$<br>(valable entre sol et surface libre seulement)<br>$C_c \frac{\partial h}{\partial t} = \text{div}(K \vec{\text{grad}} h) - \frac{\partial K}{\partial z}$<br><br>$C_c \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\partial K}{\partial z}$                                                                        |                                                                                                 |                        |
|                                            |                                                                                                                 |                                |                                                                       | idem +<br>$\frac{\partial \phi}{\partial x} \neq \frac{\partial \phi}{\partial y} = \epsilon$                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                 |                        |
| 2<br>immiscibles<br>eau douce<br>eau salée | $\theta = \theta_0$<br>$\rho_d = \rho_{do}$<br>$\rho_s = \rho_{so}$<br>$\mu_d = \mu_{do}$<br>$\mu_s = \mu_{so}$ | captif ou libre                | 2<br><br>$\left( \frac{\partial \phi}{\partial z} = \epsilon \right)$ | eau douce et eau salée immiscibles (biseau salé)<br><br>d'où équilibre des pressions à l'interface :                                                                                                                                                            | $\left\{ \begin{array}{l} \text{continuité de l'eau douce} \\ \text{div}[K_d(H_d - Z_1) \vec{\text{grad}} H_d] = S \frac{\partial (H_d - Z_1)}{\partial t} - q \\ \text{continuité de l'eau salée} \\ \text{div}[K_s(Z_1 - Z_s) \vec{\text{grad}} H_s] = S \frac{\partial Z_1}{\partial t} \\ \rho_d g (H_d - Z_1) = \rho_s g (H_s - Z_1) \end{array} \right.$                                                                                                                                                       |                                                                                                 |                        |
| 2<br>miscibles<br>eau + soluté             | $\theta = \theta_0$<br>$\mu = \mu_0$<br>$\rho = \rho_0$                                                         | captif ou libre                | en principe 3 le plus souvent 2                                       | le traceur n'affecte pas les propriétés dynamiques du fluide                                                                                                                                                                                                    | (70) $\left\{ \begin{array}{l} \text{équation du mouvement de l'eau} \\ \frac{\partial C}{\partial t} = \text{div} [D \vec{\text{grad}} C] - \vec{V}_e \cdot \vec{\text{grad}} C \end{array} \right.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | équation du traceur parfait                                                                     |                        |

### III. ÉCOULEMENTS MONOPHASIQUES

#### III.1. Écoulements en charge

La combinaison de l'équation de continuité et de l'équation de Darcy généralisée donne l'équation du mouvement d'une phase fluide unique dans sa forme la plus générale :

$$(1b) \quad \operatorname{div} \rho \vec{V} = - \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}$$

soit en reportant (3), expression de  $\vec{V}$  d'après la loi de Darcy, dans (1b)

$$(29) \quad \boxed{\operatorname{div} \left[ \rho \frac{k}{\mu} (\operatorname{grad} p - \rho \vec{g}) \right] = \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}}$$

Mais par définition pour les fluides compressibles

$$\beta = - \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$$

ce qui entraîne

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p-p_0)} \quad \text{et} \quad \operatorname{grad} \rho = \rho \beta \operatorname{grad} p$$

ce qui permet d'exprimer l'équation de continuité sous les différentes formes suivantes obtenues en cherchant à ne conserver que des variables indépendantes, c'est-à-dire, au choix et selon la nature des problèmes  $\rho$ , masse spécifique,  $p$ , pression ou  $\phi$ , charge hydraulique.

##### III.1.1. Pour un écoulement tridimensionnel

A partir de (1) et des relations d'état ci-dessus on obtient les différentes formes suivantes :

1°/ Equation du mouvement par rapport à  $\rho$  :

$$(30) \quad \operatorname{div} \left[ \frac{k}{\mu} \left( \frac{\operatorname{grad} \rho}{\beta} - \rho^2 \vec{g} \right) \right] = \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}$$

Equation non linéaire en  $\rho$  qui permet de traiter théoriquement tout mouvement de fluide compressible.

Mais pratiquement en ce qui concerne les fluides usuels et l'eau en particulier, on a, dans les conditions normales :

$$\begin{aligned} \beta & \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ (barye)}^{-1} \\ \rho^2 g & \approx 10^3 \text{ C.G.S.} \end{aligned}$$

Donc le terme  $\rho \vec{g}$  qui représente l'influence des forces de gravité sera presque toujours négligeable devant le terme  $\frac{1}{\beta} \text{grad } p$  qui représente l'influence des forces de pression. Il vient alors :

$$(31) \quad \text{div}(k \text{ grad } p) = \beta \mu \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} \quad (\text{forme peu usitée en pratique})$$

2°/Equation du mouvement par rapport à  $p$  seul :

A partir de la forme précédente on obtient :

$$(32) \quad \text{div}(k \rho \text{ grad } p) = \beta \mu \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t}$$

. si le milieu est supposé incompressible ( $\omega = C^{te}$ ) il vient :

$$(33) \quad \text{div}(k \text{ grad } p) = \beta \mu \omega \frac{\partial p}{\partial t}$$

. si le milieu est supposé compressible, on peut admettre une loi de compressibilité de même forme que pour les fluides soit :

$$\omega = \omega_0 e^{\alpha (p - p_0)}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} = \rho_0 \omega_0 (\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t}$$

soit pour l'équation de continuité

$$(34) \quad \boxed{\text{div}(k \text{ grad } p) = \mu \omega_0 (\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t}} \quad \text{forme très utilisée par les pétroliers sous le nom d'"équation de diffusivité"}$$

Equation du mouvement par rapport à  $\phi$  :

L'introduction de  $\phi$  est plus délicate, et suppose d'autres approximations notamment :

On se trouve près de l'état de référence des potentiels et les variations de  $\rho$  sont suffisamment faibles pour que l'on puisse admettre :

$$\phi = \frac{p-p_0}{\rho g} + z - z_0 = \frac{p}{\rho g} + z$$

et

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} \text{ peu variable en fonction de } p = \frac{K\rho_0 g}{\mu}$$

d'où pour la loi de Darcy la forme simplifiée

$$\vec{V} = -K \text{ grad } \phi$$

Dans ces conditions "normales" (mais dans ces conditions seulement)

l'équation de continuité prend la forme :

$$(35) \quad \text{div} (\rho K \text{ grad } \phi) = \rho_0 \omega_0 (\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t}$$

qui devient en explicitant le premier membre (dérivation d'un produit) :

$$\rho \text{ div } K \text{ grad } \phi + K\rho^2 \beta g \left[ \frac{\partial \phi^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y} + \frac{\partial \phi^2}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = \rho \omega (\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t}$$

Mais si l'on néglige le terme  $K\rho^2 \beta g \left[ \dots \right]$  du second ordre en  $\phi$  et faisant intervenir  $\beta$  (très petit) et si l'on explicite le second membre, pour faire apparaître le coefficient d'emmagasinement spécifique  $S_s^*$ , (volume d'eau libérée pour une variation unité de la charge) on trouve après simplification par  $\rho$  (en fait par  $\rho_0$ ) :

$$(36) \quad \boxed{\text{div } K \text{ grad } \phi = \underbrace{\rho g \omega (\alpha + \beta)}_{S_s} \frac{\partial \phi}{\partial t}} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (36) \\ (37) \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{formes les plus utilisées} \\ \text{en hydrogéologie} \end{array}$$

ou

$$(37) \quad \text{div } K \text{ grad } \phi = 0 \text{ (régime permanent)}$$

### III.1.2. Le cas particulier de l'écoulement dans une couche. L'hypothèse de bidimensionnalité. Introduction de T (transmissivité) et de S (coefficient d'emmagasinement)

Soit une couche aquifère limitée par un toit T et un mur M réputés imperméables (fig. AI.8).

---

\* Il faut alors faire une hypothèse sur le modèle de comportement élastique du milieu. Voir à ce sujet COOPER (1966), DE WIEST (1966), GAMBOLATI (1972, 1973), KARANJAC (1972).



Pour résoudre un problème d'écoulement dans un tel milieu la méthode la plus générale consiste à résoudre un système constitué par :

- une des équations générales tridimensionnelles citées précédemment, (en général celle en  $\phi$ )
- les équations des conditions aux limites propres à chaque cas particulier (prélèvements par forages par ex.)
- les équations des conditions aux limites traduisant l'influence des limites géologiques du réservoir (épontes) soit :

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{épontes imperméables} & \} \\ & \text{ou} & \} \text{ (avec } \vec{n} \text{ vecteur normal aux surfaces} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = q_d & \text{épontes à drainance} & \} \text{ M(x, y, z) et T(x, y, z)} \end{array}$$

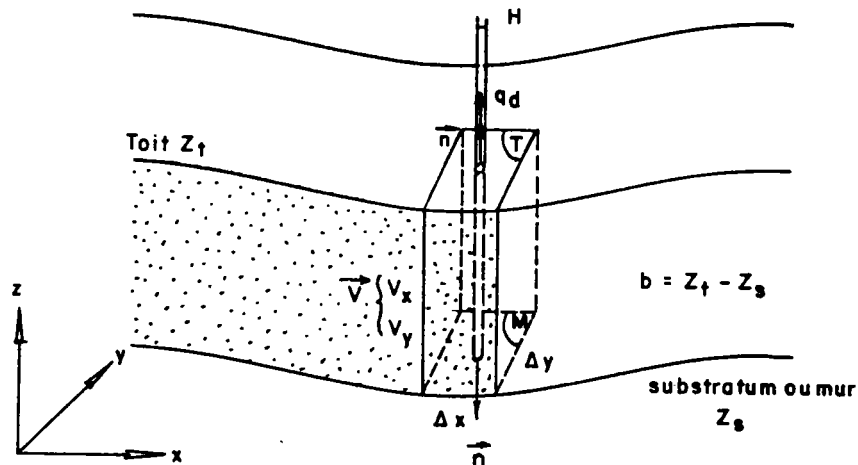


Fig. A1-8 : Conditions d'écoulement en couche aquifère captive

Mais on peut traiter plus simplement les écoulements en couche aquifère si on peut faire l'hypothèse qu'ils sont bidimensionnels horizontaux : un écoulement peut être considéré comme bidimensionnel horizontal si on a

$$V_z = \epsilon \ll V_x \text{ ou } V_y$$

soit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \epsilon \ll \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ ou } \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial p}{\partial (\rho g z)} \approx 1 = p \approx \rho g z$$

ou autrement dit : en écoulement bidimensionnel la pression est hydrostatique.

Dans ce cas le potentiel  $\phi$  est constant en tout point d'une verticale traversant la couche, et numériquement égal à la cote H atteinte par l'eau dans un piézomètre captant tout ou partie de cette verticale.

Selon un usage courant nous proposons pour faciliter les problèmes de typographie de remplacer alors le terme  $\phi$  par le terme H (encore appelé "charge hydraulique "). Toutefois, nous conseillons de revenir à  $\phi$  (potentiel) dès que l'hypothèse de bidimensionnalité n'est pas strictement admise. De même, pour éviter les confusions on réservera la lettre h pour désigner la cote d'une surface libre par rapport au plan de référence des potentiels.

Pour les écoulements en milieu aquifère géologique l'hypothèse de bidimensionnalité est en général tout à fait justifiée (couches de faible pendage présentant une épaisseur faible et variable progressivement) ce qui entraîne 2 conséquences importantes :

1. On peut tracer des cartes piézométriques de la nappe à partir des niveaux relevés dans des piézomètres atteignant la couche aquifère en un point quelconque de sa section verticale (répartition hydrostatique de pressions).
2. On peut simplifier la formulation du système représentant les écoulements dans la nappe en ramenant à une seule équation le système :

$$\begin{cases} \text{équation générale} \\ \text{équation des conditions aux limites le long des épontes} \end{cases}$$

En effet, considérons un prisme élémentaire de côtés  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  (x y) avec  $b(x, y)$  = épaisseur de la couche au point x y. (voir figure AI.8).

Pour un tel prisme l'équation de conservation s'écrit :

$$(38) \quad \frac{\partial(bv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(bv_y)}{\partial y} = - \frac{\partial(\rho_w b)}{\partial t} = -b \frac{\partial(\omega \rho)}{\partial t}$$

et en combinant avec l'équation de DARCY et l'équation d'état exprimées en fonction de H.

$$(39a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( Kb \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Kb \frac{\partial H}{\partial y} \right) = b \rho g \omega (\alpha + \beta) \frac{\partial H}{\partial t}$$

soit :

$$(39b) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x,y) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T(x,y) \frac{\partial H}{\partial y} \right] = S \frac{\partial H}{\partial t}$$

avec :  $T(x,y) = K b$

transmissivité

$S = b \rho g \omega (\alpha + \beta) = S_g b$

coefficient d'emmagasinement

$V_x = q_x / b \Delta x$

(de la couche)

$V_y = q_y / b \Delta y$

Ainsi sont introduites les deux notions classiques de transmissivité et coefficient d'emmagasinement d'un aquifère stratiforme.

Rappelons encore qu'elles impliquent bidimensionnalité et horizontalité de l'écoulement.

### III.2. Ecoulements à surface libre

#### III.2.1. Définitions - Hypothèses

1. D'une manière générale, on appelle surface libre toute limite géométrique du domaine d'écoulement non fixée rigidement, c'est-à-dire dont la forme dépend du champ  $\phi_{(x,y,z,t)}$  à l'intérieur du domaine.
2. En pratique, en ce qui concerne les écoulements monophasiques d'eau, on considère qu'une telle surface ne peut exister qu'à la séparation entre le domaine saturé et le domaine non saturé du milieu aquifère. Cette surface étant physiquement floue, on admettra pour en donner une définition mathématique précise que c'est : le lieu géométrique des points où la pression (de l'eau) est nulle (par rapport à la pression atmosphérique). C'est l'hypothèse de base de la théorie des écoulements monophasiques à surface libre (ou "nappes libres").

On remarquera que la surface libre n'est pas obligatoirement une ligne de courant.

3. De plus pour développer cette théorie, on admettra (hypothèses de FORCHHEIMER et BOUSSINESQ)

- que la hauteur capillaire est négligeable
- que la saturation ou la désaturation du terrain est instantanée et intéresse uniquement la porosité efficace. Ce qui revient à attribuer à la courbe succion-teneur en eau du terrain une forme très schématique (voir fig. AI.9).

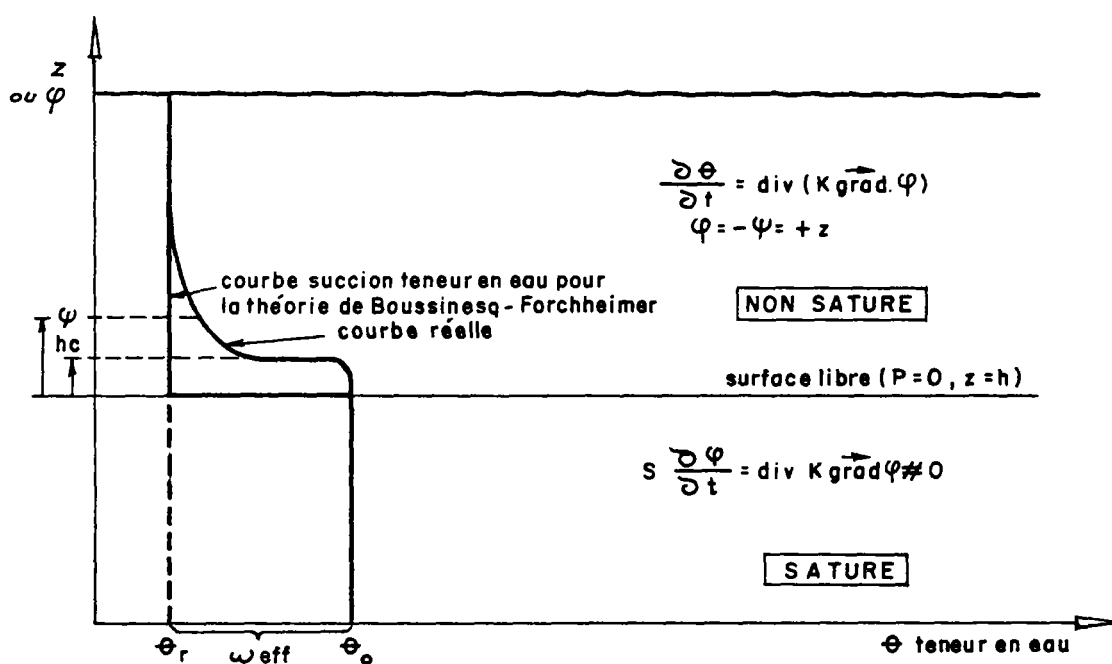


Fig. AI-9 : Relations entre domaine saturé et domaine non saturé dans la théorie des écoulements à surface libre - Schéma statique, définition de la surface libre.

Selon ces hypothèses, la surface libre sépare donc nettement deux domaines :

- le domaine saturé où s'appliquent les équations fondamentales de l'écoulement monophasique énoncées précédemment
- le domaine non saturé où n'a lieu aucun écoulement (l'eau y est à la teneur résiduelle).

\* En fait il existe un écoulement diphasique air-eau dont le modèle conceptuel sera proposé plus loin.

### III.2.2. Equations fondamentales applicables aux écoulements à surface libre

Le problème des écoulements à surface libre est un problème à deux inconnues :

- . le champ de potentiel  $\phi (x, y, z, t)$
- . la forme de la surface libre  $h (x, y, t)$

Sa solution en toute généralité implique la résolution d'un système de deux équations, l'une caractérisant le potentiel, l'autre la surface libre.

#### III.2.2.1. EQUATION DU POTENTIEL

Elle s'applique en tout point à l'intérieur du domaine saturé et s'écrit évidemment

$$(36) \quad S \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{div} (K \vec{\text{grad}} \phi)$$

Toutefois, on admet le plus souvent\* que pour la plupart des écoulements à surface libre qui sont des écoulements superficiels en aquifères assez grossiers et peu épais, le coefficient d'emmagasinement  $S$  (au sens où nous l'avons définis en III.1.2. : somme de la compressibilité du terrain et de la compressibilité de l'eau) est négligeable. Et on prend :

$$(37) \quad \text{div} (K \vec{\text{grad}} \phi) = 0$$

#### III.2.2.2. EQUATION DE LA SURFACE LIBRE

Elle s'obtient en combinant les deux propriétés fondamentales de la surface libre :

1. La surface libre reste à tout instant le lieu des points de pression nulle, ce qui implique :

$$(38) \quad p(x, y, z, t) = 0 \quad \frac{dp}{dt} = 0$$

soit :

$$(39) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} = 0$$

---

\* Cette hypothèse est discutable et a été discutée ; voir NEUMAN (1972, 1973, 1974), STRELTSOVA (1973).

ou encore :

$$(40) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} p = 0$$

avec  $\vec{U}$  = vitesse d'avancement de la surface libre (voir notations figure AI.9).

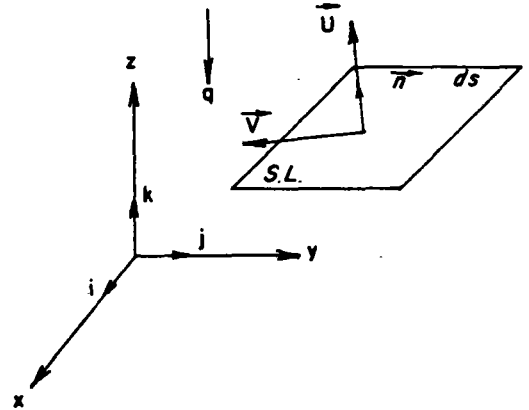
## 2. L'équation de continuité s'applique à la surface libre

On a donc (schéma ci-dessous) sur chaque élément  $ds$  de surface libre

$$(\vec{V} - \vec{q}) \cdot \vec{n} \, ds \, dt = \vec{U} \cdot \vec{n} \, dt \, \omega_{\text{eff}}$$

soit :

$\int$  flux à travers la surface =  
volume envahi par l'avancée  
de la surface libre (en sup-  
posant que celle-ci rencontre  
instantanément un terrain à  
sa teneur en eau résiduelle  $\theta_r$ ).



On en déduit :

$$(41) \quad (\vec{V} - \vec{q}) = \vec{U} \, \omega_{\text{eff}}$$

$\vec{V}$  = vitesse de Darcy au droit de la surface libre

$\vec{q}$  = flux échangé à travers la surface libre.

En combinant (18) et (19)

$$\frac{dp}{dt} = \left( \frac{\vec{V} - \vec{q}}{\omega_{\text{eff}}} \right) \cdot \vec{\text{grad}} p + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

et en se rappelant que :

$$p = \rho g \phi - z \quad \text{et} \quad \vec{V} = -K \vec{\text{grad}} \phi$$

on trouve :

$$(42) \quad \omega_{\text{eff}} \frac{\partial \phi}{\partial t} = (K \vec{\text{grad}} \phi + \vec{q}) \cdot (\vec{\text{grad}} \phi - \vec{k})$$

soit (en notant qu'en pratique les débits sortants sont comptés négativement en valeur algébrique) :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \frac{q}{K} - \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{q}{K} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega_e}{K} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

( $q > 0$  = injection,  $q < 0$  = pompage)

ou encore :

$$(43) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{K+q}{2K}\right)^2 = \left(\frac{K-q}{2K}\right)^2 + \frac{\omega_{eff}}{K} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

C'est l'équation fondamentale définissant la surface libre ou "condition de surface libre". Dans cette équation  $\phi$  désigne le potentiel en  $(x, y, h)$  c'est-à-dire sur la surface libre.

Elle admet les formes simplifiées suivantes :

$$(44) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega_e}{K} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

régime transitoire sans échange avec l'extérieur

$$(45) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{K+q}{2K}\right)^2 = \left(\frac{K-q}{2K}\right)^2$$

régime permanent avec échange

$$(46) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

régime permanent sans échange

On voit d'après les équations qui précèdent que la condition de surface libre n'est pas linéaire. (termes en  $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2$ ).

### III.2.3. Equations simplifiées

#### III.2.3.1. L'HYPOTHESE DE DUPUIT. FORMES SIMPLIFIEES NON LINEARISEES (BOUSSINESQ, FORCHHEIMER)

L'hypothèse de DUPUIT consiste à admettre que le gradient hydraulique est le même en chaque point d'une verticale, et est égal à la pente de la surface libre.

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \epsilon \\ -\frac{\vec{V}}{K} = \vec{g} \text{ grad } \phi = \vec{g} \text{ grad } h \end{array} \right.$$

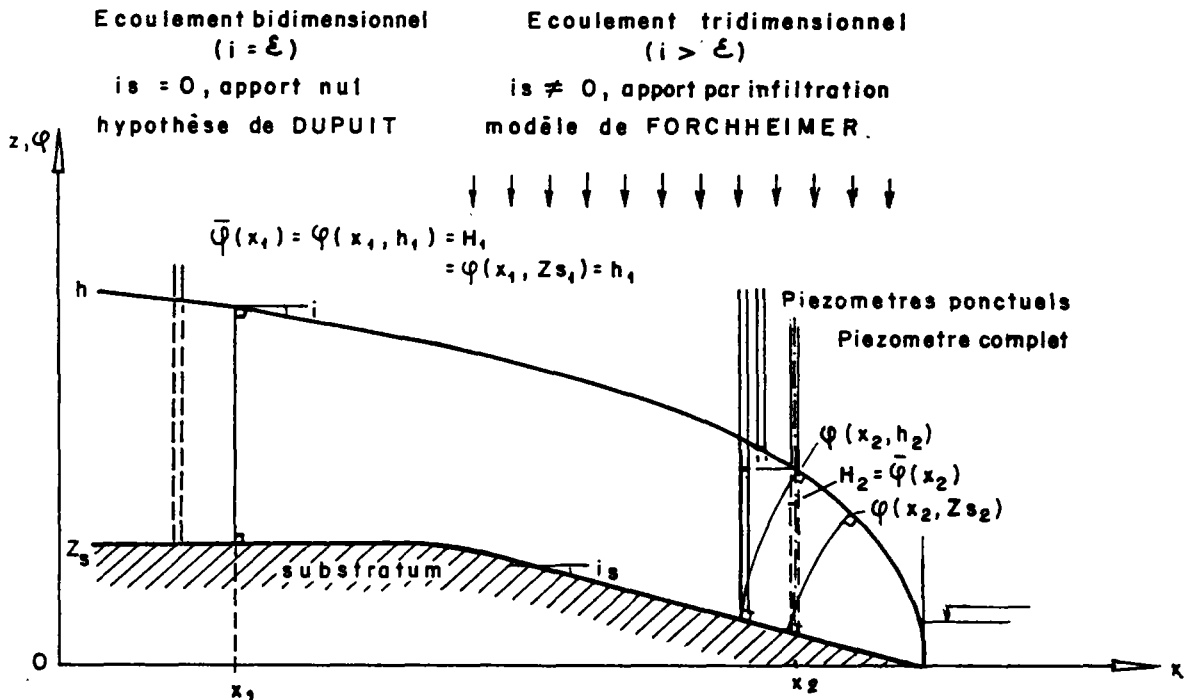


Fig. AI-10 : Relations entre cote et potentiel : hypothèse de DUPUIT

Soit avec les notations de la figure AI.10

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{V}{K} = \frac{dh}{dx} = \sin i \neq i \\ \phi(x_1, Z_s) = h(x_1) \end{array} \right.$$

approximations non valables au point  $x_2$  où  $\phi(x_2, h) \neq \phi(x_2, Z_s)$



On voit d'après la figure que l'hypothèse de DUPUIT n'est valable que dans les domaines où les équipotentielles  $\phi(x, y, z)$  sont peu inclinées par rapport à la verticale.

Avec les notations de la figure AI.11 l'équation de conservation pour les écoulements où s'appliquent l'hypothèse de DUPUIT et les hypothèses de BOUSSINESQ-FORCHHEIMER en ce qui concerne les mouvements de la surface libre, prend la forme suivante \* :

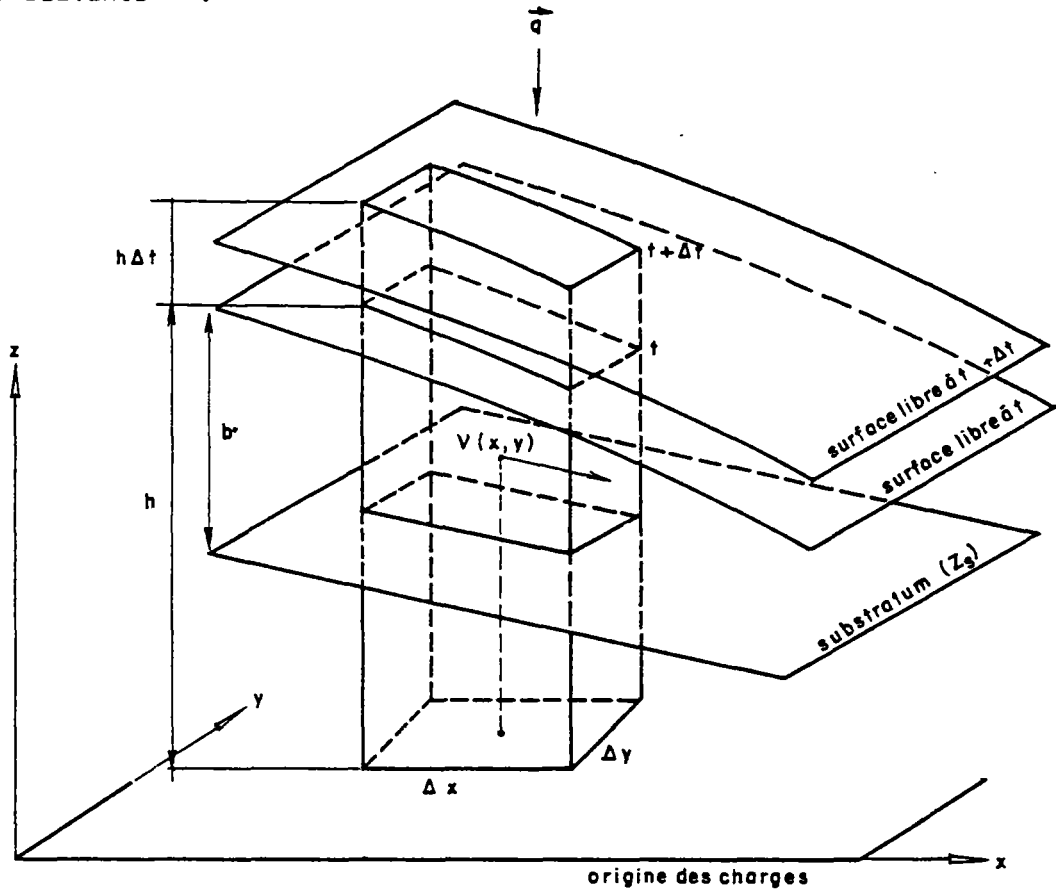


Fig. AI-11 : Equation de conservation avec hypothèses de DUPUIT et BOUSSINESQ-FORCHHEIMER

$$(48) \quad \text{div}(\rho b \vec{V}) + b \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \rho w_{\text{eff}} \frac{\partial b}{\partial t} = \rho q \quad (\text{avec } q < 0 = \text{pompage} \\ q > 0 = \text{injection})$$

Des deux termes  $b \frac{\partial(\rho w)}{\partial t}$  et  $\rho w_{\text{eff}} \frac{\partial b}{\partial t}$  qui représentent respec-

tivement l'emménagement de l'eau par compressibilité du fluide et du terrain et l'emménagement par saturation ou désaturation du matériau aquifère le premier est toujours négligeable devant le second et on admet :

\* Même principe d'établissement que pour la forme générale donnée précédemment.

$$(49) \quad \text{div} (b \vec{V}) = q - \omega_{\text{eff}} \frac{\partial b}{\partial t}$$

mais (hypothèse de DUPUIT) :  $\vec{V} = -K \vec{\text{grad}} h$  et  $\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$

et on a

$$(50) \quad \text{div} (K b \vec{\text{grad}} h) = \omega_{\text{eff}} \frac{\partial h}{\partial t} - q$$

ou encore en notant que :  $b = h - Z_s$ , ce qui entraîne

$$(K b \vec{\text{grad}} b) = (K b \vec{\text{grad}} h) - (K b \vec{\text{grad}} Z_s),$$

soit :

$$(51) \quad \text{div} (K b \vec{\text{grad}} b) = - \text{div} (K b \vec{\text{grad}} Z_s) + \omega_{\text{eff}} \frac{\partial b}{\partial t} - q$$

Ce sont les équations de BOUSSINESQ valables pour :

1. Hypothèse de DUPUIT vérifiée
2. Régime transitoire
3. Milieu hétérogène.

On en déduit les formes simplifiées suivantes pour un milieu homogène :

#### Substratum incliné

$$(52) \quad \text{div} (b \vec{\text{grad}} h) = \frac{\omega_e}{K} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{q}{K}$$

ou encore

$$(53) \quad \text{div} (b \vec{\text{grad}} b) = \frac{\omega_e}{K} \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{q}{K} - \text{div} (b \vec{\text{grad}} Z_s)$$

#### si substratum horizontal

$$(54) \quad \text{div} (b \vec{\text{grad}} b) = \text{div} (h \vec{\text{grad}} h) = \frac{\omega_e}{K} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{q}{K}$$

$$(55) \quad \Delta (h^2) = \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial y^2} = \frac{2\omega_e}{K} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{2q}{K} \quad (\text{régime transitoire})$$

ou encore

$$(56) \quad \Delta (h^2) = - \frac{2q}{K} \quad (\text{régime permanent avec apport})$$

$$(57) \quad \Delta (h^2) = 0 \quad (\text{régime permanent sans apport})$$

Equation de Forchheimer

### III.2.3.2. EQUATIONS LINEARISEES

Même quand on admet l'hypothèse de DUPUIT, les équations différentielles obtenues ne sont pas linéaires, sauf l'équation de FORCHHEIMER (applicable aux seuls écoulements permanents en milieu homogène et en prenant pour variable  $h^2$ ).

On a donc cherché à en trouver des formes linéarisées qui en sont des approximations valables dans certaines conditions seulement. Ainsi pour les équations de BOUSSINESQ avec substratum horizontal :

#### 1. Linéarisation au premier ordre

Si l'on admet que  $h$  varie peu (selon  $x$  et  $y$ ) c'est-à-dire qu'en tout point on a :

$$b = \bar{h} + s \quad \text{et} \quad s \ll \bar{h}$$

avec  $\bar{h}$  = valeur moyenne

$s$  = rabattement (par rapport à la moyenne)

on obtient en négligeant dans (54) les termes du second ordre en  $s$

$$(58) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\omega_e}{T} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{q}{T}$$

avec  $T = K \bar{h}$

soit encore puisque  $h = s + C^{te}$

$$(59) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\omega e}{T} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{q}{T}$$

C'est une équation identique à celle obtenue pour les écoulements bidimensionnels en nappe captive à la signification près, du coefficient d'emmagasinement et en prenant:  $h$  cote de la surface libre  $\equiv$   $H$  potentiel hydraulique.

Notons tout de suite que quand un hydrogéologue baptise carte piézométrique une carte du toit de la surface libre, il fait donc implicitement (et sans le savoir ?) toutes les approximations qui nous ont conduit de (36) à (59) c'est-à-dire, principalement : hypothèses de DUPUIT, et de BOUSSINESQ-FORCHHEIMER ; substratum peu incliné.

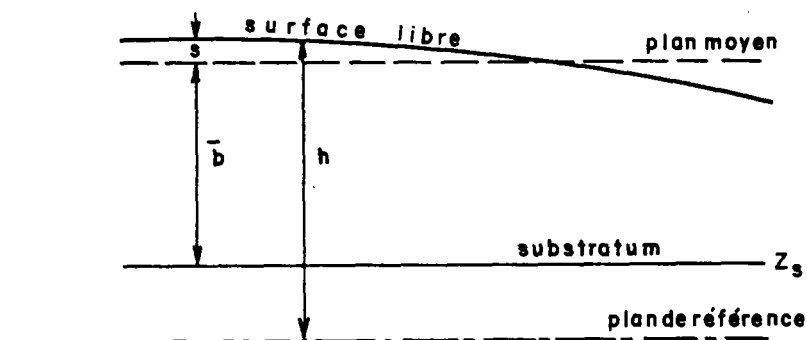


Fig. AI-12 : Conditions d'application de la linéarisation au premier ordre.

## 2. Linéarisation au 2ème ordre

Dans ce cas on linéarise en posant

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2\bar{h}} \frac{\partial h^2}{\partial t}$$

avec :

$$\bar{h} = \sqrt{\overline{h^2}} \quad (\overline{h^2} = \text{valeur moyenne de } h^2)$$

et (55) devient :

$$(60) \quad \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = \frac{\partial h^2}{\partial t} \cdot \frac{\omega_e}{K\bar{h}} - \frac{q}{K\bar{h}}$$

## IV. ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES IMMISCIBLES

### IV.1. Généralités sur les écoulements polyphasiques immiscibles

Définition : 2 fluides sont immiscibles s'il existe entre eux une énergie interfaciale qui se manifeste par une tension appliquée sur la surface de séparation entre fluides (voir I.1.6., page 8).

Quand deux fluides immiscibles sont en contact dans les interstices d'un milieu poreux il existe donc une discontinuité de pression à travers les interfaces (microscopiques) qui les séparent.

Cette différence entre les pressions est dénommée pression capillaire

$$p_c = p_2 - p_1.$$

### Principes d'un modèle conceptuel d'écoulement polyphasique

Ce modèle repose sur les postulats suivants qui élargissent et généralisent ceux proposés pour l'écoulement monophasique :

1° Chaque fluide est considéré comme occupant totalement le milieu continu équivalant mais à une teneur variable dans l'espace et complémentaire en chaque point, de celle des autres fluides :

$$\sum_{i=1}^{i=n} s_i = 1 \quad (n = 2 \text{ ou } 3 \text{ au maximum})$$

avec  $s_i$  = degré de saturation ou rapport, pour un V.E.R., du volume de fluide au volume de pore.

ou encore (autre expression équivalente)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \theta_i = \omega$$

avec  $\theta_i$  = teneur volumique ou rapport du volume de fluide au volume du V.E.R. (donc  $\theta_i = s_i \omega$  ).

2° La différence des pressions microscopiques entre fluides, c'est-à-dire la pression capillaire est, en chaque point, fonction de la teneur

$$\Delta p_{i,j} = f(s_i, s_j) \quad (i, j \text{ de } 1 \text{ à } n)$$

3° Chaque fluide est supposé se mouvoir selon le modèle défini pour un fluide unique :

- Conservation de la masse

$$\operatorname{div} \rho_i \vec{V}_i = - \frac{\partial(\rho_i \omega s_i)}{\partial t}$$

$\vec{V}_i$  = vitesse de filtration définie à partir des flux de chaque fluide.

- Loi de Darcy (conservation de la quantité de mouvement) appliquée sous une des formes définies en III.1

$$\vec{V}_i = - \frac{K_i(j,k)}{\mu_i} (\vec{\operatorname{grad}} p - \vec{\rho} g) \quad \begin{array}{l} \text{fluides compressibles} \\ \text{conditions quelconques} \end{array}$$

ou

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V}_i = - \frac{K_i(j,k)}{\mu_i} \frac{\rho_i g}{\rho_i g} (\vec{\operatorname{grad}} \frac{p_i}{\rho_i g} + z) \\ \text{soit} \\ \vec{V}_i = - K_i(j,k) \vec{\operatorname{grad}} \phi_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{fluides peu compressibles} \\ \text{dans des conditions "normales"} \end{array}$$

Dans ce cas  $K_i(j,k)$  désigne la "perméabilité effective" du fluide  $i$  en présence des fluides  $j,k$  et l'on admet :

$$kr_i = \frac{K_i(j,k)}{K} = f(\theta_i) \text{ et de } \theta_i \text{ seulement}$$

avec  $K$  = perméabilité intrinsèque du milieu pour un fluide saturant

$kr_i$  = perméabilité relative du fluide  $i$

- Equations d'état :

$$\rho_i = \rho_i(p_i, t)$$

$$\mu_i = \mu_i(p_i, t)$$

En définitive, la représentation mathématique de tout écoulement polyphasique de fluides immiscibles se ramène à un système d'équations comprenant :  $n$  (nombre de phases) équations aux dérivées partielles, les fonctions définissant les paramètres relatifs, les équations d'état de chaque fluide.

Par exemple pour 2 phases compressibles on obtient :

$$(61) \left\{ \begin{array}{l} \cdot \operatorname{div} \left[ k \frac{kr_1}{\mu_1} (\operatorname{grad} p_1 - \rho_1 \vec{g}) \right] = \frac{\partial(\omega\theta_1)}{\partial t} \\ \cdot \operatorname{div} \left[ K \frac{kr_2}{\mu_2} (\operatorname{grad} p_2 - \rho_2 \vec{g}) \right] = \frac{\partial(\omega\theta_2)}{\partial t} \\ \cdot kr_1 = kr_1(\theta_1) \\ \cdot kr_2 = kr_2(\theta_2) \\ \cdot \theta_1 + \theta_2 = \omega \\ \cdot p_2 - p_1 = p_c(\theta_1) \\ \cdot \text{équations d'état en } \mu \text{ et } \rho \end{array} \right.$$

#### IV.2. Cas de l'écoulement diphasique air-eau dans les sols : écoulement en milieu non saturé

En toute rigueur il s'agit bien de 2 fluides immiscibles : le modèle conceptuel décrit ci-dessus s'applique tout à fait (certains le préconisent)\*. Mais on peut proposer une forme simplifiée, d'usage plus répandu, qui repose sur les hypothèses supplémentaires suivantes :

- la phase air est toujours à la pression atmosphérique
- l'écoulement se fait dans des conditions voisines de la "normale": la masse spécifique de l'eau reste donc constante ( $\rho \neq \rho_0$ )

Dans ces conditions, il suffit d'écrire l'équation du mouvement pour ce qui concerne l'eau seule :

---

\* voir notamment à ce sujet la série d'articles de MOREL-SEYTOUX (1973, 1974) in Cahiers de l'ORSTOM.



1° Conservation de la masse

$$(62) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{V}$$

2° Conservation de la quantité de mouvement : loi de Darcy

$$\vec{V} = - K \vec{g} \operatorname{grad} \phi$$

avec

$$K = \frac{k_{r_{\text{eau}}} \rho g}{\mu} = K(\theta)$$

$$\phi = \frac{p_{\text{eau}}}{\rho g} - z \quad \text{(l'axe des } z \text{ étant orienté de haut en bas à partir du sol selon la convention la plus couramment admise pour les études de la zone non saturée)}$$

soit en introduisant la hauteur piézométrique (ou "pression effective")

$$h_p \text{ ou la succion } \psi = - h_p$$

$$\phi = h_p - z = - (\psi + z)$$

et pour la loi de Darcy

$$(63) \quad \vec{V} = - K \vec{g} \operatorname{grad} (h_p - z) = K \vec{g} \operatorname{grad} (\psi + z)$$

3° Equation de mouvement

Selon l'optique des études envisagées on peut l'exprimer sous deux formes différentes :

- En prenant comme variable principale la teneur en eau  $\theta$  et en considérant la succion  $\psi$ , l'équation s'écrit

$$(64) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \operatorname{div} [K \vec{g} \operatorname{grad} (\psi + z)] = - \operatorname{div} (K \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{g} \operatorname{grad} \theta) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

Comme d'après l'allure générale de la relation entre  $\psi$  et  $\theta$  on sait que

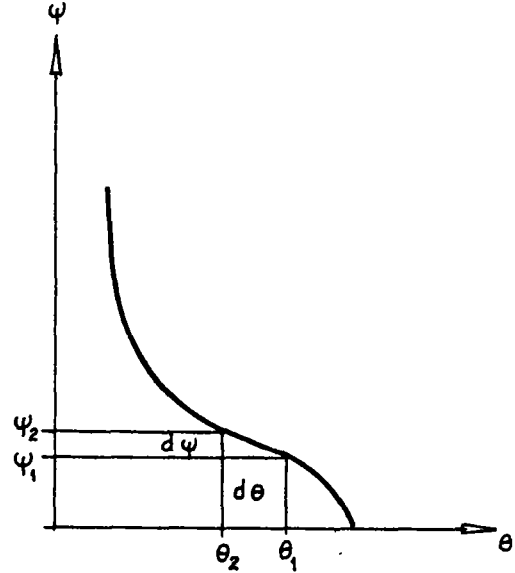
$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$  toujours  $< 0$ , on pose usuellement :

$$D_{(\theta)} = K_{(\theta)} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right| = -K \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$D_{(\theta)}$  = diffusivité, paramètre structural toujours  $> 0$

et avec ce nouveau paramètre

$$(64) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div } D_{(\theta)} \vec{\text{grad}} \theta - \frac{\partial K}{\partial z}$$



L'inconvénient de cette forme est qu'elle n'est valable que dans la zone non saturée et même difficile d'usage au voisinage de la surface libre où  $D_{(\theta)} \rightarrow \infty$ .

- En prenant comme variable principale la hauteur piézométrique  $h_p$  (ou pression effective en hauteur d'eau). Dans ce cas

$$(65) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial t} = \text{div} (K \vec{\text{grad}} (h_p - z)) = \text{div} (K \vec{\text{grad}} h_p) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

et on pose  $\frac{\partial \theta}{\partial h_p} = C_c$  capacité capillaire

Soit

$$(66) \quad C_c \frac{\partial h_p}{\partial t} = \text{div} (K \vec{\text{grad}} h_p) - \frac{\partial K}{\partial z}$$

Le principal intérêt de cette forme, c'est qu'elle passe en continuité à l'équation du mouvement dans la zone saturée puisque sous la surface libre  $C_c = 0$  et  $K = C^{te}$ , et l'on retrouve ainsi pour  $z > z_1$  ( $z_1$  = cote de la surface libre)

$$\text{div } K \vec{\text{grad}} h_p = 0$$

### IV.3. Cas du "biseau salé" (figure AI.13)

Dans un biseau salé, eau douce et eau salée ne constituent pas à strictement parler deux phases immiscibles : il n'y a pas de tension interfaciale sur la surface de séparation entre eau douce et eau salée. En fait il s'agit de phases miscibles et on passe continuellement de l'eau douce à l'eau de mer. Mais cette zone de transition entre les 2 masses de fluide se fait le plus souvent sur une très faible distance ce qui permet de faire l'approximation qu'il existe une interface nette au travers de laquelle il y a non pas discontinuité des pressions mais discontinuité des potentiels, soit en admettant les 2 phases peu compressibles

$$\phi_d = \frac{p}{\rho_d g} + z \quad \text{du côté de l'eau douce (densité } \rho_d)$$

$$\phi_s = \frac{p}{\rho_s g} + z \quad \text{du côté de l'eau salée (densité } \rho_s)$$

Si en outre on admet que les mouvements sont bidimensionnels dans les 2 phases, c'est-à-dire :

- . substratum (et éventuellement toit) peu incliné,
- . biseau peu incliné (pas de coning vers un puits),
- . écoulement de l'eau douce captif ou libre avec hypothèse de DUPUIT, et de BOUSSINESQ-FORCHHEIMER.

on peut alors proposer un modèle dont la forme s'apparente à celle d'un écoulement diphasique immiscible :

Equation de continuité de l'eau douce :

$$(66) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_d (H_d - Z_i) \frac{\partial H_d}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K_d (H_d - Z_i) \frac{\partial H_d}{\partial y} \right] + q = S \frac{\partial (H_d - Z_i)}{\partial t}$$

Equation de continuité de l'eau salée :

$$(67) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_s (Z_i - Z_s) \frac{\partial H_s}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K_s (Z_i - Z_s) \frac{\partial H_s}{\partial y} \right] = S \frac{\partial Z_i}{\partial t}$$

Expression de l'équilibre des pressions à l'interface :

$$(68) \quad \rho_d g (H_d - Z_i) = \rho_s g (H_s - Z_i)$$

avec les notations suivantes :

$K_d (x,y) = K(x,y)$  perméabilité à l'eau douce (en m/s)

$K_s (x,y) = \frac{\rho_s}{\rho_d} K (x,y)$  perméabilité à l'eau salée (en m/s)

$Z_s (x,y)$  cote du substratum de la formation perméable (en m)

$S$  coefficient d'emmagasinement

$H_d (x,y,t)$  hauteur piézométrique de l'eau douce

$H_s (x,y,t)$  charge de l'eau salée

$Z_i (x,y,t)$  cote de l'interface eau douce - eau salée

$q$  débit échangé avec l'extérieur (> 0 entrant)

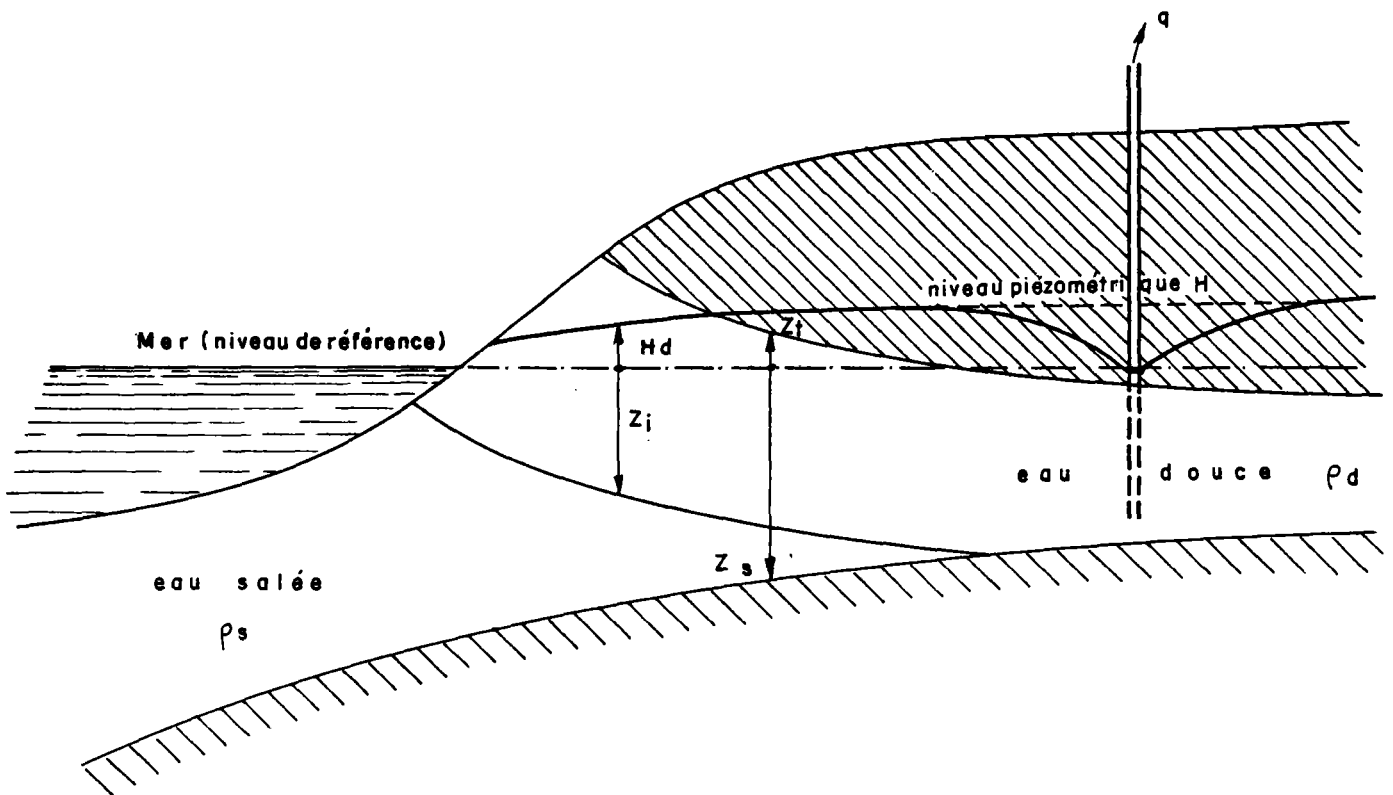


Fig. A1.13 - Schéma d'une interface eau douce - eau salée en aquifère côtier

## V. ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES MISCIBLES

### V.1. Généralités

**V.1.1. Définition :** Deux (ou plusieurs) fluides sont miscibles s'il n'existe aucune énergie interfaciale entre eux. Aucune interface visible n'apparaît au sein du fluide résultant de la mise en contact : les molécules de l'un et l'autre fluides sont intimement mélangées. Le champ de pression dans la masse fluide est continu.

### V.1.2. Exemples en hydrogéologie

En général, les fluides que l'on considère en hydrogéologie sont des solutions aqueuses contenant des corps dissous (solutés) en proportion (ou concentration  $C = \text{masse} / \text{unité de volume}$ ) variable. Par exemple dans le cas de l'intrusion marine le fluide F1 est de l'eau douce, le fluide F2 est de l'eau salée. Dans le cas d'un traçage ou d'une pollution miscible, le fluide en place dans le terrain (F1) est de l'eau douce (ou d'une salinité constante), le fluide injecté (volontairement ou accidentellement) est une solution aqueuse d'un certain soluté.

En règle générale, nous aurons toujours le fluide principal F1 (en terme de volume) qui sera l'eau et un fluide "polluant", F2, qui sera une solution d'un certain soluté ou "traceur" à concentration déterminée  $C_0$  avant le mélange.

Le fluide résultant du mélange entre le fluide principal et le fluide dissous sera une solution à la teneur  $C < C_0$ .

L'évolution de la teneur du soluté dans le fluide principal (l'eau) lui-même en écoulement à partir de points ou limites d'injection constitue ce que l'on appelle le phénomène de "dispersion" ou "d'écoulement hydro-dispersif".

### V.1.3. Principes généraux d'établissement d'un modèle d'écoulement hydro-dispersif

- . Le modèle le plus courant repose sur les hypothèses suivantes :
  - l'écoulement est isotherme et la compressibilité de l'eau n'est pas affectée par la dissolution du soluté (tout à fait exact) : la solution

résultante est supposée incompressible dans les conditions "normales" de pression ;

- la dissolution du soluté affecte principalement la masse spécifique  $\rho$  (effet plus ou moins négligeable) et la viscosité  $\mu$  (effet qui parfois peut être important) du fluide.
- . Les variations de teneur du soluté n'entraînent pas de variation de volume (l'écoulement est conservatif en volume).
- . Les transferts en masse de la "solution" (on dit aussi le fluide) sont représentables par le modèle hydrodynamique classique présenté pour les écoulements monophasiques en tenant compte des variations de  $\rho$  et  $\mu$  en fonction de la concentration du soluté.
- . Les transferts de traceur ont principalement pour cause les mécanismes de convection, dispersion cinématique, diffusion moléculaire, dont les lois de base ont été rappelées en II.4.

## V.2. Cas de l'écoulement d'une solution hétérogène

Dans ce cas qui est par exemple celui d'une injection massive de polluant très dense (saumure) ou celui du biseau salé considéré dans une optique moins schématique que celle décrite en IV.3 (écoulement diphasique immiscible), il y a étroite dépendance du mouvement du fluide affecté par les variations de densité et la concentration du soluté qui dépend elle-même de la vitesse d'écoulement (convection) et de ses fluctuations (dispersions).

Le modèle représentant l'écoulement se traduit sous la forme d'un système d'équations à résoudre simultanément.

$$\begin{aligned}
 (69) \quad & \left\{ \begin{array}{ll}
 \operatorname{div} (\rho \vec{V}^*) = \frac{\omega \partial \rho}{\partial t} & \text{équation de conservation en masse} \\
 & \text{du fluide} \\
 \vec{V}^* = - \frac{k}{\mu} \vec{\text{grad}} (p + \rho g z) & \text{Darcy généralisé pour le fluide} \\
 \rho = \rho_0 + \alpha (C - C_0) & \text{Equations d'état de la solution} \\
 \mu = \mu_0 + \beta (C - C_0) & (\alpha \text{ et } \beta = \text{cte}) \\
 \frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div} \left[ (D_m + D_{cin}) \vec{\text{grad}} C \right] - \operatorname{div} (\vec{V}' C) & \text{conservation en masse du} \\
 & \text{soluté} \\
 \text{soit} & \\
 \frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div} \left[ (D_m + D_{cin}) \vec{\text{grad}} C \right] - \vec{V}' \cdot \vec{\text{grad}} C & " \quad " \\
 \text{car} & \\
 \operatorname{div} (\vec{V}' C) = \vec{V}' \cdot \vec{\text{grad}} C + \underbrace{C \operatorname{div} \vec{V}'}_{= 0} & \text{écoulement conservatif en} \\
 & \text{volume} \\
 \vec{V}^* - \vec{V}' = - D_{cin} \vec{\text{grad}} \rho & \text{relation entre vitesse massique} \\
 & \text{et vitesse volumique}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

### V.3. Cas de l'écoulement d'une solution homogène : le modèle du traceur parfait

Si le produit injecté n'affecte pas les propriétés dynamiques de la solution, le modèle se simplifie considérablement.

En effet, on a alors

$$\rho = \rho_0 = C^{te} \quad \mu = \mu_0 = C^{te}$$

$$\text{d'où } \vec{V}^* = \vec{V}' = \vec{V}_e = \vec{V} / \omega_{cin}$$

Le mouvement du fluide est donc représentable par un des modèles d'écoulement monophasique présenté en III à partir de la forme générale

$$(1) \quad \operatorname{div} (\rho \vec{V}) = - \frac{\partial (\rho \omega)}{\omega t}$$

Le mouvement du soluté est représentable par l'équation de conservation suivante :

$$(70) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \text{div} [\vec{D} \text{ grad } C] - \vec{V}_e \text{ grad } C$$

Ces deux équations peuvent être résolues de manière indépendante :

(1) d'abord, pour obtenir le champ de vitesse  $\vec{V}$  puis  $\vec{V}_e$

(70) ensuite, connaissant  $\vec{V}_e$ , pour obtenir le champ de concentration C.

## VI. TRANSFERTS COUPLES : THERMIQUE ET DE MASSE

Quand le milieu aquifère est en outre le siège de transferts thermiques, il faut adjoindre au modèle d'écoulement hydraulique le modèle de transfert thermique adéquat.

Le plus généralement admis repose sur les hypothèses suivantes :

- Dans les milieux poreux les plus courants l'équilibre thermique entre phase fluide et phase solide s'établit quasi instantanément et on a

$$\theta_f = \theta_s = \theta \quad \text{température du milieu}$$

- De même on peut attribuer au milieu continu équivalent des paramètres thermiques obtenus par combinaison linéaire des paramètres du fluide en écoulement et du solide constituant la matrice. Soit

$$\lambda_a = \omega \lambda_f + (1 - \omega) \lambda_s \quad \text{conductivité thermique}$$

$$C_a = \omega C_f + (1 - \omega) C_s \quad \text{capacité calorifique}$$

- Les transferts thermiques les plus importants ont pour origine :
  - . la conduction dans le milieu continu équivalent,
  - . la convection par le fluide,
  - . la dispersion thermique,
 dont les lois fondamentales sont définies en II.4.2.

Sur ces bases, et en se limitant au cas où le fluide vecteur est monophasique (en fait l'eau), et chimiquement homogène, le modèle de transfert thermique s'écrit sous la forme d'un système d'équations :



$$\begin{aligned}
 (71) \quad \left\{ \begin{array}{ll}
 \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = -\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} & \text{conservation de la masse du fluide} \\
 V = -\frac{k}{\mu} \vec{g} \operatorname{grad}(p + \rho g z) = V_e \times \omega_{\text{cin}} & \text{loi de Darcy} \\
 \rho = \rho_0 [1 - \eta(\theta - \theta_0)] & \text{équations d'état du fluide} \\
 \mu = \mu(\theta) & \text{en fonction de } \theta. \\
 \\
 \rho_a C_a \frac{\partial \theta}{\partial t} = \underbrace{\operatorname{div}(\lambda_a \vec{g} \operatorname{grad} \theta)}_{\text{conduction}} + \underbrace{\operatorname{div}(D_{th} \vec{g} \operatorname{grad} \theta)}_{\text{dispersion}} - \underbrace{\operatorname{div} \rho_f C_f \vec{V}_e \theta}_{\text{convection}} \\
 \\
 \text{ou en regroupant les termes de conduction et de dispersion} \\
 \\
 \rho_a C_a \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div} [(\lambda_a + D_{th}) \vec{g} \operatorname{grad} \theta] - \operatorname{div} \rho_f C_f \vec{V}_e \theta
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Remarques :

1/ Pour la résolution de ce système il faudra, comme pour celui décrivant le transfert en masse, distinguer deux cas :

. Si la gamme de variation de  $\theta$  est assez faible pour que l'on puisse admettre :

$$\rho \neq \rho_0 \quad \text{et} \quad \mu \neq \mu_0$$

il suffit de résoudre d'abord l'équation de mouvement du fluide pour  $\vec{V}_e$  puis de reporter dans l'équation de transfert thermique pour  $\theta$ .

. Si les variations de  $\theta$  ont une influence non négligeable sur  $\rho$  et  $\mu$  il faut résoudre simultanément. Rappelons à ce sujet que pour l'eau  $\mu$  est divisée par deux quand  $\theta$  passe de 20 à 55° et par trois quand  $\theta$  passe de 20 à 95°.

2/ Dans l'équation de transfert thermique il est d'usage dans le terme de diffusion de regrouper le paramètre  $(\lambda_a + D_{th})$  en un seul paramètre. Soit en admettant  $\lambda_a \gg D_{th}$  (la conductivité l'emporte sur la dispersion) soit (plus réaliste) en posant :  $(\lambda_a + D_{th}) = D_a$  = diffusion thermique de l'aquifère.

## BIBLIOGRAPHIE

BACHTAKOV D.N., CHESTAKOV V.M. (1975) .- Essais géohydrodynamiques. Détermination des paramètres des aquifères .- traduction M. Reliant .- rapport BRGM 75 SGN 446 AME.

BERKALOFF E. (1963) .- Essai de puits. Interprétation. Nappe libre avec strate conductrice d'eau privilégiée .- rapport BRGM DS 63 A 18.

BERKALOFF E. (1966) .- Essai de capacité des puits sur la dépression du niveau piézométrique. Limites de validité des formules de THEIS et de JACOB .- rapport BRGM DS 66 A 128.

BERKALOFF E. (1967) .- Evaluation des caractéristiques d'une couche aquifère par des pompages de courte durée dans un puits .- rapport BRGM DS 67 A 147.

BERKALOFF E. (1968) .- Essai de pompage à débit constant. L'effet perturbateur de la capacité du puits sur le résultat d'évaluation des caractéristiques d'une couche aquifère .- rapport BRGM 68 SGL 154 HYD.

BERKALOFF E. (1969) .- Interprétation des pompages d'essai. Cas de nappes captives avec une strate conductrice d'eau privilégiée .- rapport BRGM 69 SGL 175 HYD.

BERKALOFF E. (1969) .- Interprétation des remontées de niveau d'eau après un pompage à débit constant .- rapport BRGM 69 SGL 228 HYD.

BONNET M., LALLEMAND-BARRES A. (1972) .- Détermination des paramètres des aquifères à l'aide de traceurs. Etude documentaire .- rapport BRGM 72 SGN 017 AME.

BONNET M., DEGALLIER R. (1973) .- Etude d'une méthodologie de mesure de la capacité d'une éponte semi-perméable de nappe captive. Expérience du Val d'Authion. Description de l'essai. Interprétation .- rapport BRGM 73 SGN 428 AME.

BOURGEOIS M. (1977) .- Reconnaissance des aquifères par forages. Estimation des caractéristiques des terrains et des fluides en particulier à l'aide des diagaphies .- rapport BRGM 77 SGN 487 HYD.

DEGALLIER R. (1969) .- Interprétation des variations naturelles du niveau des nappes souterraines .- rapport BRGM 69 SGL 131 HYD.

DEGALLIER R. (1976) .- Effets de la situation des piézomètres sur l'interprétation de pompages en nappe libre .- rapport BRGM 76 SGN 189 AME.

FABRIS H., LOPOUKHINE M. (1976) .- Essais et mesures destinés à l'évaluation du potentiel des puits géothermiques .- rapport BRGM 76 SGN 045 GTH.

FORKASIEWICZ J., MARGAT J. (1966) .- Estimation du débit spécifique relatif par essais de puits de courte durée .- rapport BRGM DS 66 A 120.

FORKASIEWICZ J. (1969) .- Interprétations des données des pompages d'essai pour l'évaluation des paramètres des aquifères. Aide-mémoire .- rapport BRGM 69 SGL 293 HYD.

FORKASIEWICZ J. (1970) .- Etablissement du programme des pompages d'essai .- rapport BRGM 70 SGN 115 HYD.

FORKASIEWICZ J., PEAUDECERF P. (1970) .- Méthode d'interprétation des pompages d'essai en nappe libre .- rapport BRGM 70 SGN 359 HYD.

FORKASIEWICZ J. (1972) .- Interprétation des données de pompages d'essai pour l'évaluation des paramètres des aquifères. Aide-mémoire. (2ème édition revue et complétée du rapport 69 SGL 293 HYD) .- rapport BRGM 72 SGN 273 AME.

FORKASIEWICZ J. (1972) .- Cahier des travaux pratiques d'interprétation des pompages d'essai .- rapport BRGM 72 SGN 299 AME.

FORKASIEWICZ J., PEAUDECERF P. (1973) .- Effets de la pénétration partielle d'un puits de pompage sur l'évolution des rabattements .- rapport BRGM 73 SGN 441 AME.

FORKASIEWICZ J., MARGAT J., PEAUDECERF P. (1976) .- Essais sur les forages artésiens jaillissants et sur les sources .- rapport BRGM 76 SGN 349 AME.

FORKASIEWICZ J. (1976) .- Calcul des ouvrages de captage. Rapport n° 1. Calcul des pertes de charge dans les puits ou forages. Application à la détermination du débit maximal exploitable .- rapport BRGM 76 SGN 380 AME.

FORKASIEWICZ J., VANDENBEUSCH M. (1976) .- Calcul des ouvrages de captage. Rapport n° 3. Calcul des puits à drains rayonnants .- rapport BRGM 76 SGN 454 AME.

FORKASIEWICZ J. (1976) .- Etablissement du programme des pompages d'essai (2ème édition revue et complétée) .- rapport BRGM 76 SGN 473 AME.

GRINGARTEN A.C., SAUTY J.P. (1976) .- Influence de la réinjection sur la température des réservoirs géothermiques utilisés pour le chauffage urbain .- rapport BRGM 76 SGN 553 GTH.

LOUIS C. (1975) .- Introduction à l'hydraulique des roches .- rapport BRGM 75 SGN 367 AME.

NOYER M.L. (1977) .- Simulations des transferts thermiques dans les aquifères. Conditions de validité des solutions analytiques .- rapport BRGM 77 SGN 598 GTH.

PEAUDECERF P. (1970) .- Calcul automatique de la diffusivité des nappes en relation avec un plan d'eau libre .- rapport BRGM 70 SGN 083 HYD.

PEAUDECERF P., TALBO H. (1970) .- Etude des méthodes de mesure ponctuelle de la diffusivité des couches aquifères .- rapport BRGM 70 SGN 269 HYD.

PEAUDECERF P. (1975) .- A.T.P. "Hydrogéologie". Etude méthodologique des caractéristiques de transfert des substances chimiques dans les nappes. 1er rapport : travaux de reconnaissance et d'équipement du site expérimental de Bonnaud (39) .- rapport BRGM 75 SGN 056 AME.

PEAUDECERF P. (1975) .- Essais et mise en production des aquifères profonds. Rapport n° 1. Calcul des coefficients d'emmagasinement pour l'évaluation du compactage des formations .- rapport BRGM 75 SGN 184 AME.

PEAUDECERF P., MARGAT J. (1976) .- Etude méthodologique des caractéristiques de transferts de substances chimiques dans les nappes. 5ème rapport : synthèse de la recherche .- rapport BRGM 76 SGN 226 AME.

SAUTY J.P. (1976) .- Analyse de la courbe de restitution d'une injection instantanée de traceur parfait dans une nappe en écoulement uniforme .- rapport BRGM 76 SGN 501 AME.

SAUTY J.P. (1977) .- Identification des paramètres du transport hydrodispersif dans les aquifères par interprétation de traçages en écoulement cylindrique convergent ou divergent .- rapport BRGM 77 SGN 175 HYD.

SAUTY J.P. (1977) .- Contribution à l'identification des paramètres de dispersion dans les aquifères par interprétation des expériences de traçage .- rapport BRGM 77 SGN 515 HYD.

TRUPIN G. (1969) .- Manuel pratique des pompages d'essai .- rapport BRGM 69 SGL 258 HYD.

UNGEMACH P. (1976) .- Exploitation analytique d'historiques pressions-débits à des fins d'identification régionale des paramètres hydrodynamiques de couche. Application au cas d'une batterie de pompage à variation quasi linéaire de débit .- rapport BRGM 76 SGN 510 AME.

VANDENBEUSCH M. (1976) .- Essais et mise en production des aquifères profonds. Rapport n° 2. Corrections de salinité, pression, température sur les mesures piézométriques .- rapport BRGM 76 SGN 482 AME.