

MINISTÈRE DE L'INDUSTRIE, DU COMMERCE ET DE L'ARTISANAT

BUREAU DE RECHERCHES GÉOLOGIQUES ET MINIÈRES

SERVICE GÉOLOGIQUE NATIONAL

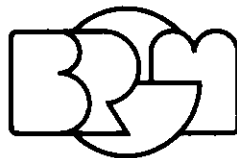
B.P. 6009 - 45018 Orléans Cédex - Tél.: (38) 63.80.01

SIMULATION DES TRANSFERTS THERMIQUES DANS LES AQUIFÈRES

CONDITIONS DE VALIDITÉ DES SOLUTIONS ANALYTIQUES

par

M.-L. NOYER



Département hydrogéologie

B.P. 6009 - 45018 Orléans Cédex - Tél.: (38) 63.80.01

77 SGN 598 HYD

Novembre 1977

R E S U M E

Dans ce rapport, on étudie les transferts thermiques qui ont lieu dans une nappe aquifère au cours d'une injection continue d'eau chaude au moyen soit d'une tranchée rectiligne d'épaisseur négligeable, soit d'un puits unique, de rayon négligeable. L'aquifère est supposé homogène, isotrope, d'extension latérale infinie, d'épaisseur constante. Les épontes sont homogènes infinies. Dans ces conditions, les écoulements sont de type monodimensionnel uniforme ou radial divergent.

Les différents schémas étudiés correspondent à des hypothèses de complexité croissante en ce qui concerne la prise en compte de la conductivité thermique en direction horizontale et verticale dans l'aquifère et les épontes.

Les solutions analytiques des équations de transfert établies au cours de plusieurs travaux étrangers antérieurs (AVDONINE, RUBINSTEIN) sont exprimées en fonction d'un nombre réduit de paramètres adimensionnels. A partir des abaques correspondants, on peut facilement déterminer le domaine de validité de chaque approximation pour des valeurs données des paramètres physiques.

La dérivation analytique des cas limites correspondant à des solutions bien connues (LAUWERIER, OGATA et BANKS, ...) ainsi que le détail des calculs sont présentés en annexe.

Ce travail a été réalisé dans le cadre des études méthodologiques des départements Hydrogéologie et Géothermie.

S O M M A I R E

Page

RESUME

1. INTRODUCTION	1
2. EQUATIONS REGISSANT LES ECHANGES THERMIQUES DANS LE SCHEMA DE LAUWERIER	3
2.1 Notations utilisées dans le texte	3
2.2 Equations	4
2.2.1 Equations dans l'aquifère	4
2.2.2 Equations dans les éponges	6
3. LES SCHEMAS DE RUBINSTEIN ET LEURS CONDITIONS D'APPLICATION	8
3.1 Présentation	8
3.2 Application au problème du doublet	9
4. ETUDE DU SCHEMA B EN ECOULEMENT LINEAIRE	11
4.1 Equations et solution	11
4.2 Résultats	13
4.3 Conséquences pratiques	13
5. ETUDE DES SCHEMAS DE RUBINSTEIN EN ECOULEMENT RADIAL - SCHEMA B (OU SCHEMA INCOMPLET DE CONCENTRATION DES SOURCES)	16
5.1 Equations et solutions	16
5.2 Résultats	17
5.3 Conséquences pratiques	19

6. ETUDE DES SCHEMAS DE RUBINSTEIN EN ECOULEMENT RADIAL - SCHEMA D (OU SCHEMA DE CONCENTRATION DES SOURCES)	21
6.1 Equations et solution	21
6.2 Cas limites	22
6.3 Résultats	23
6.4 Conséquences pratiques	24
7. ETUDE DES SCHEMAS DE RUBINSTEIN EN ECOULEMENT RADIAL - SCHEMA C (OU SCHEMA EXACT INCOMPLET)	28
7.1 Equations et solution	28
7.2 Résultats	30
CONCLUSION	31
BIBLIOGRAPHIE	32

TABLE DES ANNEXES

ANNEXE 1

1.1 Calcul de la solution du système (4-1 abc, 4-2 abcd) décrivant le schéma B en écoulement linéaire

1.2 Etude des cas limites

- a) La conductivité horizontale k_A de l'aquifère tend vers zéro
- b) La conductivité verticale k_R dans les épontes tend vers zéro

ANNEXE 2

2.1 Calcul de la solution du système (5.1,2) décrivant le schéma B en écoulement radial

2.2 Etude des cas limites

- a) La conductivité k_A dans l'aquifère tend vers zéro
- b) La conductivité k_R dans les épontes tend vers zéro

ANNEXE 3

Vérification de la solution présentée par CLOUET D'ORVAL et LEDOUX (ref. /9/)

ANNEXE 4

4.1 Calcul de la solution du système (6.1,2) décrivant le schéma D en écoulement radial

4.2 Le temps t tend vers l'infini - Etude de la limite

ANNEXE 5

Formule asymptotique aux grands n

5.1 Expression et résultats

5.2 Calcul de l'expression asymptotique

LISTE DES FIGURES

	<u>Page</u>
<i>Fig. 1</i> - Représentation d'un tube de courant	5
<i>Fig. 2</i> - Ecoulement linéaire - schéma B	14
<i>Fig. 3</i> - Ecoulement radial - schéma B	18
<i>Fig. 4</i> - Influence de la conductivité horizontale dans les épontes Comparaison entre les schémas B et D	
4a) : $Pe = 4$	25
4b) : $Pe = 8$	26
<i>Fig. 5</i> - Ecoulement radial - Schéma D	A5.4
5a) : $Pe = 2$	
5b) : $Pe = 4$	
5c) : $Pe = 8$	

1. INTRODUCTION

Les équations régissant les phénomènes d'écoulement et de transferts thermiques dans les milieux poreux, respectivement :

$$\operatorname{div} (K \vec{\operatorname{grad}} H) + Q = S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} (K \vec{\operatorname{grad}} T) - \operatorname{div} (\rho_f C_f \vec{v} T) = \rho_a C_a \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.2)$$

sont des équations fortement couplées. Elles doivent être résolues simultanément, car la perméabilité K (donc la charge hydraulique H) varie avec la température, et la température dépend elle-même de la vitesse de l'eau v , donc du champ de potentiel hydraulique.

Une telle résolution ne peut être obtenue que par voie numérique discrète ; elle est difficile et très onéreuse, et ne peut être envisagée pour l'étude de problèmes particulièrement complexes.

Pour la résolution d'un certain nombre de problèmes particuliers (comme celui de l'espacement des puits d'un doublet hydrothermique) dans lesquels la plupart des paramètres fondamentaux sont connus de façon imparfaite, une telle approche ne se justifie pas. On a donc préféré entreprendre la mise au point de modèles mathématiques approchés, faciles et peu coûteux à exploiter, dans lesquels les erreurs éventuelles sur les résultats dues aux hypothèses simplificatrices utilisées sont inférieures à l'incertitude sur les paramètres thermiques et hydrauliques du milieu poreux étudié.

Trois programmes, CADOU DAL /1/, METERNIQ /2/ et STENDHAL /3/, ont ainsi été élaborés. Le premier traite d'un doublet isolé dans un aquifère infini en écoulement naturel. Le deuxième permet de simuler, dans les mêmes conditions, un nombre quelconque de puits de production et de puits d'injection. Le dernier enfin envisage le cas d'aquifères hétérogènes et à géométrie quelconque. Ces programmes ont en commun un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui permettent de découpler les équations (1.1) et (1.2), et par suite de résoudre séparément le problème des pressions et celui des températures. Ces hypothèses sont les suivantes :

Hypothèses sur l'écoulement

- régime hydrodynamique permanent dans un plan horizontal (2D)
- potentiels uniformes le long d'une verticale dans le réservoir (hypothèse de DUPUIT)
- caractéristiques hydrodynamiques indépendantes de la température (en particulier, il n'y a pas de contraste de viscosité entre l'eau en place et l'eau injectée).

Hypothèses sur les transferts thermiques

- régime thermique transitoire
- caractéristiques thermiques indépendantes de la température
- répartition initiale uniforme des températures
- dans l'aquifère, les transferts thermiques se font uniquement par transport avec l'eau injectée et par conduction instantanée de la matrice poreuse. Il n'y a pas de conduction dans une direction horizontale et la température est uniforme le long d'une verticale.

- dans les épontes, d'extension verticale infinie, les échanges thermiques se font uniquement par conduction dans une direction verticale. Il n'y a pas de conduction dans une direction horizontale.
- la température de l'aquifère et celle des épontes sont à tout instant identiques dans le plan de contact entre l'aquifère et les épontes.

Ces hypothèses sur les transferts thermiques sont connues dans la littérature sous le nom d'hypothèses de LAUWERIER. Dans les trois programmes cités plus haut, elles permettent d'effectuer les calculs thermiques analytiquement à l'aide de fonctions intégrales. Par contre, les calculs hydrauliques sont effectués différemment dans chaque programme, à l'aide de la théorie des potentiels (CADOUDAL ou METERNIQ) ou d'une méthode aux différences finies (STENDHAL).

2. EQUATIONS REGISSANT LES ECHANGES THERMIQUES DANS LE SCHEMA DE LAUWERIER

Ces équations ont été présentées dans le mode d'emploi du programme CADOU DAL /1/ et dans divers articles publiés dans la littérature (/3/, /4/). Nous en rappelons ici la dérivation.

2.1. Notations utilisées dans le texte

(différentes de celles des annexes où l'on a suivi la notation de RUBINSTEIN)

h : épaisseur de la couche aquifère
 T_0 : température initiale uniforme dans l'aquifère et les éponges
 T_i : température d'injection
 T_F : température dans l'aquifère
 T_R : température dans les éponges
k : conductivité thermique Indices utilisés : { A aquifère
p : masse volumique { R roche
c : chaleur spécifique { F fluide
Q : débit d'injection dans le puits, en radial (dimension L^3T^{-1})
 Q_1 : débit par unité de longueur de galerie d'un côté de la galerie (dimension L^2T^{-1})
dq = ux h dy débit dans un tube de largeur dy (dimension L^3T^{-1})
D : distance entre les puits dans le cas du doublet
S : surface d'un tube de courant entre le puits d'injection et un point courant M
t : temps écoulé depuis le début de l'injection
x,r : coordonnées spatiales dans le plan horizontal en linéaire et en radial
z : coordonnée spatiale, en linéaire et en radial, en direction verticale.

Nombres adimensionnels

$$T_D = \frac{T_F - T_0}{T_i - T_0} \text{ température réduite}$$

Paramètre de perte par les éponges

$$\lambda = \frac{\rho F C F \rho A C A}{k_R \rho R C R} \frac{Q h}{D^2} \text{ cas du doublet (/3/)}$$

$$\lambda = \frac{\rho F C F \rho A C A Q_1 h}{k_R \rho R C R x} \text{ monodimensionnel linéaire}$$

$$\lambda = \frac{\rho F C F \rho A C A Q h}{k_R \rho R C R \pi r^2} \text{ monodimensionnel radial}$$

Nombre de Péclet

$$Pe = 2\zeta = \frac{Q_1 \rho F C F x}{2h k_A} \text{ monodimensionnel linéaire}$$

$$Pe = 2\nu = \frac{Q \rho F C F}{2\pi h k_A} \text{ monodimensionnel radial}$$

Temps réduit

$$t_D = \frac{\rho F C F Q t}{\rho A C A D^2 h} \text{ doublet}$$

$$t_D = \frac{\rho F C F Q_1 t}{\rho A C A h x} \text{ linéaire}$$

$$t_D = \frac{\rho F C F Q t}{\rho A C A h \pi r^2} \text{ radial}$$

2.2 Equations

Deux conséquences importantes découlent des hypothèses énoncées au paragraphe 1 :

- Le régime hydraulique est permanent et non influencé par les évolutions thermiques ; il peut donc être calculé dans une première phase indépendante au cours de laquelle on déterminera les lignes de courant.
- Il n'y a pas d'échanges thermiques entre tubes de courant voisins : les transferts de chaleur peuvent donc être traités successivement dans chaque tube de courant limité par les lignes de courant ψ et $\psi + \Delta\psi$.

Sur la figure 1, on a représenté un tel tube de courant partant d'un puits d'injection I et allant à un puits de production P. S(M) est la surface du tube projetée sur un plan horizontal, comprise entre I et le point courant M.

Ecrivons le bilan de chaleur pour l'élément de volume $h\Delta S$, les faces de séparation avec les tubes voisins étant des frontières adiabatiques.

2.2.1 Equations dans l'aquifère

Nous devons équilibrer 4 termes :

- un terme d'emmagasinement : $\rho_A C_A \frac{\partial T_F}{\partial t} h \Delta S$

- un terme résultant des flux entrant et sortant par convection :

$$\rho F C_F u_x \frac{\partial T_F}{\partial x} h \Delta S$$

(où x est la direction d'écoulement du fluide)

- un terme d'échange par conduction avec les épontes : $2 k_R \left(\frac{\partial T_R}{\partial z} \right)_{z=h/2} \Delta S$

Le terme de convection peut être réécrit différemment (cf. /3/) dans la mesure où ΔS tend vers l'infiniment petit dS .

Considérons un système de coordonnées (x,y) où \vec{x} est la direction de l'écoulement, \vec{y} la direction perpendiculaire (dans l'élément de volume considéré).

Considérons dq le débit élémentaire dans un tube de courant

$$dq = u_x h dy$$

Ecrivons la variation de température en fonction de la surface :

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial S}$$

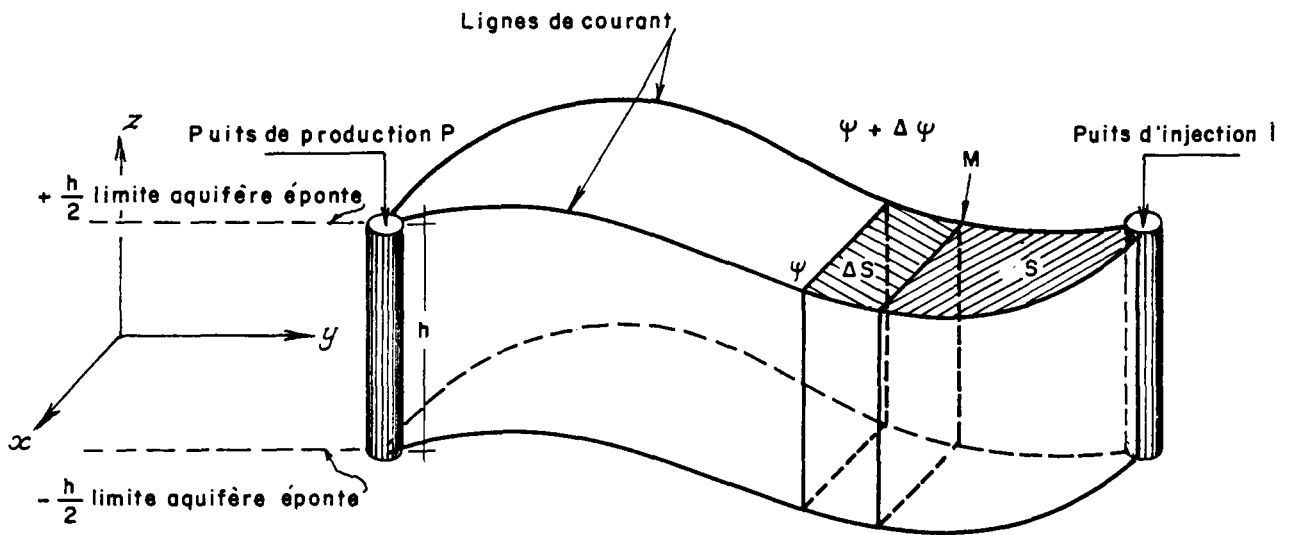


FIGURE 1

Représentation d'un tube de courant

Dans le cas présent, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ (la température ne varie pas sur la largeur d'un tube supposée suffisamment petite).

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial S} dy$$

$$\text{et } u_x \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dq}{h} \frac{\partial T}{\partial S}$$

Le terme de convection s'écrit donc :

$$\rho_F C_F dq \frac{\partial T_F}{\partial S} dS$$

L'équation thermodynamique dans l'aquifère s'écrit donc pour les variables $T_F(S,t)$ et $T_R(S,z,t)$:

$$\frac{h}{2} \rho_A C_A \frac{\partial T_F}{\partial t} + \frac{dq}{2} \rho_F C_F \frac{\partial T_F}{\partial S} - k_R \left(\frac{\partial T_R}{\partial z} \right)_{z=h/2} = 0 \quad (2.1a)$$

Cette équation ne contient donc qu'une variable spatiale S (écoulement monodimensionnel dans le plan horizontal).

Il faut lui ajouter la condition initiale

$$T_F(S,t=0) = T_0 \quad (2.1b)$$

et la condition aux limites :

$$T_F(S=0,t) = T_1 \quad (2.1c)$$

2.2.2 Equations dans les épontes

Le transfert de chaleur s'y fait par conduction verticale :

$$\frac{\partial^2 T_R}{\partial z^2} = \frac{\rho_R C_R}{k_R} \frac{\partial T_R}{\partial t} \quad (2.2a)$$

$$\text{avec la condition initiale } T_R(S,z,t=0) = T_0 \quad z \geq h/2 \quad (2.2b)$$

et les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} T_R(S, h/2, t) &= T_F(S, t) \quad \forall S, t \\ \lim_{z \rightarrow \infty} T_R(S, z, t) &= T_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2c)$$

La solution s'exprime alors sous la forme d'une fonction d'erreur :

$$\frac{T_0 - T_F}{T_0 - T_1} = \operatorname{erfc} \left\{ \frac{dS_D}{d\psi} \left[\lambda \left(t_D - \frac{dS_D}{d} \right) \right]^{-1/2} \right\} \quad (2.3)$$

$$\text{avec : } \lambda = \frac{\rho_F C_F \rho_A C_A Q h}{k_R \rho_R C_R D^2} \quad (2.4)$$

$$t_D = \frac{\rho_F C_F Q t}{\rho_A C_A D^2 h} \quad (2.5)$$

$$dS_D = dS/D^2$$

où D est la distance entre les puits et ψ la fonction de courant.

La variation totale de température au puits de production P au temps t_D est obtenue en intégrant par rapport à ψ sur tous les tubes de courant qui ont atteint le puits P pendant ce temps t_D .

3. LES SCHEMAS DE RUBINSTEIN ET LEURS CONDITIONS D'APPLICATION

3.1 Présentation

Il est intéressant d'essayer d'évaluer l'importance des approximations dues à l'utilisation du schéma de LAUWERIER. Pour cela, on peut envisager plusieurs autres schémas dans lesquels on prend en compte un seul paramètre supplémentaire jusqu'à obtenir un schéma exact dans lequel tous les échanges thermiques possibles sont considérés.

Une telle approche a été utilisée par RUBINSTEIN (/5/). Son étude a porté sur des écoulements simples (monodimensionnels), les seuls pour lesquels les conditions aux limites et la géométrie permettent de calculer des solutions analytiques. Ces écoulements monodimensionnels sont soit du type linéaire - écoulement perpendiculaire à une tranchée infinie rectiligne d'épaisseur négligeable -, soit du type radial - écoulement autour d'un puits parfait -.

Les schémas utilisés par RUBINSTEIN ne diffèrent que par les transferts conductifs considérés. Ils sont résumés dans le tableau ci-dessous, où k_h représente une conductivité thermique horizontale et k_v une conductivité verticale. A titre de référence, on a inclus dans le tableau le schéma de LAUWERIER.

	Nom du schéma	Hypothèses sur les échanges par conduction		Solution analytique disponible pour un écoulement monodimensionnel	
		dans l'aquifère	dans les épontes	linéaire	radial
A	Schéma de LAUWERIER	$k_h = 0$ $k_v = \infty$	$k_h = 0$ $k_v = k_R$ (valeur finie)	OUI \longleftrightarrow	OUI
B	Schéma incomplet de concentration des sources	$k_h = k_A$ (valeur finie) $k_v = \infty$	$k_h = 0$ $k_v = k_R$	OUI	OUI
C	Schéma exact incomplet	$k_h = 0$ $k_v = k_A$	$k_h = 0$ $k_v = k_R$	OUI \longleftrightarrow	OUI
D	Schéma de concentration des sources	$k_h = k_A$ $k_v = \infty$	$k_h = k_v = k_R$	NON	OUI
E	Schéma exact	$k_h = k_v = k_A$	$k_h = k_v = k_R$	NON	NON

Le signe \longleftrightarrow indique une identité de la forme analytique de la solution, en linéaire et en radial.

Pour connaître l'influence de la conductivité horizontale dans l'aquifère, il suffit de comparer les schémas A et B. La comparaison des schémas A et C renseignera sur l'influence de la conductivité verticale dans l'aquifère et celle des schémas B et D sur l'importance de la conductivité horizontale dans les épontes.

Le schéma E, "exact", ne peut être simulé qu'à l'aide de méthodes numériques discrètes. Ces méthodes présentent cependant l'inconvénient d'introduire des erreurs dans les résultats, dues à des phénomènes de dispersion numérique dont l'effet peut être confondu avec celui d'une conduction thermique. On pourra évaluer l'importance de la dispersion numérique en comparant les résultats du modèle numérique avec les différentes solutions analytiques disponibles dans les conditions des schémas A, B, C et D.

3.2 Application au problème du doublet

On peut essayer d'obtenir les solutions analytiques correspondant aux divers schémas ci-dessus, non plus en écoulement monodimensionnel mais dans le cas du problème de doublets multiples - comme cela a été réalisé dans le cas du schéma de LAUWERIER (/3/, /4/).

Considérons par exemple le schéma B qui diffère du schéma de LAUWERIER par la prise en compte de la conduction thermique en direction horizontale dans l'aquifère.

Si on veut considérer les transferts thermiques par tubes de courant, comme au paragraphe 2, il faut ajouter aux hypothèses du schéma B une condition d'adiabaticité entre deux tubes de courant, c'est-à-dire considérer k_A en direction de l'écoulement seulement alors que dans le schéma B de RUBINSTEIN k_A est isotrope dans le plan horizontal.

Avec cette hypothèse supplémentaire, l'équation du transfert de chaleur dans les épontes est identique à l'équation (2.2a) tandis que l'équation dans l'aquifère s'obtient simplement en ajoutant un terme conductif à travers les faces non adiabatiques dans le bilan de chaleur sur l'élément de tube de courant (fig. 1).

$$\text{Soit - } k_A \frac{\partial^2 T_F}{\partial x^2} h \Delta S$$

$$\text{Avec l'hypothèse } \partial T / \partial y = 0, \text{ on voit que } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial S^2} (dy)^2$$

et donc le terme supplémentaire s'écrit :

$$- k_A \frac{\partial^2 T_F}{\partial S^2} (dy)^2 h \Delta S$$

L'équation résultante est alors :

$$\frac{h}{2} \rho_A C_A \frac{\partial T_F}{\partial t} - \frac{h}{2} k_A dy^2 \frac{\partial^2 T_F}{\partial S^2} + \frac{dq}{2} \rho_F C_F \frac{\partial T_F}{\partial S} - k_R \left(\frac{\partial T_R}{\partial z} \right)_{z=h/2} = 0 \quad (3.1a)$$

On voit que cette équation ne dépend plus uniquement de la variable S, mais comprend également un terme dy^2 , dy étant la largeur du tube de courant qui n'est pas constante le long du tube.

On ne peut donc pas obtenir, dans le cas du doublet, une solution analytique simple pour les transferts de chaleur avec conduction dans l'aquifère, alors que cela était possible dans le cas du schéma de LAUWERIER.

Il est cependant intéressant de comparer les solutions correspondante aux différents schémas de RUBINSTEIN, lorsqu'elles existent, c'est-à-dire en écoulements monodimensionnels (radial ou linéaire), afin d'obtenir des informations sur les conditions de validité des hypothèses correspondantes pour les valeurs utiles des divers paramètres.

Pour plus de clarté, rappelons que pour tous les schémas de RUBINSTEIN les hypothèses physiques sont les suivantes :

- Hypothèses sur l'écoulement identiques à celles énoncées au paragraphe 1 ;
- L'aquifère est homogène, d'épaisseur uniforme h, d'extension horizontale infinie. Les épontes au-dessus et au-dessous de l'aquifère sont imperméables et d'extension verticale et horizontale infinie. Le système est donc symétrique par rapport au plan médian de l'aquifère.
- Au temps initial, il y a répartition uniforme des températures en tous points de l'aquifère et des épontes (soit T_0).
- La température d'injection T_i est maintenue constante, ainsi que le débit pendant toute la durée de l'injection.
- Il y a continuité des températures au contact entre l'aquifère et les épontes.
- Les caractéristiques thermiques sont indépendantes de la température.

4. ETUDE DU SCHEMA B EN ECOULEMENT LINEAIRE

La comparaison des résultats du schéma B avec la solution du schéma de LAUWERIER dans les mêmes conditions d'écoulement doit permettre d'évaluer l'erreur faite en négligeant k_A , c'est-à-dire la conductivité thermique horizontale dans l'aquifère.

4.1 Equations et solution

AVDONINE (/6/ et RUBINSTEIN (/5) ont considéré le cas d'une injection au moyen d'une tranchée infinie rectiligne d'épaisseur négligeable dans un aquifère répondant aux conditions rappelées ci-dessus.

Les lignes de courant sont donc des demi-droites perpendiculaires au plan de la tranchée en $x = 0$, symétriques par rapport au plan $x = 0$ car on considère qu'il y a partage de l'écoulement de part et d'autre de la tranchée.

Le problème est donc linéaire, monodimensionnel et la variation de température une fonction de x et du temps t uniquement.

Le système (2-1,2) qui représentait les conditions du schéma de LAUWERIER devient :

$$\frac{h}{2} \rho_A C_A \frac{\partial T_F}{\partial t} + \frac{Q_1 \rho_F C_F}{2} \frac{\partial T_F}{\partial x} - k_R \left(\frac{\partial T_R}{\partial z} \right)_{z=h/2} - \frac{h k_A}{2} \frac{\partial^2 T_F}{\partial x^2} = 0 \quad (4.1a)$$

$$T_F(x, t=0) = T_0 \quad (4.1b)$$

$$T_F(x=0, t) = T_1 \quad (4.1c)$$

$$\frac{\partial^2 T_R}{\partial z^2} = \frac{\rho_R C_R}{k_R} \frac{\partial T_R}{\partial t} \quad (4.2a)$$

$$T_R(x, z, t=0) = T_0 \quad z \geq h/2 \quad (4.2b)$$

$$T_R(x, h/2, t) = T_F(x, t) \quad \forall x, t \quad (4.2c)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T_R(x, z, t) = T_0 \quad (4.2d)$$

Les notations sont identiques à celles du système (2-1,2). Notons que le terme

$$\begin{aligned} \frac{dq}{2} \rho_F C_F \frac{\partial T_F}{\partial S} & \text{ est remplacé par } \frac{Q_1}{2} \rho_F C_F \frac{\partial T_F}{\partial x} \\ & = \frac{Q_1}{2} dy \rho_F C_F \frac{\partial T_F}{\partial S} \quad \text{avec } Q_1 = \frac{1}{2} \frac{dq}{dy}, \text{ débit par unité de longueur de tranchée,} \\ & \quad \text{d'un côté de la tranchée.} \end{aligned}$$

Réécrit sous forme adimensionnelle (cf. /5/ et /6/), le système ci-dessus peut être aisément résolu par transformation de LAPLACE (cf. annexe 1).

On définit une température réduite, soit :

$$T_D = \frac{T_F - T_0}{T_i - T_0}$$

La variation de T_D à une distance x de la tranchée d'injection au temps t peut s'exprimer en fonction de trois paramètres adimensionnels : les deux premiers, λ et t_D , sont analogues à ceux rappelés au paragraphe 2 et utilisés en /3/ ; le troisième est un nombre de Péclet, Pe , qui n'apparaissait pas dans le cas du schéma de LAUWERIER (il était infini).

Nous avons donc maintenant :

$$t_D = \frac{\rho F C_F Q_1 t}{\rho_A C_A h x} \quad \begin{array}{l} Q_1 \text{ débit par unité de longueur} \\ \text{de galerie} \end{array} \quad (4.3a)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{dq}{dy}$$

$$\lambda = \frac{\rho F C_F \rho_A C_A Q_1 h}{k_R \rho_R C_R x} \quad (4.3b)$$

$$Pe = 2\zeta = \frac{Q_1 \rho F C_F x}{2 h k_A} \quad (4.3c)$$

Il est facile de vérifier que Pe est analogue au nombre de Péclet utilisé en dispersion de polluants (/13/) avec $Pe = ux/D$, u vitesse de propagation et D diffusivité.

La variation de température dans l'aquifère s'écrit alors à partir de (A1.10) :

$$T_D(\lambda, \zeta, t_D) = \frac{2 C_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp \left[- \left(C_1 s - \frac{C_2}{s} \right)^2 \right] \operatorname{erfc} \left(C_3 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} \right) \frac{ds}{s^2} \quad (4.4)$$

$$\text{avec } C_1 = \sqrt{\zeta t_D}$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{\zeta}{\lambda}}$$

$$C_3 = \sqrt{\frac{t_D}{\lambda}}$$

On vérifie (cf. annexe 1) que l'on retrouve la formule de LAUWERIER lorsque $\zeta \rightarrow \infty$, c'est-à-dire quand la conductivité horizontale dans l'aquifère k_A tend vers zéro.

De même, lorsque k_p , conductivité verticale dans les éponges, tend vers zéro, on retrouve une formule identique à celle de OGATA et BANKS (/7/) décrivant l'évolution de la concentration d'une substance transportée par un fluide à travers un milieu non absorbant.

4.2 Résultats

On a calculé les valeurs de $T_D(\lambda, Pe, t_D)$ en fonction de t_D pour différentes valeurs des paramètres λ et Pe . L'erreur relative sur t_D est partout inférieure à 1%.

Sur la figure 2, on a reporté trois groupes de courbes correspondant à $\lambda = .5, 5.$ et ∞ et, pour chaque groupe, on a choisi cinq valeurs de $Pe = 2\zeta$, soit 1, 2, 20 et 200, ainsi que le cas limite $Pe \rightarrow \infty$.

Ces courbes ont été obtenues à l'aide des expressions (4.4) pour les valeurs finies de λ et Pe , (A1.12) pour $Pe \rightarrow \infty$ et (A1.13) pour $\lambda \rightarrow \infty$.

On peut faire les remarques suivantes :

- A λ fixé, lorsque Pe croît, les courbes tendent bien vers la courbe limite de LAUWERIER, $Pe = \infty$ (en trait plein sur la figure). Dès que $Pe = 200$, la convergence est pratiquement réalisée, sauf pour t_D voisin de 1.
- On a par ailleurs vérifié que à Pe fixé les courbes tendent vers la solution limite à $\lambda \infty$ lorsque λ croît et en fait la convergence est réalisée dès que $\lambda \geq 1000$.
- Par rapport aux courbes limites de LAUWERIER ($Pe \rightarrow \infty$), les courbes obtenues se caractérisent par une variation de la température avant l'arrivée du front thermique pour $t_D = 1$, ce qui traduit bien l'influence de la conductivité non nulle.

4.3 Conséquences pratiques

L'examen des résultats ci-dessus nous amène à conclure que, dans le cas d'un écoulement linéaire et monodimensionnel, on peut pratiquement négliger l'influence de la conductivité thermique de l'aquifère dans le sens de l'écoulement, dès que le facteur Pe est supérieur ou égal à 200, et ceci quel que soit λ . Il convient d'examiner à quels cas pratiques cette condition correspond

$$Pe = \frac{Q_1 \times \rho F C_F}{2h k_A}$$

$\rho F C_F$ est connu et vaut 10^6 cal/m³/°C

k_A est de l'ordre de 0.6 cal/m/s/°C

ce qui donne :

$$Pe = \frac{Q_1 \times 10^6}{h \cdot 1.2} \text{ avec } \frac{Q_1 \times x}{h} \text{ en m}^2/\text{s}$$

$$Pe \text{ sera } \geq 200 \text{ si } \frac{Q_1 \times x}{h} \geq 0.864 \text{ m}^2/\text{h}$$

Connaissant les valeurs de Q_1 et h , on pourra déterminer la distance x à partir de laquelle l'approximation de LAUWERIER est suffisante.

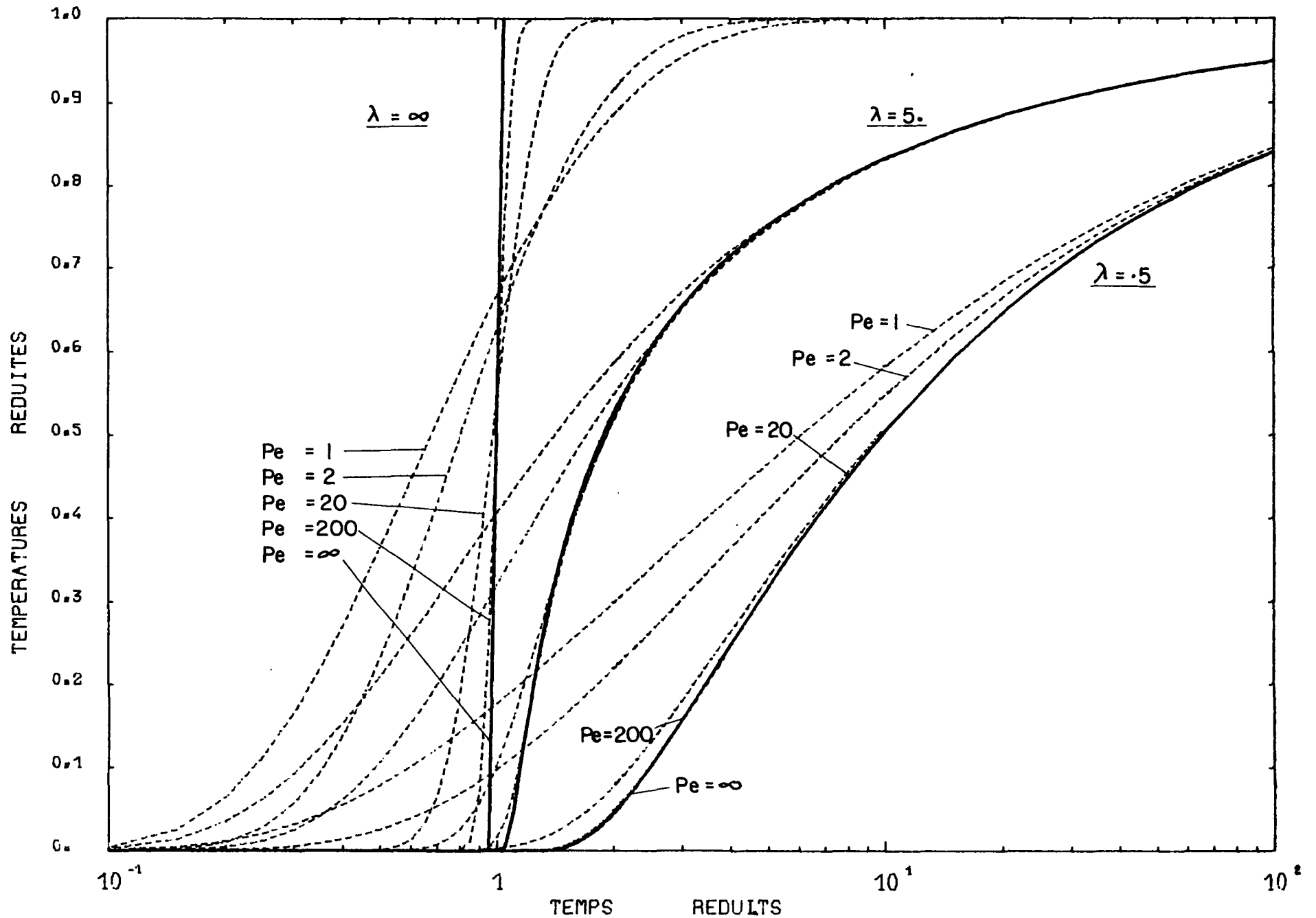


FIGURE 2 - ECOULEMENT LINEAIRE - SCHEMA B
 OU "SCHEMA INCOMPLET DE CONCENTRATION DES SOURCES"

Nous ne disposons pas ici d'une gamme de valeurs Q_1 ; aussi nous réserverons une étude plus détaillée des conséquences pratiques aux cas radiaux pour lesquels nous connaissons les valeurs des débits et hauteurs d'aquifère.

5. ETUDE DES SCHEMAS DE RUBINSTEIN EN ECOULEMENT RADIAL - SCHEMA B (OU SCHEMA INCOMPLET DE CONCENTRATION DES SOURCES)

On considère toujours un aquifère d'extension horizontale infinie d'épaisseur uniforme h , entre des épontes d'extension verticale infinie, homogènes ; le tout étant parfaitement symétrique par rapport au plan médian de l'aquifère. L'injection de l'eau est réalisée au moyen d'un seul puits de rayon infiniment petit. Le problème présente donc la symétrie cylindrique.

5.1 Equations et solution

Pour avoir l'équivalent du système (4-1,2) en géométrie radiale, il suffit de remarquer que la vitesse d'écoulement du fluide est maintenant donnée par

$$u_r = \frac{Q}{2\pi rh} \quad \left(\text{ce qui donne un terme de convection de la forme } \frac{h}{2} \rho_F C_F \frac{Q}{2\pi hr} \frac{\partial T_F}{\partial r} \right)$$

et de remplacer le Laplacien par son équivalent en coordonnées radiales.

On obtient le système suivant :

$$\frac{h}{2} \rho_{AC_A} \frac{\partial T_F}{\partial t} + \frac{Q \rho_F C_F}{4\pi r} \frac{\partial T_F}{\partial r} - k_R \left(\frac{\partial T_R}{\partial z} \right)_{z=h/2} - k_A \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 T_F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_F}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.1a)$$

$$T_F(r, t=0) = T_0 \quad (5.1b)$$

$$T_F(r=0, t) = T_1 \quad (5.1c)$$

$$\frac{\partial^2 T_R}{\partial z^2} = \frac{\rho_R C_R}{k_R} \frac{\partial T_R}{\partial t} \quad (5.2a)$$

$$T_R(r, z, t=0) = T_0 \quad z \geq h/2 \quad (5.2b)$$

$$T_R(r, h/2, t) = T_F(r, t) \quad \forall r, t \quad (5.2c)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T_R(r, z, t) = T_0 \quad (5.2d)$$

où Q représente le débit total dans le puits d'injection.

De même que dans le cas linéaire, le système peut être résolu par transformation de LAPLACE (cf. annexe 2).

La température réduite dans l'aquifère, $T_D = \frac{T_F - T_0}{T_1 - T_0}$, peut encore s'exprimer en fonction de 3 paramètres adimensionnels, qui sont :

$$t_D = \frac{\rho_F C_F Q t}{\rho_{AC_A} h \pi r^2} \quad (5.3a)$$

$$\lambda = \frac{\rho_F C_F \rho_{AC_A} Q h}{k_R \rho_R C_R \pi r^2} \quad (5.3b)$$

$$Pe = 2v = \frac{Q C_F \rho_F}{2\pi h k_A} \quad (5.3c)$$

De même qu'en linéaire, ce nombre Pe est un nombre de Péclet analogue à celui qui est considéré pour l'étude de la dispersion des polluants.

La solution s'exprime sous la forme suivante à partir de (A2.7) :

$$T_D(\lambda, \nu, t_D) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\nu}{t_D} \right)^\nu \int_0^1 \exp \left(- \frac{\nu}{t_D s} \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{t_D}{\lambda}} \frac{s}{\sqrt{1-s}} \right) \frac{ds}{s^{\nu+1}} \quad (5.4)$$

Dans le cas où ν n'est pas trop petit (en fait $\nu \geq 5$), on démontre que (5.4) devient :

$$T_D(\lambda, \nu, t_D) = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_0^1 \exp \left[\nu \left(\log \frac{1}{t_D s} + 1 - \frac{1}{t_D s} \right) \right] \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{t_D}{\lambda}} \frac{s}{\sqrt{1-s}} \right) \frac{ds}{s} \quad (5.5)$$

Comme dans le cas linéaire, on vérifie qu'on retrouve la formule de LAUWERIER lorsque $\nu \rightarrow \infty$ (cf. annexe 2).

Lorsque la conductivité verticale dans les épontes k_R tend vers zéro, $\lambda \rightarrow \infty$; on démontre que l'on retrouve la solution du schéma sans pertes par les épontes donnée par CLOUET D'ORVAL et LEDOUX (/9/).

5.2 Résultats

Comme dans le cas linéaire, on a représenté sur la figure 3 les variations de T_D en fonction de t_D pour différentes valeurs des paramètres λ et $Pe = 2\nu$, soit $\lambda = .5, 5., \infty$ et $Pe = 2., 10., 20., 200., \infty$.

(Nous n'avons pas pris le cas $Pe = 1$ comme dans le cas linéaire car il se situe à la limite de performance du programme d'intégration). La précision est partout de l'ordre de 1% sauf pour les très grands temps ($t_D > 70$).

Ces courbes sont obtenues à l'aide des expressions (5.4) et (5.5) pour λ, Pe finis, (A2.10) pour $\lambda \rightarrow \infty$ et à l'aide de la formule de LAUWERIER, identique en linéaire et en radial, soit (A1.12) pour $Pe \rightarrow \infty$.

On peut faire les mêmes remarques que dans le cas linéaire, le comportement des courbes étant sensiblement le même.

Toutefois, par comparaison des figures 2 et 3, on peut remarquer qu'à λ fixé et aux grandes valeurs de t_D la convergence vers la courbe de LAUWERIER lorsque Pe augmente se fait moins rapidement dans le cas radial que dans le cas linéaire.

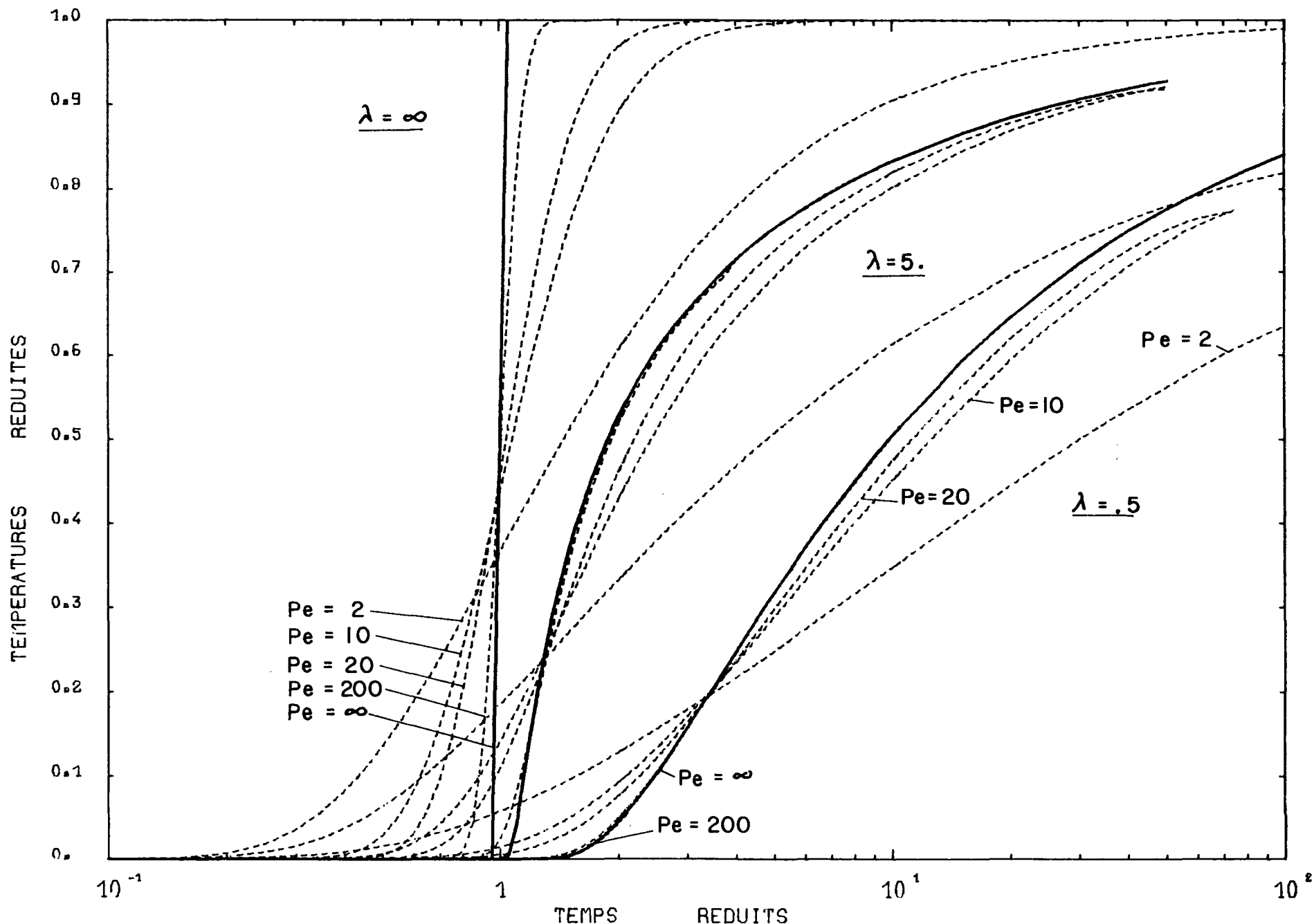


FIGURE 3 - ECOULEMENT RADIAL - SCHEMA B
 OU "SCHEMA INCOMPLET DE CONCENTRATION DES SOURCES"

5.3 Conséquences pratiques

L'examen de la figure 3 montre que, comme en linéaire, la convergence vers la solution de LAUWERIER est pratiquement atteinte dès que $Pe = 2v \geq 200$, et ceci quel que soit λ .

$$Pe = 2v = \frac{Q \rho_F C_F}{2\pi h k_A}$$

Prenons $\rho_F C_F = 10^6 \text{ cal/m}^3/\text{°C}$

et $k_A = 0.6 \text{ cal/m/s/°C}$ (valeur moyenne plausible).

Les tableaux I et II donnent les valeurs de Pe pour les différentes valeurs du débit Q et de l'épaisseur de l'aquifère h .

On constate que, aussi bien pour les nappes superficielles que pour les nappes profondes, le nombre de Péclet varie dans un grand intervalle et peut être bien inférieur à 200.

Il faudra donc, dans chaque cas, calculer soigneusement le Q/h afin de déterminer si on peut se contenter de l'approximation de LAUWERIER ou si l'on doit tenir compte de la conductivité horizontale dans l'aquifère.

Nappes superficielles

Q (m^3/h)	2 - 7	30	45	80	400 - 900
h (m)	2 - 4	4 - 15	30	30	70
Q/h (m^2/h)	0.5 - 3.5	7.5 - 2	1.5	2.7	5.7 - 12.9
Pe	37 à 258	553 à 147	110	196	421 à 948

TABLEAU I

Nappes profondes

Q (m^3/h)	45 - 90	100 - 150	200
h (m)	15	90	150
Q/h (m^2/h)	3 - 6	1.1 à 1.7	1.33
Pe	221 à 442	82 à 123	98

TABLEAU II

En ce qui concerne l'importance des pertes par les épontes, elles sont caractérisées par le facteur

$$\lambda = \frac{\rho_{FCF} \rho_{ACA} Qh}{k_R \rho_{RCR} \pi r^2} = \frac{\rho_{FCF} \rho_{ACA} Q}{k_R \rho_{RCR} h \pi} \left(\frac{h}{r} \right)^2$$

Ce terme varie avec le rapport r/h , c'est-à-dire avec la distance au puits d'injection.

Considérons un aquifère ayant les caractéristiques suivantes :

porosité $\phi = 15\%$
 $\rho_{RCR} = 0.5 \text{ cal/cm}^3/\text{°C}$
 $\rho_{ACA} = \phi \rho_{FCF} + (1 - \phi) \rho_{RCR} = 0.575 \text{ cal/cm}^3/\text{°C}$
 $k_R \approx k_A \approx 0.6 \text{ cal/m/s/°C}$.

On peut calculer quelques valeurs de λ correspondant à des valeurs significatives du rapport Q/h obtenues par examen des tableaux I et II.

$Q/h \text{ (m}^2/h)$	$r/h = 0.5$	$r/h = 1$	$r/h = 5$	$r/h = 10$	$r/h = 25$	$r/h = 50$
1	678	169.4	6.77	1.69	.27	.067
3	2034	508.4	20.33	5.08	.81	.20
10	6780	1694	67.7	16.9	2.7	.67

TABLEAU III

Bien que cela n'apparaisse pas clairement sur la figure 3, on a constaté qu'à partir de $\lambda \approx 1000$ les courbes se confondent pratiquement avec la courbe limite $\lambda = \infty$ correspondant à l'approximation sans pertes par les épontes.

Le tableau III montre donc que l'influence de la conductivité verticale k_R dans les épontes n'est négligeable que très près de l'axe d'injection pour les Q/h considérés.

En conclusion, l'examen des deux nombres adimensionnels Pe et λ , aisément calculables à partir des paramètres physiques de l'aquifère et des débits injectés, permet par comparaison avec les abaques de la figure 3 de déterminer, à l'injection, l'importance des termes de conductivité respectivement horizontale dans l'aquifère et verticale dans les épontes devant celle du terme de convection.

6. ETUDE DES SCHEMAS DE RUBINSTEIN EN ECOULEMENT RADIAL - SCHEMA D (OU SCHEMA DE CONCENTRATION DES SOURCES)

Le schéma D découle du schéma B que l'on vient d'étudier par addition d'une hypothèse supplémentaire qui est la prise en compte de la conductivité horizontale dans les éponges, supposée égale à la conductivité verticale (k_R isotrope).

6.1 Equations et solution

L'équation décrivant l'évolution de la température dans l'aquifère est inchangée. L'introduction d'un k_R isotrope se manifeste par des termes de Laplacien dépendant de r dans l'équation décrivant l'évolution de la température dans les éponges.

On obtient le système suivant :

$$\frac{h}{2} \rho_A C_A \frac{\partial T_F}{\partial t} + \frac{Q \rho_F C_F}{4\pi r} \frac{\partial T_F}{\partial r} - k_R \left(\frac{\partial T_R}{\partial z} \right)_{z=h/2} - k_A \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 T_F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_F}{\partial r} \right) = 0 \quad (6.1a)$$

$$T_F(r, t=0) = T_0 \quad (6.1b)$$

$$T_F(r=0, t) = T_1 \quad (6.1c)$$

$$\frac{\partial^2 T_R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_R}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_R}{\partial z^2} = \frac{\rho_R C_R}{k_R} \frac{\partial T_R}{\partial t} \quad (6.2a)$$

$$T_R(r, z, t=0) = T_0 \quad z \geq h/2 \quad (6.2b)$$

$$T_R(r, h/2, t) = T_F(r, t) \quad \forall r, t \quad (6.2c)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T_R(r, z, t) = T_0 \quad (6.2d)$$

La méthode de résolution de ce système est assez complexe. Elle est décrite en annexe 4. Notons que, dans le cas linéaire, la solution analytique du système correspondant est inconnue jusqu'à présent. On montre qu'on ne peut calculer la solution analytique dans le cas radial que pour des valeurs entières du nombre de Péclet

$$Pe = 2v = \frac{Q \rho_F C_F}{2\pi h k_A} = n \quad (6.3)$$

et lorsque l'aquifère et les éponges ont des diffusivités thermiques identiques :

$$\frac{k_R}{\rho_R C_R} = \frac{k_A}{\rho_A C_A} \quad (6.4)$$

Dans ces conditions, la température réduite T_D s'exprime encore en fonction des trois mêmes paramètres adimensionnels :

$$t_D = \frac{\rho F C_F Q t}{\rho_A C_A h \pi r^2} \quad (6.5a)$$

$$\lambda = \frac{\rho F C_F \rho_A C_A Q h}{k_R \rho_R C_R \pi r^2} \quad (6.5b)$$

$$Pe = \frac{Q \rho F C_F}{2\pi h k_A} = n \text{ (entier)} \quad (6.5c)$$

En principe, il devrait y avoir intervention d'un quatrième paramètre $\alpha = k_R/k_A$, mais du fait de la condition (6.4) ce paramètre s'exprime en fonction de n et λ par la relation :

$$\frac{\alpha r}{h} = \sqrt{\frac{2n}{\lambda}}$$

La solution s'exprime finalement sous la forme suivante :

$$T_D(\lambda, n, t_D) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[- 2 \sqrt{\frac{2n}{\lambda}} s - \frac{n}{2t_D} (s^2 + 1) \right] \frac{(2s)^n}{\sqrt{s^2+1}} \left(\frac{2n}{\lambda} \right)^{n/2} \times \\ \times \sum_{m=0}^n \frac{4^{m-n} \left(\frac{t_D}{\lambda} \right)^{\frac{m-n}{2}}}{m! (n-m)!} H_{n-m-1} \left(\sqrt{\frac{n}{2t_D}} (s^2+1) \right) ds \quad (6.6)$$

$H_m(x)$ étant le polynôme d'HERMITE d'ordre m .

6.2 Cas limites

Il n'est évidemment pas possible de retrouver analytiquement la solution générale du schéma B (sans conductivité horizontale dans les épontes) par un quelconque passage à la limite dans l'expression (6.6). En effet, dans cette formule, k_R qui intervient dans le terme λ est isotrope - $k_R = k_h = k_v$ - et on ne peut donc pas faire tendre k_h (horizontal) vers zéro en conservant $k_{\text{vertical}} = k_R$.

La comparaison entre les schémas B et D ne pourra donc se faire que d'après les résultats graphiques.

Si on disposait de la solution analytique dans le cas général (lorsque le rapport k_R/k_A n'est pas imposé), on pourrait essayer de vérifier que l'on retrouve la solution du schéma B sans pertes dans les épontes en faisant tendre k_R vers zéro. Mais, dans le cas présent, nous avons la contrainte :

$$\frac{k_R}{k_A} = \frac{\rho_R C_R}{\rho_A C_A}$$

Ce rapport ne varie guère qu'entre 0.5 et 1. pour la plupart des cas réels. Nous ne pouvons donc pas faire tendre k_R et k_A séparément vers zéro comme dans les cas précédents.

Par contre, en faisant tendre k_{fr} et k_A vers zéro ensemble (soit λ et $n \rightarrow \infty$) on devrait retrouver la solution limite de LAUWERIER sans pertes dans les épontes, c'est-à-dire la fonction échelon. Nous n'avons pas réussi à faire ce passage à la limite sur la formule (6.6).

Il est difficile et onéreux d'intégrer la formule (6.6) pour $Pe = n \geq 20$. Pour ces raisons, une formule asymptotique valable aux grands n a été dérivée par RUBINSTEIN (cf. annexe 5). Son domaine de validité est malheureusement restreint aux grandes valeurs de t_D , ce qui la rend peu utilisable en pratique.

En annexe 5, on présente une étude comparative entre les résultats de la formule (6.6) et ceux de la formule asymptotique pour quelques valeurs de Pe et de λ .

6.3 Résultats

Afin de comparer les résultats des schémas B et D et d'en déduire l'influence de la conductivité horizontale dans les épontes, on a représenté sur les figures 4a et 4b les variations de T_D en fonction de t_D obtenues d'une part à partir du schéma B (trait plein), d'autre part à partir du schéma D (pointillés), ceci pour deux valeurs du nombre de Péclet $Pe = 4$ et 8 et pour trois valeurs du paramètre λ , soit .5, 5. et 50.

Le programme d'intégration gaussienne de (6.6) que l'on a mis au point est relativement peu onéreux (0.03 sec. par point sur CDC 7600) et permet d'atteindre une précision de l'ordre de 2% tant que n reste inférieur à 10 environ.

Plus précisément, on a les limitations suivantes :

$n \leq 6$	$\lambda \leq 100$	erreur $\leq 1\%$
$n = 8$	$\lambda \leq 30$	erreur $\leq 2\%$
	$\lambda = 50$	erreur $\leq 3\%$
$n = 10$	$\lambda \leq 5$	erreur $\leq 2\%$
	$\lambda = 10$	erreur $\leq 3\%$

Pour $10 < n < 20$, il faut utiliser une autre méthode d'intégration plus onéreuse (1 sec. par point de calcul au lieu de 0.03 sec. sur CDC 7600).

Notons que, ainsi qu'il a été démontré en annexe 4.2, lorsque le temps croît indéfiniment, le schéma B donne $\lim T_D(\lambda, Pe, t_D) = 1$, quels que soient r et z , alors que le schéma D donne une solution décroissant avec $R = 2/h\sqrt{r^2+z^2}$, ce qui est la solution correcte puisque la température ne doit pas varier dans quelque direction que ce soit à l'infini.

Le schéma D est le seul schéma avec le schéma exact qui donne la limite correcte. Tous les autres schémas donnent $\lim_{t_D \rightarrow \infty} T_D(\lambda, Pe, t_D) = 1 \quad \forall r, z$

D'autre part, pour $t_D > 0$, le schéma B doit donner des résultats de plus en plus proches de ceux du schéma D lorsque Pe et λ croissent (k_R et k_A décroissent) puisque les termes de conduction perdent de plus en plus d'importance devant le terme de convection dans ce cas.

L'erreur du schéma B par rapport au schéma D doit donc apparaître soit pour de grandes valeurs de t_D (grandes valeurs du temps ou petites valeurs de r), soit pour de petites valeurs de λ et $Pe = h$.

C'est bien ce que l'on constate sur les figures 4a et b. Lorsque λ croît à n fixé, l'approximation B est de plus en plus correcte sur un intervalle de temps donné.

Finalement, pour de grandes valeurs de n ($n \geq 20$) et t_D inférieur à une limite t_{Dmax} à déterminer selon la valeur de r , le schéma B donne une bonne approximation du schéma D.

6.4 Conséquences pratiques

Si nous reprenons les caractéristiques physiques considérées au paragraphe 5.3, nous avons :

$$\begin{aligned} \rho_{FCF} &= 10^6 \text{ cal/m}^3/\text{°C} \\ \rho_{RCR} &= 5 \cdot 10^5 \text{ cal/m}^3/\text{°C} \\ \rho_{ACA} &= 575 \cdot 10^3 \text{ cal/m}^3/\text{°C} \\ k_R \approx k_A &= 0.6 \text{ cal/m/s/°C} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\frac{k_R \rho_{ACA}}{k_A \rho_{RCR}} = 1.15$ (au lieu de 1 ainsi qu'il est exigé pour la contrainte 6.4).

La variation est donc de 15%.

Le calcul de RUBINSTEIN n'est plus valable dès que le rapport $\frac{k_R \rho_{ACA}}{k_A \rho_{RCR}}$ n'est plus strictement égal à 1, et aucune solution analytique n'est dérivable dans ce cas, ainsi qu'il est démontré en annexe.

Vu la complexité des calculs (cf. annexe 4), il est impossible d'évaluer la sensibilité de la solution analytique à la variation du rapport

$$\frac{k_R \rho_{ACA}}{k_A \rho_{RCR}} \text{ autour de 1.}$$

Il n'est pas davantage possible d'évaluer la variation des trois nombres adimensionnels t_D , Pe , λ en fonction de ce rapport.

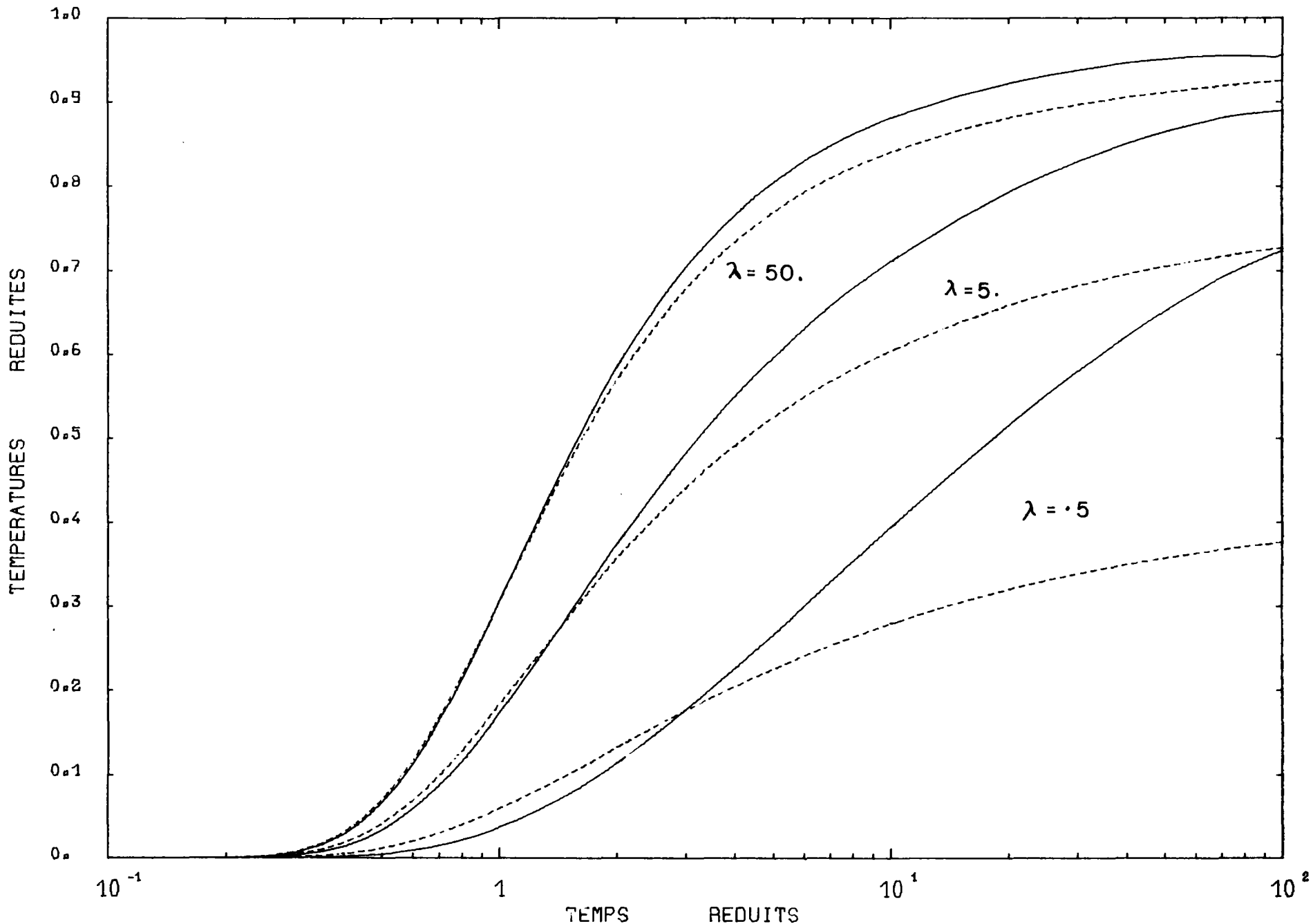


FIGURE 4a - INFLUENCE DE LA CONDUCTIVITE HORIZONTALE DANS LES EPONTES
COMPARAISON ENTRE LES SCHEMAS B ET D (Pe = 4)

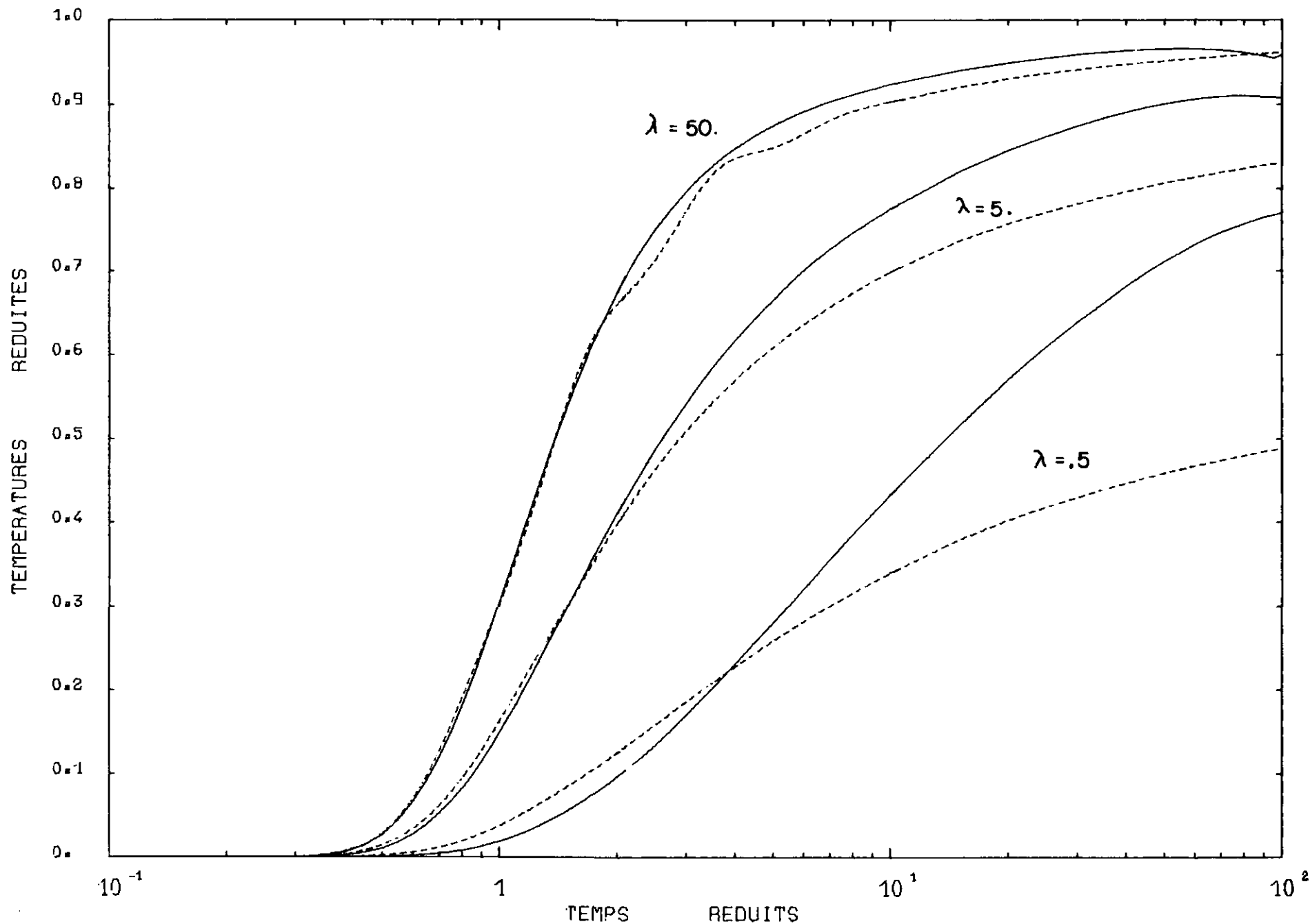


FIGURE 4 b - INFLUENCE DE LA CONDUCTIVITE HORIZONTALE DANS LES EPONTES
COMPARAISON ENTRE LES SCHEMAS B ET D ($= 8$)

Nous admettrons pour l'instant que 1.15 est suffisamment proche de 1 pour que la solution représentative du schéma D soit valable, mais il est certain que cette contrainte (6.4) a pour conséquence de diminuer sérieusement l'intérêt pratique du schéma D.

Reprenons les tableaux I et II du paragraphe 5.3. Le nombre de Péclet $Pe = n$ est partout supérieur à 30. Nous avons vérifié que pour $n > 20$ et $\lambda > 5$, l'erreur entre les schémas D et B est inférieure ou égale à 6%. Cette erreur augmente fortement aux petites valeurs de λ . Si nous reprenons le tableau III du paragraphe 5.3, nous voyons que, pour des Q/h de 1 à 10 m^2/h , l'importance de la conductivité horizontale dans les épontes se fera sentir à partir de distances de l'ordre de 10 épaisseurs ou plus.

En deçà de ces distances, l'approximation du schéma B sera d'autant meilleure que t_D sera plus faible et en pratique partout suffisante.

7. ETUDE DES SCHEMAS DE RUBINSTEIN EN ECOULEMENT RADIAL - SCHEMA C (OU SCHEMA EXACT INCOMPLET)

Par examen du tableau du paragraphe 3, nous pouvons constater que ce "schéma" diffère de ceux que l'on vient d'étudier sur un point essentiel. La conductivité verticale dans l'aquifère a maintenant une valeur finie $k_A^V = k_A$, autrement dit la température n'est plus considérée comme uniforme sur une verticale de l'aquifère.

Les autres hypothèses sur la conductivité thermique sont les suivantes :

- conductivité horizontale nulle dans l'aquifère, soit $k_A^H = 0$ ainsi que dans les épontes $k_R^H = 0$;
- conductivité verticale finie dans les épontes, soit $k_R^V = k_R$.

7.1 Equations et solution

Les hypothèses ci-dessus sont équivalentes à celles de LAUWERIER, plus prise en compte d'une conductivité verticale finie dans l'aquifère.

On obtient donc immédiatement le système suivant :

$$\frac{h}{2} \rho_A C_A \frac{\partial T_F}{\partial t} + \frac{Q \rho F C_F}{4\pi r} \frac{\partial T_F}{\partial r} - k_A \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_F}{\partial z^2} = 0 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (7.1a)$$

$$\left. \begin{aligned} T_F(r=0, z, t) &= T_1 \\ T_F(r, z, t=0) &= T_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (7.1b)$$

$$\frac{\partial^2 T_R}{\partial z^2} = \frac{\rho R C_R}{k_R} \frac{\partial T_R}{\partial t} \quad z \geq \frac{h}{2} \quad (7.2a)$$

$$T_R(r, z, t=0) = T_0 \quad z \geq \frac{h}{2} \quad (7.2b)$$

A ces hypothèses, il faut ajouter des conditions de continuité des températures et des flux à la surface de séparation de l'aquifère et de l'éponte, c'est-à-dire :

$$T_F(r, h/2, t) = T_R(r, h/2, t) \quad \forall r, t \quad (7.2c)$$

$$k_A \frac{\partial T_F}{\partial z} = k_R \frac{\partial T_R}{\partial z} \quad \text{pour } z = h/2 \quad \forall r, t \quad (7.2d)$$

plus la condition de symétrie :

$$\frac{\partial T_F}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad \forall r, t \quad (7.2e)$$

Les notations sont identiques à celles qui ont été utilisées jusqu'à présent. Les calculs sont complexes et nous n'en donnerons pas le détail. Notons simplement que les calculs conduisent aux résultats suivants :

La température réduite dans la couche $T_D = (T_F - T_0)/(T_1 - T_0)$ s'exprime en fonction des paramètres adimensionnels suivants, dont deux sont déjà connus :

$$t_D = \frac{\rho_F C_F Q t}{\rho_A C_A h \pi r^2} \quad (7.3a)$$

$$\lambda = \frac{\rho_F C_F \rho_A C_A Q h}{k_R \rho_R C_R \pi r^2} \quad (7.3b)$$

$$\chi = \sqrt{\frac{k_A \rho_A C_A}{k_R \rho_R C_R}} \quad (7.3c)$$

Notons que ce n'est plus le rapport convection sur conduction dans la couche, c'est-à-dire le nombre de Péclet Pe qui intervient dans ce schéma, mais un nombre χ faisant intervenir le rapport des conductivités verticales et le rapport des capacités calorifiques dans l'aquifère et les épontes.

On démontre que l'on obtient l'expression suivante :

$$T_D(\lambda, \chi, t_D, z) = H(t_D - 1) \left\{ 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2}\chi)^n (t_D - 1)^{n/2} \int_0^{\infty} \exp(-s^2) s^n \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(n+m)!}{m! n!^2} B_{n-1}(v) \right\} ds \quad (7.4)$$

où $H(x)$ est la fonction de HEAVISIDE.

$$B_n(v) = M_h(v_1) + M_h(v_2)$$

$$\text{avec } M_h(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \quad \text{pour } n \geq 0$$

$$\text{et } M_{-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{et la relation de récurrence } M_n(x) = x M_{n-1}(x) - (n-1)M_{n-2}(x)$$

$$v_1 = \sqrt{2}\chi s \sqrt{t_D - 1} + \frac{(n+m)}{\chi} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \frac{z}{\chi h} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \frac{1}{2\chi} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

$$v_2 = v_1 + \frac{2z}{h\chi} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

Notons que l'expression (7.4) dépend en fait de z coordonnée spatiale verticale, à travers le paramètre v , à moins que l'on fixe la valeur de z et que l'on observe la variation de température à une hauteur donnée.

On peut également remarquer que, comme pour le schéma de LAUWERIER, la température en un point ne subit pas de variation avant le temps $t_D = 1$ correspondant à l'arrivée du front thermique. Ceci est bien normal puisqu'il n'y a pas de conduction horizontale dans l'aquifère et que la chaleur ne peut donc être transportée en direction de l'écoulement que par convection.

7.2 Résultats

Une étude est en cours pour l'intégration de la formule (7.4). Des difficultés imprévues se sont présentées, entre autres en ce qui concerne la convergence des séries intervenant dans cette expression. Les calculs ont donc été retardés.

Les résultats obtenus sont pour l'instant peu fiables et il serait nécessaire d'effectuer une série de tests supplémentaires avant d'en donner la version définitive.

Nous ne présenterons donc pas d'abaques pour ce schéma C, pour l'instant.

CONCLUSION

Nous venons donc de réaliser une étude des transferts thermiques pour deux types d'écoulements monodimensionnels : un écoulement linéaire et un écoulement radial en milieu infini.

Les différentes hypothèses sur les conductivités thermiques dans l'aquifère et les épontes se répartissent en trois grandes catégories, dénommées ici schémas B, D et C.

On a montré que les schémas simplifiés de LAUWERIER et sans pertes par les épontes représentaient bien les solutions limites du schéma B en écoulement linéaire comme en radial.

Des programmes d'intégration des solutions analytiques ont été mis au point et des abaques ont été tracés dans le cas du schéma B en écoulement linéaire et radial, dans le cas du schéma D en radial seulement (puisque la solution en linéaire est inconnue). En ce qui concerne le schéma C pour lequel la même solution existe en linéaire et en radial, la mise au point des programmes n'est pas terminée.

Dans le cas où ils existent, les programmes donnent la solution avec une précision bien déterminée pour toute valeur des paramètres adimensionnels concernés à l'intérieur du domaine de validité déterminé par l'analyse.

On a constaté que, pour les rapports Q/h couramment utilisés en écoulement radial, l'influence de la conductivité horizontale dans l'aquifère n'est pas toujours négligeable, puisque le nombre de Péclet peut être bien inférieur à 200, valeur qui représente en gros la limite au-dessus de laquelle on peut se contenter de l'approximation de LAUWERIER. La même limite apparaît en écoulement linéaire.

Quant à l'influence de la conductivité horizontale dans les épontes, en écoulement radial, elle ne se fait sentir qu'à partir des distances à l'axe de l'ordre de 10 épaisseurs d'aquifère pour les Q/h considérés. En deçà de ces distances, l'approximation du schéma B est partout suffisante pour des t_D raisonnables (≤ 100).

Il serait intéressant de pouvoir terminer l'étude du schéma C afin de déterminer à partir de quelle épaisseur d'aquifère l'hypothèse de l'uniformisation instantanée des températures en direction verticale devient invalide.

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ GRINGARTEN (A.C.), LANDEL (P.A.), SAUTY (J.P.) 1974 .- Programme CADOU DAL. Simulation transitoire d'un doublet hydrothermique placé dans un écoulement naturel avec fuites thermiques à travers les épontes. Manuel d'utilisation .- *Rapport BRGM 74 SGN 336 GTH.*
- /2/ GRINGARTEN (A.C.), LANDEL (P.A.), SAUTY (J.P.) 1976 .- Programme METERNIQ. Simulation des échanges thermiques dans un aquifère infini en écoulement naturel possédant des puits d'exploitation et de réinjection en nombre quelconque lorsque la température d'injection est différente de la température initiale de l'aquifère .- *Rapport BRGM 76 SGN 577 GTH-AME.*
- /3/ GRINGARTEN (A.C.), SAUTY (J.P.) .- A theoretical study of heat extraction from aquifers with uniform regional flow .- *Journal of Geophysical Research, vol. 80, n° 35, Dec. 1975.*
- /4/ GRINGARTEN (A.C.), SAUTY (J.P.) .- Simulation des transferts de chaleur dans les aquifères .- *Bull. BRGM, sect. III, 2ème série, n° 1, 1975, p. 25-34.*
- /5/ RUBINSTEIN (L.I.) .- (Domaine de température dans les couches pétrolifères). - *Moscou : Nedra, 1972, chap. V à VIII inclus.*
- /6/ AVDONINE (N.A.) .- (Quelques formules pour le calcul du champ de température d'une couche horizontale soumise à une injection d'eau chaude).- *Neft'i Gas, vol. 7, n° 3, 1964, p. 37.*
- /7/ OGATA (A.), BANKS (R.B.) .- A solution of the differential equation of longitudinal dispersion in porous media .- *U.S. Geol. Survey - professional paper 411.A, 1961.*
- /8/ ABRAMOWITZ (M.), STEGUN (I.A.) .- Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables .- *New York : Dover Publications Inc., 1968.*
- /9/ CLOUET D'ORVAL (M.), LEDOUX (E.) .- Détermination in situ des paramètres du transfert de la chaleur dans les aquifères en écoulement monophasique. - *Bull. BRGM, sect. III, 2ème série, n° 1, 1975, p. 7-18.*
- /10/ CARSLAW (H.S.), JAEGER (J.C.) .- Conduction of heat in solids.- *Oxford : Clarendon Press, 1960.*

- /11/ BATEMAN (H.) .- Tables of integral transforms .- ed. by A. Erdelyi. New York, Toronto, London : Mc Graw Hill, 1954.
- /12/ GRADSHTEYN (I.S.), RYZHIK (I.W.) .- Table of integral series and products .- New York, San Francisco, London : Academic Press, 1965.
- /13/ SAUTY (J.P.) .- Contribution à l'identification des paramètres de dispersion dans les aquifères par interprétation des expériences de traçage .- thèse : doct.-ing., Grenoble 1977.

ANNEXE 1

1.1. Calcul de la solution du système (4-1 abc, 4-2 abcd) décrivant le schéma B en écoulement linéaire

Appelons t_r , x_r , z_r les variables dimensionnelles de temps et d'espace (correspondant aux variables t, x, z du texte). On peut, à la suite d'AVDONINE et de RUBINSTEIN, définir le système suivant de variables adimensionnelles :

$$a^2 = \frac{a_R^2}{a_A^2} \quad \text{avec} \quad a_R^2 = \frac{k_R}{\rho_R C_R} \quad \text{et} \quad a_A^2 = \frac{k_A}{\rho_A C_A}$$

$$\alpha = \frac{k_R}{k_A}$$

$$t = \frac{4 a_A^2 t_r}{h^2}$$

$$z = \frac{2 z_r}{h} - 1, \quad x = \frac{2 x_r}{h}$$

$$\gamma = \frac{Q_1 \rho_F C_F}{4 k_A}$$

$$u = \frac{T - T_0}{T_i - T_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T = T_R(x, z, t) & z > 0 \\ T = T_F(x, t) & -2 < z < 0 \end{cases}$$

et $T_F(x, t) = T_R(x, 0, t)$

Le système (4-1, 4-2) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x > 0 \\ t > 0 \end{cases} \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \begin{cases} z > 0 \\ t > 0 \end{cases} \quad (4.5b)$$

$$u(x, z, t=0) = 0 \quad (4.5c)$$

$$\lim_{x^2+z^2 \rightarrow \infty} u(x, z, t) = 0 \quad (4.5d)$$

$$u(0, 0, t) = 1 \text{ si } \gamma \gg 1 \quad (4.5e)$$

$$\left\{ \text{autrement } \frac{\partial u}{\partial x} - 2\gamma u = -2\gamma \quad \begin{cases} x=z=0 \\ t > 0 \end{cases} \right\}$$

Nous admettrons que la condition (4.5e) est remplie, c'est-à-dire que l'effet de la conduction reste de toute façon faible devant celui de la convection.

Soit $\mathcal{L}\{u(x,z,t)\}$ la transformée de LAPLACE de $u(x,z,t)$ par rapport à t .

$$\mathcal{L}\{u(x,z,t)\} = F(x,z,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x,z,t) dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\} = p F(x,z,p) - u(x,z,0) = p F(x,z,p)$$

L'équation transformée de (4.5b) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{p}{a^2} F \quad z > 0 \quad (\text{AI1})$$

On en tire la solution générale :

$$F(x,z,p) = C(x,p) \exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a} z\right) \quad (\text{AI2})$$

L'équation transformée de (4.5a) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \frac{\partial F}{\partial z} = p F \quad \begin{cases} z = 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad (\text{AI3})$$

$$\text{avec } F(0,0,p) = \frac{1}{p} \text{ et } \lim F = 0 \quad x^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad (\text{A1.4})$$

Introduisons la solution (AI2) dans (AI3) ; on obtient :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial C}{\partial x} - \left(\alpha \frac{\sqrt{p}}{a} + p\right) C = 0 \quad (\text{AI5})$$

Les solutions de (AI5) sont données par :

$$C(x,p) = A e^{\gamma x \pm \sqrt{\gamma^2 + b\sqrt{p} + p} x} \quad \text{avec } b = \frac{\alpha}{a}$$

La solution qui vérifie les conditions (AI4) est :

$$F(x,z,p) = \frac{1}{p} e^{\gamma x - \sqrt{\gamma^2 + b\sqrt{p} + p} x} \times e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} z} \quad (\text{AI6})$$

Il s'agit de retrouver l'original $u(x,z,t)$. La technique indiquée par AVDONINE consiste à inverser $F(b^2 p)$

$$F(x,z,b^2 p) = \frac{1}{b^2 p} e^{\gamma x - b \sqrt{\gamma^2/b^2 + \sqrt{p} + p} x - \frac{b}{a} \sqrt{p} z}$$

$$\text{On pose } g_1(p) = \frac{1}{b^2 p} e^{-\frac{b}{a} \sqrt{p} z}$$

$$g_2(p) = e^{\gamma x - b \sqrt{\gamma^2/b^2 + \sqrt{p} + p} x}$$

On cherche les originaux de ces fonctions : l'original de $g_1(p)$ est connu (/10/) :

$$L^{-1}(g_1(p)) = f_1(t) = \frac{1}{b^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{zb}{2a\sqrt{t}} \right) \quad (\text{AI7})$$

Calculons l'original de $g_2(p)$. Si $v(q) = e^{-\sqrt{\frac{q}{K}} x}$, l'original de $v(q)$ est :

$$v(t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi K t^3}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} \quad (/11/)$$

Autrement dit :

$$e^{-\sqrt{\frac{q}{K}} x} = \int_0^\infty e^{-qt} \frac{x}{2\sqrt{\pi K t^3}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} dt \quad (\text{AI8})$$

$$\text{On pose } q = \frac{\gamma^2}{b^2} + \sqrt{p} + p \text{ et } \sqrt{K} = \frac{1}{b}$$

D'après (AI8),

$$e^{-b\sqrt{\gamma^2/b^2 + \sqrt{p} + p} x} = \int_0^\infty e^{-(\gamma^2/b^2 + \sqrt{p} + p)t - \frac{x^2 b^2}{4t}} \frac{xb}{2\sqrt{\pi t^3}} dt$$

$$\text{soit } g_2(p) = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\gamma\sqrt{t}}{b} - \frac{xb}{2\sqrt{t}}\right)^2} \frac{xb}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-(\sqrt{p} + p)t} dt$$

$$\text{On pose : } v_2(t) = e^{-\left(\frac{\gamma\sqrt{t}}{b} - \frac{xb}{2\sqrt{t}}\right)^2} \frac{xb}{2\sqrt{\pi t^3}}$$

$g_2(p)$ est la transformée de $v_2(t)$ par rapport à $\sqrt{p} + p$. Donc, en fait, $g_2(p) = G(p + \sqrt{p})$. On cherche l'inverse de $G(p + \sqrt{p})$ par rapport à p .

Or, si $f(s)$ est l'inverse de $g(p)$ par rapport à p ou de $g(p + \sqrt{p})$ par rapport à $(p + \sqrt{p})$, l'inverse de $g(p + \sqrt{p})$ par rapport à p s'écrit :

$$F(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{s}{(t-s)^{3/2}} \exp\left(-\frac{s^2}{4(t-s)}\right) f(s) ds \quad (\text{cf. /11/})$$

$$\text{Ici } f(s) = v_2(s).$$

L'original de $g_2(p)$ par rapport à p s'écrit donc finalement :

$$f_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{s}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{s^2}{4(t-s)}} \frac{xb}{2\sqrt{\pi s^3}} e^{-\left(\frac{\gamma\sqrt{s}}{b} - \frac{xb}{2\sqrt{s}}\right)^2} ds \quad (\text{AI9})$$

L'original de $F(b^2p) = g_1(p) g_2(p)$ est $\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$. Soit, d'après (AI7) et (AI9) :

$$L^{-1}\left[F(b^2p)\right] = \int_0^t \frac{1}{b^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{zb}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{s}{(\tau-s)^{3/2}} e^{-\frac{s^2}{4(\tau-s)}} \frac{xb}{2\sqrt{\pi s^3}} e^{-\left(\frac{\sqrt{s}}{b} - \frac{xb}{2\sqrt{s}}\right)^2} ds$$

On ne s'intéresse qu'au résultat en $z = 0$ et on change l'ordre d'intégration, ce qui donne :

$$L^{-1}\left[F(b^2p)\right] = \frac{x}{4\pi b} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}} e^{-\left(\frac{\sqrt{s}}{b} - \frac{xb}{2\sqrt{s}}\right)^2} \int_s^t \frac{d\tau}{(\tau-s)^{3/2}} e^{-\frac{s^2}{4(\tau-s)}}$$

On calcule l'intégrale interne à l'aide du changement de variable $y = \frac{s}{\sqrt{\tau-s}}$ on obtient :

$$L^{-1}\left[F(b^2p)\right] = \frac{x}{2b\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{ds}{s\sqrt{s}} e^{-\left(\frac{y}{b} \sqrt{s} - \frac{xb}{2\sqrt{s}}\right)^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{s}{2\sqrt{t-s}}\right)$$

Un nouveau changement de variable $w = \frac{s}{b^2}$ donne :

$$L^{-1}(F) = \frac{x}{2b^2\sqrt{\pi}} \int_0^{t/b^2} \frac{dw}{w\sqrt{w}} e^{-\left(\gamma\sqrt{w} - \frac{x}{2\sqrt{w}}\right)^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{bw}{2\sqrt{t/b^2-w}}\right)$$

Enfin, on sait que si $f(t)$ est l'original de $F(p)$, l'original de $F(b^2p)$ est $\frac{1}{b^2} f\left(\frac{t}{b^2}\right)$ et donc :

$$L^{-1}\left[F(p)\right] = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dw}{w\sqrt{w}} e^{-\left(\gamma\sqrt{w} - \frac{x}{2\sqrt{w}}\right)^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{bw}{2\sqrt{t-w}}\right)$$

Un dernier changement de variable $s^2 = w/t$ donne enfin :

$$u(x, z=0, t) = \frac{x}{\sqrt{\pi t}} \int_0^1 e^{-\left(\gamma s\sqrt{t} - \frac{x}{2s\sqrt{t}}\right)^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{bs^2\sqrt{t}}{2\sqrt{1-s^2}}\right) \frac{ds}{s^2}$$

ce qui est la solution cherchée. (AI10)

1.2. Etude des cas limites

a) La conductivité horizontale de l'aquifère k_A tend vers zéro

L'expression (4.3c) montre que, dans ce cas, $\zeta \rightarrow \infty$. Considérons l'expression (4.4) qui s'écrit $u(C_1, C_2, C_3) = \frac{2 C_2}{\sqrt{\pi}} I$.

L'intégrale I a pour intégrand une fonction paire de s . Elle peut s'écrire :

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \exp \left[- \left(C_1 s - \frac{C_2}{s} \right)^2 \right] \operatorname{erfc} \left(C_3 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} \right) \frac{ds}{s^2}$$

Dans cette expression, l'exponentielle peut s'écrire sous la forme :

$$\exp \left[- C_1^2 (s-s_0)^2 \right] \exp \left[- C_1^2 \left(2ss_0 - 3s_0^2 + \frac{s_0^4}{s^2} \right) \right] \text{ avec } s_0^2 = \frac{C_2}{C_1}$$

Il est bien connu qu'une suite de fonctions de la forme $n \exp(-\pi n^2(s-s_0)^2)$ tend vers une distribution de DIRAC lorsque n tend vers l'infini.

$$\text{Or } C_1 = \sqrt{\zeta t_D} \rightarrow \infty \quad \text{comme } \sqrt{\zeta}$$

Posons $C_1 = n \sqrt{\pi}$.

$\frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \exp(-C_1^2(s-s_0)^2)$ tend vers $\delta(s-s_0)$ quand C_1 devient très grand, soit quand le nombre de Péclet (ou le temps) devient très grand.

L'intégrale I peut donc être écrite sous la forme :

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \exp(-C_1^2(s-s_0)^2) f(s) ds \quad (\text{AI11})$$

$$\text{où } f(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{C_1} \frac{1}{s^2} \exp \left[- C_1^2 \left(2ss_0 - 3s_0^2 + \frac{s_0^4}{s^2} \right) \right] \operatorname{erfc} \left(C_3 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{C_1} e^{3C_1 C_2} \frac{1}{s^2} \exp \left[- C_1^2 \left(2ss_0 + \frac{s_0^4}{s^2} \right) \right] \operatorname{erfc} \left(C_3 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} \right)$$

Lorsque $C_1 \rightarrow \infty$, l'intégrale I sera équivalente à $\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \delta(s-s_0) f(s) ds$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{1}{2} f(s_0) \text{ si } 0 < s_0 < 1 \\ &= 0 \quad \text{si } s_0 > 1 \end{aligned} \right\}$$

à condition que $f(s)$ soit continue sur l'intervalle $(0, +1)$.

Etudions $f(s)$ sur l'intervalle $(0, 1)$.

$$f(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{C_1} e^{-3C_1 C_2} f_1(s) f_2(s) f_3(s)$$

$$\text{avec } f_1(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$f_2(s) = \exp \left(-C_1^2 \left(2ss_0 + \frac{s_0^4}{s^2} \right) \right)$$

$$f_3(s) = \operatorname{erfc} \left(C_3 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} \right)$$

- $f_1(s)$ décroît de $+\infty$ à 1 sur $(0, 1)$
- $f_2(s)$ croît de 0 à une valeur maximale $e^{-3C_1 C_2}$ pour $s = s_0$, puis décroît jusqu'à une valeur finie pour $s = 1$.
- $f_3(s)$ décroît de 1 à 0 sur l'intervalle $(0, 1)$.

Le maximum de $f(s)$ est obtenu pour :

$$s_M \approx \left(\frac{\sqrt{1 + 4 C_1^2 C_2^2} - 1}{2 C_1^2} \right)^{1/2}$$

$s_M \approx s_0$ pour les valeurs qui nous intéressent ici.

La fonction $f(s)$ est bornée et continue sur l'intervalle $(0, 1)$

pour $s = 0$, elle tend vers 0 comme $\frac{1}{s^2} e^{-\frac{A}{s^2}}$

pour $s = 1$, elle tend également vers 0.

Par conséquent, I tends vers $\frac{1}{2} f(s_0)$ pour $s_0 < 1$

$$\text{et } \lim_{C_1 \rightarrow \infty} u(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{erfc} \left(C_3 \frac{C_2/C_1}{\sqrt{1-C_2/C_1}} \right)$$

pour $0 < C_2/C_1 < 1$

$$= 0 \text{ pour } C_2/C_1 > 1$$

$$\text{soit } \lim_{\xi \rightarrow \infty} u(t_D, \lambda, \zeta) = \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(t_D-1)}} \right) \text{ pour } t_D > 1 \quad (\text{AI12})$$

$$= 0 \text{ pour } t_D < 1.$$

Cette expression est identique à la formule (2.3) avec $d S_D/d\psi = 1$, formule qui décrit justement le cas limite à conductivité nulle.

b) La conductivité verticale dans les épontes k_R tend vers zéro

On considère à nouveau l'expression générale (4.4) dans laquelle le paramètre λ tend vers l'infini et donc C_3 tend vers zéro, ce qui entraîne $\operatorname{erfc} C_3 \left(\frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} \right) \rightarrow 1$ pour $s \neq 1$.

L'expression (4.4) devient :

$$\lim_{C_3 \rightarrow 0} u(C_1, C_2, C_3) = \frac{2C_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp \left[- \left(C_1 s - \frac{C_2}{s} \right)^2 \right] \frac{ds}{s^2} = \frac{2C_2}{\sqrt{\pi}} I$$

$$I = e^{2C_1 C_2} \int_1^\infty \exp \left[- \left(\frac{C_1^2}{u^2} + C_2^2 u^2 \right) \right] du \quad \text{que l'on sait intégrer (/8/). On obtient :}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{4C_2} \left(e^{4C_1 C_2} \operatorname{erfc} (C_1 + C_2) + \operatorname{erfc} (C_2 - C_1) \right)$$

soit finalement :

$$\lim_{C_3 \rightarrow 0} u(C_1, C_2, C_3) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfc} (C_2 - C_1) + e^{4C_1 C_2} \operatorname{erfc} (C_2 + C_1) \right) \quad (\text{AI13})$$

Montrons que ce résultat limite du système général est bien la solution du système limite quand $k_R \rightarrow 0$.

Dans le cas où $k_R = 0$, $\alpha = 0$ et le système (4.1abcd) se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \quad x, t > 0 \quad (\text{AI14a})$$

$$\left. \begin{aligned} u(x=0, t) &= 1 \\ u(x, t=0) &= 0 \\ u(x \rightarrow \infty, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{AI14b})$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{Q_1 \rho F C_F}{4 k_A} \quad t = \frac{4 k_A}{\rho_A C_A} \frac{t_r}{h^2} \quad x = \frac{2x_r}{h}$$

On rencontre des systèmes du type (AI14) dans des études similaires de dispersion en milieu poreux, par exemple le système étudié par OGATA et BANKS (/7/) décrivant l'évolution de la concentration C d'une substance transportée par un fluide à travers un milieu non absorbant.

La loi de variation de la concentration $C(x,t)$ est donnée par :

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (\text{AI15a})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{avec } C(0,t) &= C_0 \\ C(x,0) &= 0 \\ C(\infty,t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{AI15b})$$

où D est le coefficient de diffusion, v la vitesse d'infiltration, et t et x les variables réelles de temps et d'espace.

Ce système (AI15) est strictement équivalent au système (AI14), à condition de remplacer u par C/C_0 , t par Dt et 2γ par v/D .

La solution du système (AI15) donnée par OGATA et BANKS (/7/) s'écrit :

$$\frac{C}{C_0}(x,t) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfc} \frac{x - vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + e^{\frac{vx}{D}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \quad (\text{AI16a})$$

La solution de (AI14) s'écrit donc par analogie :

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfc} \frac{x - 2\gamma t}{2\sqrt{t}} \right) + e^{2\gamma x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + 2\gamma t}{2\sqrt{t}} \right) \quad (\text{AI16b})$$

Une transformation simple redonne :

$$\frac{x}{2\sqrt{t}} = C_2, \quad \gamma\sqrt{t} = C_1, \quad 2\gamma x = 4C_1C_2$$

Par conséquent, l'expression (AI16b) est identique à (AI13) et la consistance des résultats est vérifiée.

ANNEXE 2

2.1. Calcul de la solution du système (5.1,2) décrivant le schéma B en écoulement radial

Reprenons les variables adimensionnelles de l'annexe 1 avec les changements suivants :

$$x = \frac{2r}{h}$$

et $v = \frac{Q C_F \rho F}{4\pi h k_A}$ au lieu de γ

Le système (5.1,2) exprimé en fonction de ces variables devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{1 - 2v}{x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \begin{array}{l} z = 0 \\ x, t > 0 \end{array} \quad (5.6a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad z, t > 0 \quad (5.6b)$$

$$u(x, z, t=0) = 0 \quad (5.6c)$$

$$\lim (u(x^2+z^2 \rightarrow \infty, t)) = 0 \quad (5.6d)$$

$$u(0, 0, t) = 1 \quad (5.6e)$$

Soit encore $L(u) = F(x, z, p)$ la transformée de LAPLACE de u par rapport à t . L'équation (5.6b) transformée a pour solution, comme en linéaire, :

$$F(x, z, p) = C(x, p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} z} \quad (A2.1)$$

(5.6a) devient :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1 - 2v}{x} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\alpha \sqrt{p}}{a} F = pF$$

soit :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{1 - 2v}{x} \frac{\partial C}{\partial x} - \left(\frac{\alpha \sqrt{p}}{a} + p \right) C = 0 \quad (A2.2)$$

On pose $\mu^2 = \frac{\alpha}{a} \sqrt{p} + p$, on multiplie (A2.2) par x^2 et on pose $y = \mu x$; on obtient alors :

$$y^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + y \frac{\partial C}{\partial y} - 2vy \frac{\partial C}{\partial y} - \mu^2 C = 0 \quad (A2.3)$$

On vérifie facilement que cette équation du type BESSEL a des solutions de la forme :

$$C(y,p) = C_1 y^\nu K_\nu(y) \text{ avec } y = \mu x$$

Lorsque $y \rightarrow 0$, $K_\nu(y) \sim \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{y}{2}\right)^{-\nu}$, la solution vérifiant les conditions aux limites est donc :

$$C(\mu x, p) = \frac{1}{p} \frac{2}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\mu x}{2}\right)^{-\nu} K_\nu(\mu x) \quad (\text{A2.4})$$

$$\text{soit } F(b^2 p) = \frac{2}{b^2 p \Gamma(\nu)} \left(\frac{bx}{2}\right)^{-\nu} (p + \sqrt{p})^{\nu/2} K_\nu(bx \sqrt{p + \sqrt{p}}) e^{-\frac{b}{a} \sqrt{p} z} \text{ avec } b = \frac{\alpha}{a}$$

On calcule l'original de $F(b^2 p)$

$$F(b^2 p) = \frac{2}{b^2 p \Gamma(\nu)} \left(\frac{bx}{2}\right)^{-\nu} g_1(p) g_2(p + \sqrt{p})$$

$$\text{avec } g_1(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{b}{a} \sqrt{p} z}$$

$$g_2(p + \sqrt{p}) = (p + \sqrt{p})^{\nu/2} K_\nu(bx \sqrt{p + \sqrt{p}})$$

$$\text{Or, si } \bar{v}(q) = q^{-\nu/2} K_\nu(y \sqrt{q}) \quad v(t) = \frac{y^\nu}{(2t)^{\nu+1}} e^{-\frac{y^2}{4t}}$$

$$\text{Posons } q = p + \sqrt{p}$$

$$y = bx$$

La transformée inverse de $g_2(p + \sqrt{p})$ par rapport à $p + \sqrt{p} =$

$$\frac{(bx)^\nu}{(2t)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2 x^2}{4t}}$$

Le transformée inverse de g_2 par rapport à p est donnée par :

$$v_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{s}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{s^2}{4(t-s)}} \frac{(bx)^\nu}{(2s)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2 x^2}{4s}} ds \quad (\text{A2.5}) \quad (\text{cf. /11/})$$

L'inverse de $g_1(p)$ est connu et vaut : (/10/)

$$v_1(t) = \operatorname{erfc} \left(\frac{bz}{2a\sqrt{t}} \right)$$

Appliquons la règle $L^{-1}(g_1 g_2) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$

$$L^{-1}F(b^2 p) = \frac{2}{b^2 \Gamma(v)} \left(\frac{bx}{2}\right)^v \int_0^t d\tau \operatorname{erfc}\left(\frac{bz}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) \int_0^\tau \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{s}{(\tau-s)^{3/2}} e^{-\frac{s^2}{4(\tau-s)}} \times$$

$$\times \frac{(bx)^v}{(2s)^{v+1}} e^{-\frac{b^2 x^2}{4s}} ds \quad (\text{A2.6})$$

On change l'ordre d'intégration ; on fait $z = 0$ et on calcule l'intégrale interne :

$$L^{-1}(F(b^2 p)) = \frac{2}{b^2 \Gamma(v)} \frac{(b^2 x^2)^v}{2} \int_0^t \frac{ds}{(2s)^{v+1}} e^{-\frac{b^2 x^2}{4s}} \operatorname{erfc}\left(\frac{s}{2\sqrt{t-s}}\right) = \frac{1}{b^2} f\left(\frac{t}{b^2}\right)$$

On en déduit $L^{-1}F(p) = f(t)$

$$= \frac{1}{\Gamma(v)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^v \int_0^t \frac{ds}{s^{v+1}} e^{-\frac{x^2}{4s}} \operatorname{erfc}\left(\frac{sb}{2\sqrt{t-s}}\right)$$

soit en posant $s = ty$

$$u(x, z=0, t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \left(\frac{x^2}{4t}\right)^v \int_0^1 \frac{dy}{y^{v+1}} e^{-\frac{x^2}{4ty}} \operatorname{erfc}\left(\frac{by\sqrt{t}}{2\sqrt{1-y}}\right) \quad (\text{A2.7})$$

ce qui est la solution cherchée.

2.2. Etude des cas limites

a) La conductivité k_A dans l'aquifère tend vers zéro

Ceci revient à faire $v \rightarrow \infty$ dans les expressions (5.4) ou (5.5). Il ne nous a pas été possible de trouver directement la limite de ces solutions lorsque $v \rightarrow \infty$. Par contre, si on travaille dans l'espace transformé de LAPLACE, on peut trouver cette limite.

Considérons $F(x, y, p) = L(u(x, y, t))$

$$F(x, y, p) = \frac{1}{\Gamma(v)} \frac{2}{\Gamma(v)} \left(\frac{\mu x}{2}\right)^v K_\nu(\mu x) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} y}$$

avec $\mu = (p + b\sqrt{p})^{1/2}$ (cf. A2.4)

La transformée de la solution de LAUERIER u_L en radial s'écrit :

$$F_L(x, y, p) = \frac{1}{p} \exp\left(-\frac{\mu^2 x^2}{4v}\right) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} y} \quad (A2.8)$$

Pour la consistance des solutions, on doit trouver que :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} F(x, y, p) = F_L(x, y, p)$$

(condition nécessaire)

Si cette condition nécessaire est vérifiée, elle est suffisante pour qu'on ait : $\lim_{v \rightarrow \infty} u(x, y, t) = u_L(x, y, t)$ du fait de l'unicité de la solution u due aux contraintes physiques.

On doit donc avoir (d'après (A2.4) et (A2.8)) :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{\Gamma(v)} \left(\frac{\mu x}{2}\right)^v K_v(\mu x) \right] = \exp\left(-\frac{\mu^2 x^2}{4v}\right) \quad (A2.9)$$

$$\text{Or } K_v(vz) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2v}} \frac{e^{-v\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \quad \text{avec } \eta = \sqrt{1+z^2} + \text{Log} \frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

$$\forall z \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \epsilon$$

(cf. /8/ p. 378 - 9.7.8).

$$\begin{aligned} \rightarrow K_v(\mu x) &= K_v\left(v \frac{\mu x}{v}\right) \\ &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2v}} \frac{\exp\left(-v \left[\sqrt{1 + \frac{\mu^2 x^2}{v^2}} + \text{Log} \frac{\mu x/v}{1 + \sqrt{1 + \mu^2 x^2/v^2}} \right]\right)}{\left(1 + \frac{\mu^2 x^2}{v^2}\right)^{1/4}} \end{aligned}$$

quand $\epsilon \rightarrow 0 \quad (1 + \epsilon)^\pi \approx (1 + \pi\epsilon)$

$$\begin{aligned} \rightarrow K_v(\mu, x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2v}} \frac{e^{-v \left(1 + \frac{\mu^2 x^2}{2v^2}\right)} e^{-v \left(\text{Log} \frac{\mu x}{v} - \text{Log} 2 \left(1 + \frac{\mu^2 x^2}{4v^2}\right)\right)}}{\left(1 + \frac{\mu^2 x^2}{4v^2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2v}} e^{-v} e^{-\frac{\mu^2 x^2}{2v}} \left(\frac{v}{\mu x}\right)^v 2^v \left(1 + \frac{\mu^2 x^2}{4v^2}\right)^{v-1} \end{aligned}$$

De plus, $\Gamma(v) \sim e^{-v} v^v \sqrt{\frac{2\pi}{v}}$ (STIRLING)

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Gamma(v)} \left(\frac{\mu x}{2}\right)^v K_\nu(\mu x) &\approx e^{-\frac{\mu^2 x^2}{2v}} \left(1 + \frac{\mu^2 x^2}{4v^2}\right)^{v-1} \\ &\approx e^{-\frac{\mu^2 x^2}{2v}} \left(1 + (v-1) \frac{\mu^2 x^2}{4v^2}\right) \\ &\approx e^{-\frac{\mu^2 x^2}{2v}} \left(1 + \frac{\mu^2 x^2}{4v}\right) \\ &\approx e^{-\frac{\mu^2 x^2}{2v}} e^{\frac{\mu^2 x^2}{4v}} \\ &\approx e^{-\frac{\mu^2 x^2}{4v}} \\ &= e \end{aligned}$$

La limite de la solution à $v \rightarrow \infty$ est donc bien la solution de l'équation limite (LAUWERIER) comme dans le cas linéaire.

b) La conductivité k_R dans les épontes tend vers zéro

Dans ce cas, λ tend vers l'infini et l'expression (5.4) devient :

$$u(\lambda \rightarrow \infty, v, t_D) = \frac{1}{\Gamma(v)} \left(\frac{v}{t_D}\right)^v \int_0^1 \exp\left(-\frac{v}{t_D s}\right) \frac{ds}{s^{v+1}}$$

En posant $y = \frac{v}{t_D s}$, on obtient immédiatement :

$$u(v, t_D) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_{v/t_D}^{\infty} \frac{t_D^s}{e^{-y} y^{v-1}} dy \quad (A2.10)$$

Cette expression peut être comparée à celle donnée par CLOUET D'ORVAL et LEDOUX (/9/) et qui correspond au même schéma sans pertes par les épontes.

En annexe 3, on a refait le calcul permettant d'arriver à la solution 8 de /9/ à partir de l'équation 6.

Cette solution s'exprime sous une forme identique à (A2.10) puisque

$$\frac{v}{t_D} = \frac{x^2}{4t} \quad (\text{notation RUBINSTEIN})$$

$$= \frac{r^2 \rho_A C_A}{4 k_A t_r} = \frac{r^2 \gamma}{4 \lambda t} \quad (\text{notation CLOUET - LEDOUX})$$

et β CLOUET-LEDOUX = $\frac{Q \gamma F}{4 \pi \lambda e} = v$ RUBINSTEIN

Cette fois encore, la consistance des résultats est démontrée puisque la limite de la solution générale est solution du système limite.

ANNEXE 3

Vérification de la solution présentée par CLOUET d'ORVAL et LEDOUX (réf. / 9 /)

Les auteurs ont considéré un système correspondant exactement au schéma B radial sans pertes par les épontes ($\lambda \rightarrow \infty$).

Leur équation (6) s'écrit :

$$\frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{Q\gamma_F}{2\pi r e} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

où r et t sont les variables réelles d'espace et de temps

θ la température

γ_F et γ les capacités calorifiques du fluide et du milieu aquifère

Q le débit constant d'injection

e l'épaisseur de l'aquifère

λ la conductivité du milieu aquifère.

Dans le cas qui nous intéresse (essai à puits multiples), les conditions aux limites et initiales sont :

$$\theta(r, 0) = \theta_\infty \text{ pour } r \in (R, \infty) \quad R \text{ rayon du puits } \rightarrow 0$$

$$\theta(R, t) = \theta_0 \text{ pour } t \in (0, \infty)$$

$$\theta(\infty, t) = \theta_\infty \text{ pour } t \in (0, \infty)$$

avec θ_∞ et θ_0 température initiale de la nappe et température de l'eau injectée.

$$\text{On pose } x = \frac{r^2 \gamma}{4\lambda t}$$

Dans ce cas, les dérivées partielles deviennent :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_r = \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(- \frac{r^2 \gamma}{4\lambda t^2} \right)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_t = \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(\frac{r\gamma}{2\lambda t} \right) \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right|_t = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \times \frac{\gamma}{\lambda t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\gamma}{2\lambda t}$$

L'équation (6) devient alors :

$$\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{Q_{YF}}{2\pi r e} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

$$= \frac{\gamma}{t} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} x + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\gamma}{2t} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{Q_{YF}}{2\pi e} \frac{\gamma}{2\lambda t} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{r^2 \gamma}{4\lambda t} = 0$$

On multiplie par t/γ

$$x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(1 - \frac{Q_{YF}}{4\pi e \lambda} + x \right) = 0 \quad (A3.1)$$

On sait que l'équation A3.1 correspond à (7) de / 9 / à condition de poser $\beta = \frac{Q_{YF}}{4\pi e \lambda}$ et non $\frac{Q_{YF}}{2\pi e \lambda}$ comme indiqué en / 9 /. Soit $\beta = v_{\text{Rubinstein}}$

Intégration de A3.1, soit :

$$x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + (1 - \beta + x) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

On pose $\bar{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$ et on intègre par rapport à x .

$$\text{Log } \bar{\theta} = (\beta - 1) \text{Log } x - x$$

$$\bar{\theta} = x^{\beta-1} e^{-x} \quad (A3.2)$$

On veut calculer $\frac{\theta(x) - \theta_{\infty}}{\theta_0 - \theta_{\infty}}$

Il faut intégrer A3.2 par rapport à x sachant que

si $t = 0$ ($x \rightarrow \infty$) $\theta = \theta_{\infty}$ à $r \neq 0$
 et si $r \rightarrow R=0$ ($x = 0$) $\theta = \theta_0$ à $t > 0$.

$$\text{On a donc } \theta(x) - \theta_{\infty} = \int_{\infty}^x x^{\beta-1} e^{-x} dx$$

$$\theta_0 - \theta_{\infty} = \int_{\infty}^0 x^{\beta-1} e^{-x} dx$$

$$\text{et donc : } \frac{\theta(x) - \theta^\infty}{\theta_0 - \theta^\infty} = \frac{\int_{\frac{r^2 \gamma}{4\lambda t}}^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} dx}{\int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} dx}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\frac{r^2 \gamma}{4\lambda t}}^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} dx$$

ANNEXE 4

4.1. Calcul de la solution du système (6.1,2) décrivant le schéma D en écoulement radial

On utilise les mêmes variables adimensionnelles qu'en annexe 3 et le système (6-1,2) est ainsi réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{1-2\nu}{x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x, t > 0 \end{array} \right. \quad (6.7a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad x, z, t > 0 \quad (6.7b)$$

$$u(x, z, 0) = 0 \quad (6.7c)$$

$$u(0, 0, t) = 1 \quad (6.7d)$$

$$\lim u(x^2 + z^2 \rightarrow \infty, t) = 0 \quad (6.7e)$$

Il ne suffit plus maintenant pour résoudre le système (6.7) d'appliquer une transformation de LAPLACE (afin de changer le système aux dérivées partielles en un système différentiel ordinaire), ceci à cause des termes en x dans (6.7b). Il faut maintenant utiliser d'autres transformations intégrales du type FOURIER - BESSEL et HANKEL

Nous exposons maintenant la méthode de RUBINSTEIN en l'explicitant chaque fois que cela nous a semblé nécessaire.

Si on applique la transformation de LAPLACE au système (6.7) ci-dessus, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F = \frac{p}{a^2} F \quad x, z > 0 \quad (A4.1)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \frac{\partial F}{\partial z} = pF \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \quad (A4.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} u(0, 0, p) = v(p) \\ \lim u(x^2 + z^2 \rightarrow \infty) = 0 \end{array} \right\} \quad (A4.3)$$

$$\text{avec } F(x, z, p) = L(u(x, z, t)) = \int_0^\infty e^{-pt} u \, dt$$

Dans /5/, nous lisons que la solution cherchée doit être de la forme :

$$u(x,z,p) = \int_0^{\infty} f(s,p) \exp \left\{ -z \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \right\} J_0(xs) ds \quad (A4.4)$$

Ceci se justifie comme suit :

- on introduit la transformée de HANKEL de F, soit :

$$\bar{F}(s,z) = \int_0^{\infty} x F(x,z) J_0(xs) dx$$

- on applique cette transformation sur (A4.1) en tenant compte de ce que :

$$x s J_0''(xs) + J_0'(xs) + xs J_0'(xs) = 0 \text{ (équation de BESSEL)}$$

On obtient alors :

$$\bar{F}(s,z) \left(s^2 + \frac{p}{a^2} \right) = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z^2}(s,z) \quad (A4.5)$$

$$\text{soit : } \bar{F}(s,z) = \tilde{f}(s,p) \exp \left\{ -\sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} z \right\}$$

et par transformation de HANKEL inverse :

$$F(x,z,p) = \int_0^{\infty} s \tilde{f}(s,p) e^{-\sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} z} J_0(xs) ds$$

soit, en posant $s \tilde{f}(s,p) = f(s,p)$, :

$$F(x,z,p) = \int_0^{\infty} f(s,p) \exp \left\{ -\sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} z \right\} J_0(xs) ds \quad \text{identique à A4.4}$$

Cette solution satisfait à A4.1. Elle doit être solution de A4.2 et satisfaire les conditions aux limites.

On l'introduit dans A4.2 pour $z = 0$. On obtient :

$$\int_0^{\infty} f(s,p) \left\{ s^2 J_0''(xs) + \frac{1-2\nu}{x} s J_0'(xs) - \alpha \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} J_0'(xs) - p J_0'(xs) \right\} ds = 0 \quad (A4.6)$$

Compte tenu de l'équation de BESSEL et de l'égalité $J_0'(y) = -J_1(y)$, on obtient :

$$\int_0^{\infty} \frac{2\nu}{x} s J_1(xs) f(s,p) ds = \int_0^{\infty} \left(s^2 + p + \alpha \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \right) J_0(xs) f(s,p) ds$$

$$\text{soit } \int_0^{\infty} 2\nu s f(s,p) J_1(xs) ds = \int_0^{\infty} xs f^*(s,p) J_0(xs) ds \quad (\text{A4.7})$$

$$\text{avec } f^*(s,p) = \frac{f(s,p)}{s} \left(s^2 + p + \alpha \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \right) \quad (\text{A4.8})$$

Dans A4.7, on remplace x par ξ , on multiplie par $J_0(x\xi)$ et on intègre sur ξ . On obtient :

$$\int_0^{\infty} J_0(x\xi) \xi d\xi \int_0^{\infty} s f^*(s,p) J_0(\xi s) ds - 2\nu \int_0^{\infty} J_0(x\xi) d\xi \int_0^{\infty} s f(s,p) J_1(\xi s) ds = 0 \quad (\text{A4.9})$$

Dans A4.9, la première intégrale est l'intégrale de FOURIER-BESSEL. Il est facile de vérifier qu'elle est égale à $f^*(x,p)$ puisque l'application de HANKEL est auto-réciproque.

Le deuxième terme de A4.9 peut s'écrire :

$$- 2\nu \int_0^{\infty} s f(s,p) ds \int_0^{\infty} J_0(x\xi) J_1(\xi s) d\xi$$

L'intégrale intérieure est l'intégrale discontinue de WEBER SCHAFFHEITLIN.

On sait que (cf. /8/) :

$$\int_0^{\infty} J_0(x\xi) J_1(\xi s) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } x > s \\ \frac{1}{s} & \text{si } x < s \end{cases}$$

Et, par conséquent, :

$$f^*(x,p) = \frac{f(x,p)}{x} \left(x^2 + p + \alpha \sqrt{x^2 + \frac{p}{a^2}} \right) = 2\nu \int_x^{\infty} f(s,p) ds \quad (\text{A4.10})$$

$$\text{On pose } \phi(x,p) = \int_x^{\infty} f(s,p) ds \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = -f(x,p)$$

$$\phi(0,p) = \int_0^{\infty} f(s,p) ds = F(0,0,p) = v(p)$$

L'équation A4.10 devient alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{2\nu x \phi}{x^2 + p + \alpha \sqrt{x^2 + \frac{p}{a^2}}} = 0 \quad (\text{A4.11})$$

Il faut intégrer A4.11 compte tenu de ce que $\phi(0,p) = v(p)$

$$\text{soit } \text{Log } \phi(x) = \int \frac{-2v x dx}{x^2 + p + \alpha \sqrt{x^2 + \frac{p}{a^2}}}$$

$$\text{Calculons } I = \int \frac{x dx}{x^2 + p + \alpha \sqrt{x^2 + \frac{p}{a^2}}}$$

$$\text{On pose } u^2 = x^2 + \frac{p}{a^2}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{u du}{(u - u_1)(u - u_2)} = \frac{1}{u_1 - u_2} \left(\int \frac{u du}{u - u_1} - \int \frac{u du}{u - u_2} \right)$$

$$\text{avec } u_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + p \left(\frac{1-a^2}{a^2} \right)}$$

$$\text{Or } \int \frac{u du}{u - u_i} = u + u_i \text{Log}(u - u_i)$$

$$\text{et donc } I = \text{Log} \left(\frac{\frac{u_1}{u_1 - u_2}}{\frac{u_2}{u_1 - u_2}} \right)$$

$$\text{soit } \phi(x) = A \frac{u - u_1}{u - u_2} \frac{-2v\alpha_1}{-2v\alpha_2}$$

$$\phi(0) = v(p) \Rightarrow A^{-2v} = v(p) \frac{\left(\frac{p}{a^2} - u_2 \right)^{-2v\alpha_2}}{\left(\frac{p}{a^2} - u_1 \right)^{-2v\alpha_1}}$$

Soit finalement :

$$\phi(x,p) = v(p) \exp \left[-2v \left(\frac{u_1}{u_1 - u_2} \right) \text{Log} \left(\frac{\sqrt{x^2 + \frac{p}{a^2}} - u_1}{\frac{p}{a^2} - u_1} \right) - \right. \\ \left. -2v \left(\frac{u_2}{u_1 - u_2} \right) \text{Log} \left(\frac{\sqrt{x^2 + \frac{p}{a^2}} - u_2}{\frac{p}{a^2} - u_2} \right) \right] \quad (\text{A4.12a})$$

Dans le cas où $a^2 = 1$, l'intégration de I se fait bien plus aisément et on obtient le résultat sous la forme :

$$\phi(x,p) = v(p) \frac{(\sqrt{p} + \alpha)^{2v}}{(\sqrt{x^2 + p} + \alpha)^{2v}} \quad (A4.12b)$$

et nous avons donc d'après (A4.10) :

$$f(x,p) = \frac{2vx v(p) (\sqrt{p} + \alpha)^{2v}}{(x^2 + p + \alpha\sqrt{x^2 + p}) (\sqrt{x^2 + p} + \alpha)^{2v}}$$

soit
$$f(x,p) = \frac{2vx v(p) (\sqrt{p} + \alpha)^{2v}}{\sqrt{x^2 + p} (\sqrt{x^2 + p} + \alpha)^{2v+1}} \quad (A4.13)$$

Or
$$F(x,z,p) = \int_0^\infty f(s,p) \exp(-\sqrt{s^2 + p} z) J_0(xs) ds$$

Posons
$$f_1(x,p) = \frac{2vx (\sqrt{p} + \alpha)^{2v}}{\sqrt{x^2 + p} (\sqrt{x^2 + p} + \alpha)^{2v+1}} = \frac{f(x,p)}{v(p)}$$

Posons
$$L^{-1}(v(p)) = v(\tau)$$

$$L^{-1}\left\{f_1(x,p) e^{-z\sqrt{x^2+p}}\right\} = \phi(x,z,\tau)$$

alors :

$$L^{-1}\left\{f(x,p) e^{-z\sqrt{x^2+p}}\right\} = \int_0^t v(t-\tau) \phi(x,z,\tau) d\tau$$

et

$$\begin{aligned} L^{-1}(F(x,z,p)) &= L^{-1} \int_0^\infty f(s,p) e^{-z\sqrt{s^2+p}} J_0(xs) ds \\ &= \int_0^\infty J_0(xs) L^{-1}\left\{f(s,p) e^{-z\sqrt{s^2+p}}\right\} ds \end{aligned}$$

soit
$$u(x,z,t) = \int_0^\infty J_0(xs) ds \int_0^t v(t-\tau) \phi(s,z,\tau) d\tau \quad (A4.14)$$

avec
$$\phi(s,z,\tau) = L^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{p} + \alpha)^{2v} 2vs e^{-z\sqrt{s^2+p}}}{\sqrt{s^2 + p} (\sqrt{s^2 + p} + \alpha)^{2v+1}}\right\} \quad (A4.15)$$

Ceci dans le cas où $a^2 = 1$.

Lorsque $a^2 \neq 1$, il faut utiliser l'expression de $\phi(x,p)$ donnée par (A4.12a) et réaliser l'inversion de LAPLACE de A4.14 avec cette expression de $\phi(x,p)$, ce que nous ne savons pas faire.

Par contre, nous allons voir que dans le cas $a^2 = 1$ nous pourrions obtenir une expression explicite de $\phi(s,z,\tau)$ et partant de $u(x,z,t)$.

On pose donc maintenant $a^2 = 1$ avec en plus la condition $n = 2\nu$ entier, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f_1(x,p) e^{-z\sqrt{x^2+p}} &= \frac{n}{x} \frac{(\beta + \sqrt{p/x^2})^n \exp(-y\sqrt{1+p/x^2})}{\sqrt{1+p/x^2} (\beta + \sqrt{1+p/x^2})^{n+1}} \\ &= \frac{n}{x} F\left(\frac{p}{x^2}\right) \end{aligned}$$

avec $\beta = \frac{\alpha}{x}$, $y = xz$.

$$\text{Soit } \phi(t) = L^{-1}(F(p)) \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{n}{x} F\left(\frac{p}{x^2}\right)\right) = \frac{n}{x} \phi(x^2 t) = \phi(x,z,t)$$

$$F(p) = \frac{(\beta + \sqrt{p})^n \exp(-y\sqrt{1+p})}{\sqrt{1+p} (\beta + \sqrt{1+p})^{n+1}}$$

On peut développer $(\beta + \sqrt{p})^n = \sum_{m=0}^n C_n^m \beta^{n-m} p^{m/2}$ car n entier.

$$F_1(p) = F(p^2) = \sum_{m=0}^n \frac{C_n^m \beta^{n-m} p^m \exp(-y\sqrt{1+p^2})}{\sqrt{1+p^2} (\beta + \sqrt{1+p^2})^{n+1}} \quad (\text{A4.16})$$

$$F(p^2) = F_1(p) \text{ et si } \begin{cases} L^{-1}(F(p^2)) = \phi_1(t) \\ L^{-1}(F(p)) = \phi(t) \end{cases}$$

alors, $\phi_1(t)$ est la transformée inverse de $F(p)$ par rapport à \sqrt{p} (immédiat)

Nous avons utilisé jusqu'à présent la définition classique de la transformée de LAPLACE, soit $L^{-1}(u(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t) dt$.

Nous prenons maintenant la définition utilisée par AVDONINE et RUBINSTEIN afin de pouvoir suivre leurs calculs, c'est-à-dire : $L_2(u(t)) = p L_1(u(t))$. Ce qui précède est inchangé, sauf l'expression A4.14 qui doit s'écrire :

$$u(x,z,t) = \int_0^\infty J_0(xs) ds \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t v(t-\tau) \phi(s,z,\tau) d\tau \quad (\text{A4.17})$$

Dans ce cas, on peut écrire :

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \phi_1(\tau) d\tau \quad (\text{A4.18})$$

Cette formule se vérifie en calculant $L_2\phi(t)$ par rapport à p qui doit être égale à $L_2(\phi_1)$ par rapport à \sqrt{p} , ce qui est facile sachant que

$$\int_0^{\infty} \exp\left[-px^2 - \frac{\tau^2}{4x^2}\right] dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp(-\tau\sqrt{p}) \quad (\text{cf. formule 3.325 / 12/})$$

$$\text{D'après A4.16, posons } F_1(p) = \sum_{m=0}^n C_n^m \beta^{n-1} p^{m-1} \frac{p}{1+p^2} F^*(\sqrt{1+p^2})$$

$$\text{et } \bar{F}(p) = \frac{p}{1+p^2} F^*(\sqrt{1+p^2}) = L_2 \bar{\phi}(t)$$

$$\text{Si } L_1(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = g(p)$$

$$\text{et } L_2(f(t)) = p L_1(f(t)) = G(p)$$

alors, d'après /11/ p. 227 :

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}} g(\sqrt{p^2+a^2}) = L_1 \left\{ \int_0^t J_0(a(t^2-u^2)^{1/2}) f(u) du \right.$$

$$\text{et donc : } \frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}} \frac{G(\sqrt{p^2+a^2})}{\sqrt{p^2+a^2}} = \frac{L_2}{p} \int_0^t J_0(a(t^2-u^2)^{1/2}) f(u) du$$

$$\text{Soit } \bar{\phi}(t) = L_2^{-1} \left(\frac{p}{p^2+1} F^*(\sqrt{p^2+1}) \right) = \int_0^t J_0((t^2-u^2)^{1/2}) \phi^*(u) du \quad (\text{A4.19})$$

$$\text{où } \phi^*(t) = L_2^{-1} (F^*(p))$$

$$\text{et } F^*(p) = \frac{p \exp(-yp)}{(\beta+p)^{n+1}}$$

Ce qui donne : $\phi^*(t) = \exp(-\beta(t-y)) \frac{(t-y)^n}{n!} H(t-y)$ où $H(t)$ est la fonction de HEAVISIDE.

$$\text{A4.19 donne alors } \bar{\phi}(t) = \int_0^t J_0((t^2-\tau^2)^{1/2}) \phi^*(\tau) d\tau$$

$$\text{Soit } \bar{\phi}(t) = \int_y^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2}) \exp(-\beta(\tau-y)) \frac{(\tau-y)^n}{n!} d\tau \quad (\text{A4.20})$$

$$\text{Or, } F_1(p) = \sum_{m=0}^n C_n^m \beta^{n-m} p^{m-1} \bar{F}(p) \text{ et } p^{m-1} \bar{F}(p) = L_2 \left(\frac{\partial^{m-1} \bar{\phi}(t)}{\partial t^{m-1}} \right) \text{ si } \bar{\phi}(y) = \bar{\phi}'(y) = \dots$$

$$= \bar{\phi}^{(n-2)}(y) = 0$$

pour $y \rightarrow 0$.

On a donc d'après A4.20 :

$$\phi_1(t) = \sum_{m=0}^n C_n^m \beta^{n-m} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \int_y^t J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) \exp(-\beta(\tau-y)) \frac{(\tau-y)^n}{n!} d\tau \quad (A4.21)$$

et d'après A4.18 :

$$\phi(t) = \sum_{m=0}^n \frac{C_n^m \beta^{n-m}}{\sqrt{\pi t}} \frac{1}{n!} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) d\lambda \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \int_y^\lambda J_0(\sqrt{\lambda^2 - \tau^2}) \exp(-\beta(\tau-y)) (\tau-y)^n d\tau \quad (A4.22)$$

Il est facile de vérifier que :

$$\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) = -\frac{d^m}{d\lambda^m} \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)$$

En intégrant A4.22 par parties jusqu'à l'ordre (m-1), on obtient :

$$\phi(t) = \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{\beta^{n-m}}{n!} (-1)^m \int_0^\infty \frac{d^m}{d\lambda^m} \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right) d\lambda \int_y^\lambda J_0(\sqrt{\lambda^2 - \tau^2}) \exp(-\beta(\tau-y)) (\tau-y)^n d\tau \quad (A4.23)$$

On utilise ensuite la formule de LEIBNITZ

$$\frac{d^n}{dx^n} (uv) = \sum_{m=0}^n C_n^m \left(\frac{d^{n-m} u}{dx^{n-m}} \right) \left(\frac{d^m v}{dx^m} \right)$$

et on obtient finalement :

$$\phi(t) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_y^\infty \exp(\beta\lambda) \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\exp(-\beta\lambda) \operatorname{erfc}\frac{\lambda}{2\lambda t} \right) d\lambda \int_y^\lambda J_0(\sqrt{\lambda^2 - \tau^2}) \exp(-\beta(\tau-y)) (\tau-y)^n d\tau \quad (A4.24)$$

On cherche en fait $\Phi(x,z,t) = \frac{n}{x} \phi(x^2t)$ soit

$$\frac{(-1)^n}{x\Gamma(n)} \int_y^\infty \exp(\beta\lambda) \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\exp(-\beta\lambda) \operatorname{erfc}\frac{\lambda}{2x\sqrt{t}} \right) d\lambda \int_y^\lambda J_0(\sqrt{\lambda^2 - \tau^2}) \exp(-\beta(\tau-y)) (\tau-y)^n d\tau$$

Sachant que $y = xz$, on pose $\tau = x\eta$, $\lambda = x\xi$, et on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} x \int_z^\infty \exp(\alpha\xi) \frac{d^n}{d\xi^n} \left(\exp(-\alpha\xi) \operatorname{erfc}\frac{\xi}{2\sqrt{t}} \right) d\xi \times \\ &\times \int_z^\xi J_0(x\sqrt{\xi^2 - \eta^2}) \exp(-\alpha(\eta-z)) (\eta-z)^n d\eta \quad (A4.25) \end{aligned}$$

On pose maintenant $\tau = \sqrt{\xi^2 - \eta^2}$ et on obtient :

$$\Phi(x, z, t) = \frac{(-1)^n x}{\Gamma(n)} \int_z^\infty \exp(\alpha \xi) \frac{d^n}{d\xi^n} \left(\exp(-\alpha \xi) \operatorname{erfc} \frac{\xi}{2\sqrt{t}} \right) d\xi \times \\ \times \int_0^{\sqrt{\xi^2 - z^2}} J_0(x\tau) \exp(-\alpha(\sqrt{\xi^2 - \tau^2} - z)) (\sqrt{\xi^2 - \tau^2} - z)^n \frac{\tau d\tau}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}}$$

On fait maintenant $u(0, 0, t) = v(t) = 1$, et on obtient :

$$u(x, z, t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_z^\infty \exp(\alpha \xi) \frac{d^n}{d\xi^n} \left(\exp(-\alpha \xi) \operatorname{erfc} \frac{\xi}{2\sqrt{t}} \right) d\xi \times \\ \times \int_0^\infty s J_0(xs) ds \int_0^{\sqrt{\xi^2 - z^2}} \tau J_0(s\tau) \exp(-\alpha(\sqrt{\xi^2 - \tau^2} - z)) (\sqrt{\xi^2 - \tau^2} - z)^n \frac{d\tau}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}}$$

L'expression formée des deux intégrales internes sur τ et sur s revient à une double application de HANKEL sur

$$\exp(-\alpha(\sqrt{\xi^2 - \tau^2} - z)) (\sqrt{\xi^2 - \tau^2} - z)^n \frac{(1 - H(\tau - \sqrt{\xi^2 - z^2}))}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}}$$

Ensuite, en posant $\begin{cases} \xi = R \\ s = \sqrt{\xi^2 - x^2} - z \end{cases}$ on obtient :

$$u(x, z, t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \exp(\alpha R) \frac{d^n}{dR^n} \left(\exp(-\alpha R) \operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{t}} \right) \exp(-\alpha s) \frac{s^n}{R} ds \quad (\text{A4.26})$$

On peut de nouveau appliquer la formule de LEIBNITZ à l'expression

$$\frac{d^n}{dR^n} \left(\exp(-\alpha R) \operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{t}} \right) \text{ sachant que } \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{erfc} z = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_{n-1}(z) e^{-z^2}$$

On obtient alors l'expression finale :

$$u(x, z, t) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\alpha s - \frac{R^2}{4t}\right) \frac{s^n}{R} \sum_{m=0}^n \frac{\alpha^m}{m!(n-m)!} (2\sqrt{t})^{m-n} H_{n-m-1}\left(\frac{R}{2\sqrt{t}}\right) ds,$$

soit A4.27

$$\text{avec } R^2 = (z + s)^2 + x^2$$

Pour le cas qui nous intéresse (dans l'aquifère), $z=0$ et on doit considérer la même formule avec $R^2 = s^2 + x^2$.

4.2. Le temps t tend vers l'infini - Etude de la limite.

La solution générale s'exprime également sous la forme A4.26 :

$$u(x,z,t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \exp(\alpha R) \frac{d^n}{dR^n} \left(\exp(-\alpha R) \operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{t}} \right) \exp(-\alpha s) \frac{s^n}{R} ds$$

$$\text{avec } R^2 = x^2 + (s+z)^2$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, $u(x,z,t)$ tend vers une répartition stationnaire de température

$$u(x,z) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \exp(-\alpha s) \frac{s^n}{R} ds \quad (\text{A4.28})$$

puisque $\operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{t}} \rightarrow 1$.

Lorsque $R^2 = x^2 + (s+z)^2 \rightarrow \infty$ à s fini, cette expression tend bien vers zéro, ce qui est la limite correcte.

ANNEXE 5

5. FORMULE ASYMPTOTIQUE AUX GRANDS n

5.1. Expression et résultats

Ainsi que l'a signalé RUBINSTEIN (/ 5/), l'expression (6.6) pose des problèmes numériques sérieux. En effet, l'intégrand est une fonction oscillante dont la fréquence et l'amplitude d'oscillation croissent avec n . De plus, les amplitudes successives sont dans des rapports de 10^2 ou plus. Pour ces raisons, il est difficile et onéreux d'effectuer l'intégration pour $n \geq 20$.

Il a donc semblé intéressant d'établir une formule asymptotique valable aux grands n . RUBINSTEIN a effectué les calculs à l'aide de deux méthodes différentes, dont nous donnons les grandes lignes en annexe 5.2.

Il n'a cependant pas réussi à obtenir une expression asymptotique régulière selon x , z et t . En posant :

$$\xi = \frac{\alpha x}{n}, \quad \eta = \frac{\alpha z}{n}, \quad \tau = \frac{\alpha^2 t}{n^2}$$

et toujours $a^2 = 1$. La solution s'obtient sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j n^{-j} \\ \text{avec } u_0 &= \frac{1}{R} \operatorname{erfc} \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \\ u_1 &= \frac{\partial}{\partial \eta} u_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R u_0) \\ \text{et } R^2 &= (1 + \eta)^2 + \xi^2. \end{aligned} \right\} (6.8)$$

On vérifie facilement que les expressions ci-dessus donnent, en $z = 0$, :

$$u(\xi, 0, \tau) = \frac{1}{R} \operatorname{erfc} \left(\frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \right) \left(1 - \frac{3\xi^2}{2nR^4} \right) + \frac{1}{R^4} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp - \frac{(R-1)^2}{4\tau} \left(-\frac{3\xi^2}{2n} - \frac{R(R-1)\xi^2}{4\tau n} \right)$$

$$\text{avec } R^2 = 1 + \xi^2$$

RUBINSTEIN a montré que l'expression asymptotique est régulière dans le domaine $\eta \geq \eta_0 > 0$, $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \tau \leq T$, $\forall \eta_0, T > 0$.

Par contre, pour $\eta = 0$, c'est-à-dire pour le cas qui nous intéresse, il résulte des décompositions utilisées que la formule trouvée n'est valable que pour de grands t , ce que l'on pourra vérifier sur les résultats.

On a représenté les variations de $T_D(\lambda, \eta, t_D)$ en fonction de t_D pour trois valeurs de λ , soit .5, 5. et 50. et pour $Pe = n = 2, 4$ et 8 respectivement sur les figures 5a, 5b et 5c.

Les courbes en trait plein représentent la solution exacte du schéma D (formule 6.6) et les courbes en pointillés la solution asymptotique à deux termes explicitée ci-dessus.

On constate comme prévu par l'analyse que l'approximation asymptotique n'est valable que sur un intervalle (t_{Dmin}, ∞) , t_{Dmin} dépendant de λ et de n et croissant avec λ à n fixé.

Il est remarquable que pour un petit λ ($\lambda = .5$) l'approximation soit presque partout valable, même pour n petit ($n = 2$), alors que l'analyse présupposait sa validité seulement pour n grand (en fait $n \rightarrow \infty$).

5.2. Calcul de l'expression asymptotique du schéma D

Nous reproduisons ici les grandes lignes du calcul de RUBINSTEIN permettant d'arriver à la formule asymptotique donnée par le système (6.8).

Deux méthodes ont été successivement utilisées. La première part du système général (6.7) ; la deuxième de la solution générale de ce système.

1ère méthode

Dans le système initial (6.7), on pose :

$$\xi = \frac{\alpha x}{n}, \quad \eta = \frac{\alpha z}{n}, \quad \tau = \frac{\alpha^2 t}{n^2} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

et le nouveau système s'écrit :

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad \xi, \eta, \tau > 0 \quad (A5.1a)$$

$$\epsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \eta = 0 \quad (A5.1b)$$

$$u(0, 0, \tau) = 1 \quad (A5.1c)$$

$$u(\xi, \eta, 0) = 0$$

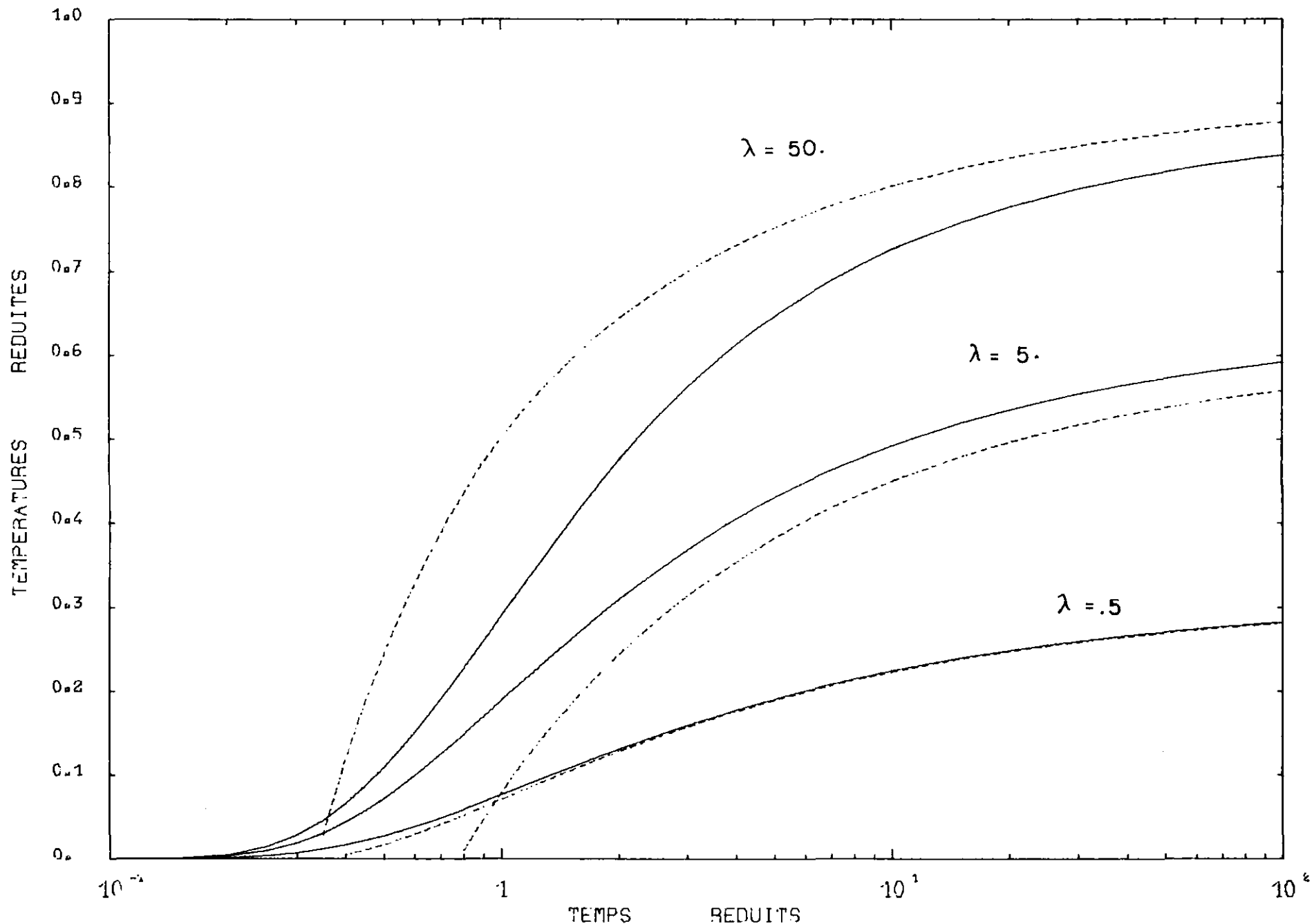


FIGURE 5a -- ECOULEMENT RADIAL -- SCHEMA D
 OU "SCHEMA DE CONCENTRATION DES SOURCES" -- (Pe = 2)

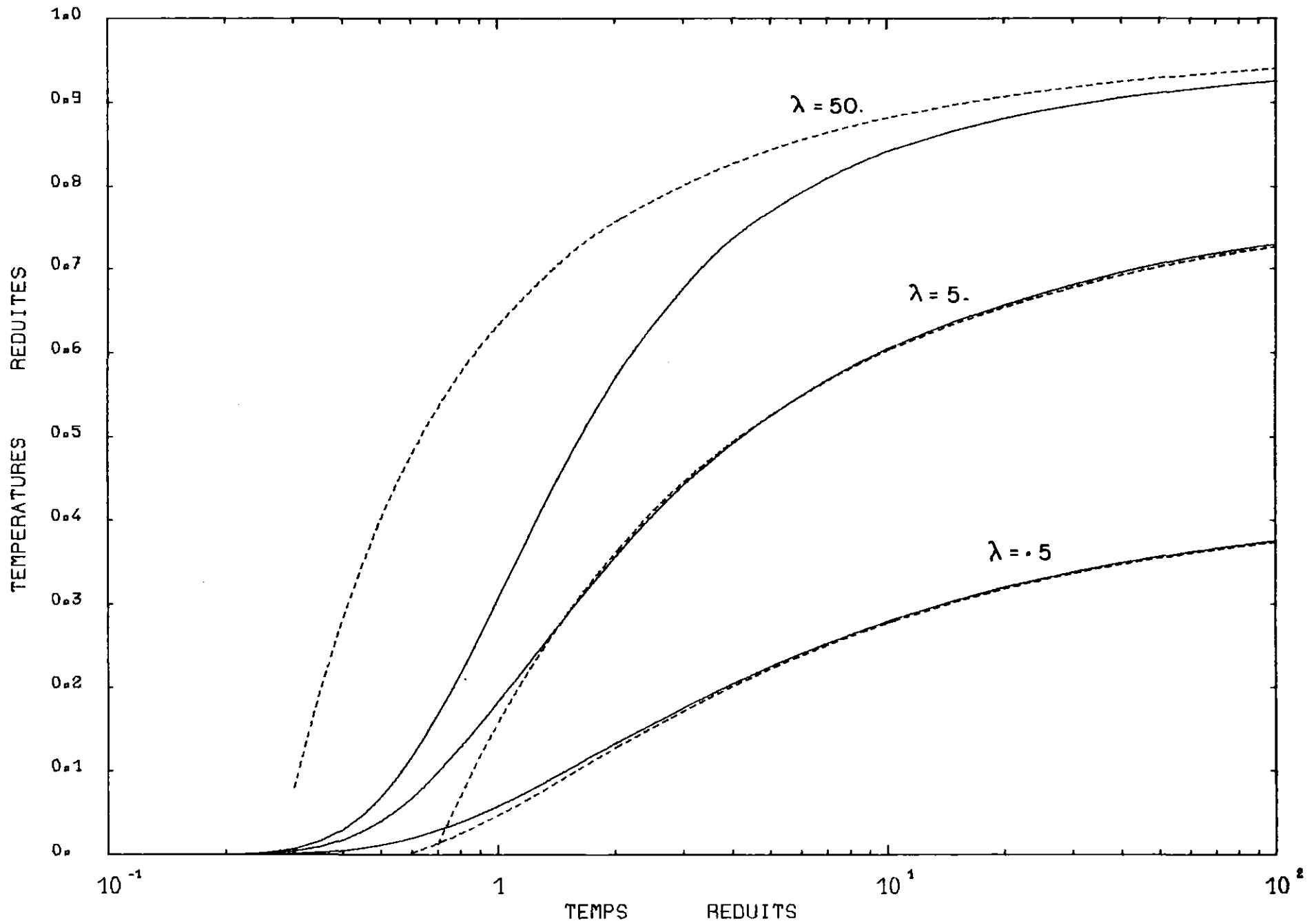


FIGURE 5b - ECOULEMENT RADIAL - SCHEMA D
 OU "SCHEMA DE CONCENTRATION DES SOURCES" - ($Pe = 4$)

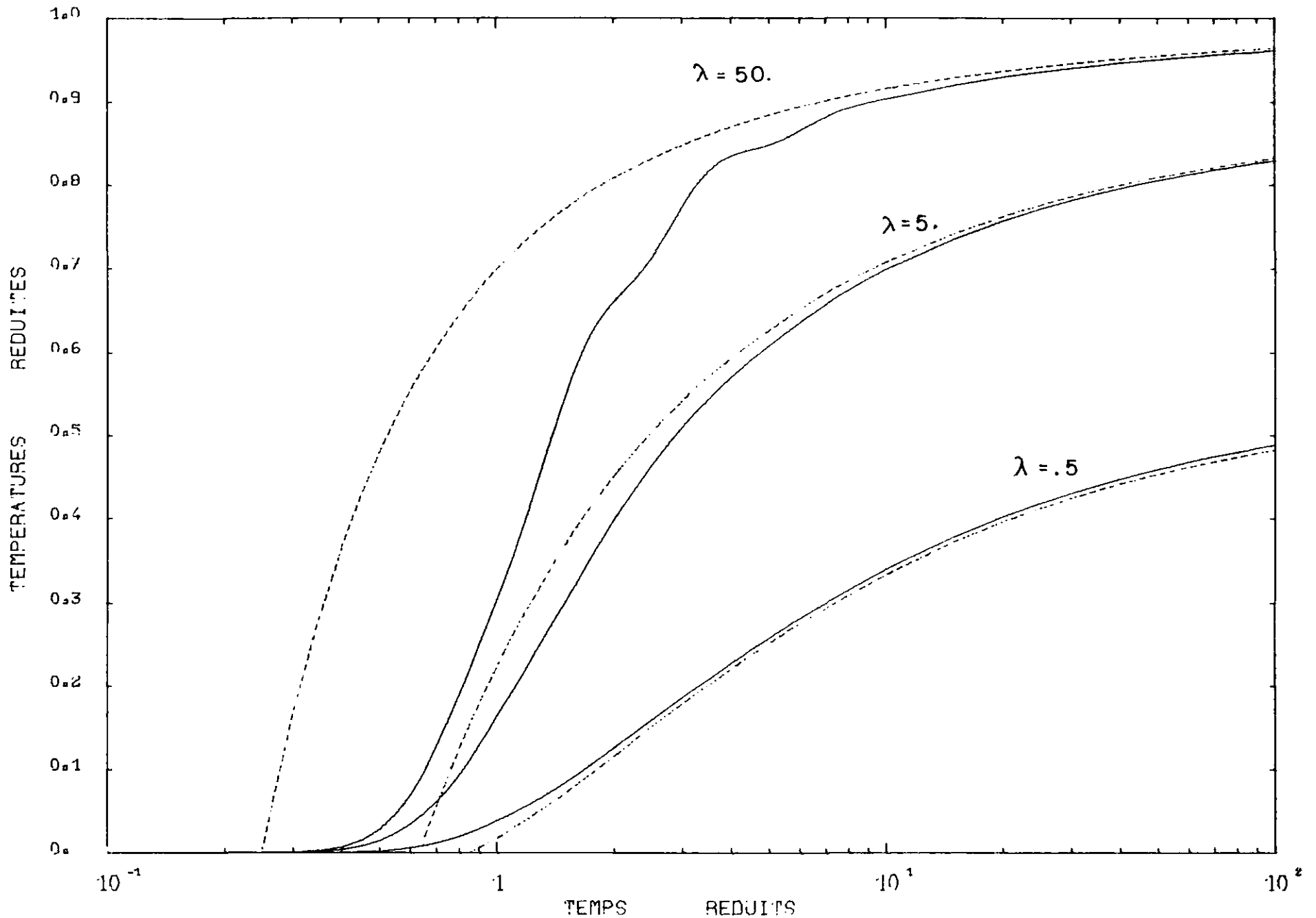


FIGURE 5c - ÉCOULEMENT RADIAL -- SCHEMA D
 OU "SCHEMA DE CONCENTRATION DES SOURCES" - (Pe=8)

En utilisant les transformations de LAPLACE et HANKEL, suivies de la méthode de calcul décrite en annexe 4, on trouve :

$$v(\xi, \eta, p) = \int_0^{\infty} f(s, p) \exp \left(-\eta \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \right) J_0(\xi s) ds \quad (A5.2)$$

$$\text{avec } f(s, p) = - \frac{d}{ds} \phi(s, p) \quad (A5.3)$$

$$\text{et } \left[\epsilon (s^2 + p) + \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \right] \frac{d\phi}{ds} + s\phi = 0 \quad (A5.4)$$

$$\phi(0, p) = 1 \quad (A5.5)$$

L'étape suivante consiste à développer la solution $u(\xi, \eta, \tau)$ en série de puissances de ϵ , soit :

$$u(\xi, \eta, \tau) = \sum_{m=0}^{n-1} u_m(\xi, \eta, \tau) \epsilon^m + u_n(\epsilon, \xi, \eta, \tau) \epsilon^n \quad (A5.6)$$

$$\text{avec } f(s, p, \epsilon) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(s, p) \epsilon^m + f_n(s, p, \epsilon) \epsilon^n \quad (A5.7)$$

A $u_m(\xi, \eta, \tau)$, on fait correspondre sa transformée de LAPLACE sur τ , soit d'après A5.2 :

$$v_m(\xi, \eta, p) = \int_0^{\infty} f_m(s, p) \exp \left(-\eta \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \right) J_0(\xi s) ds \quad (A5.8)$$

Les u_m sont alors solutions des systèmes suivants :

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) u_0 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \eta > 0 \\ \xi > 0 \\ \tau > 0 \end{array} \right\} \\ & \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u_0 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \eta = 0 \\ \xi, \tau > 0 \end{array} \right\} \\ & u_0(0, 0, \tau) = 1 \\ & u_0(\xi, \eta, 0) = 0 \\ & |u_0(\xi^2 + \eta^2, \tau)| < \infty \quad \text{pour } \tau \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (A5.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) u_m &= 0 & \eta > 0 \\ & & \xi > 0 \\ & & \tau > 0 \\ \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u_m &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) u_{m-1} & \eta &= 0 \\ & & \xi, \tau &> 0 \\ u_m(0, 0, \tau) &= 0 \\ u_m(\xi, \eta, 0) &= 0 \\ |u_m| < \infty \text{ quand } \tau \rightarrow \infty \quad (m = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (A5.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\epsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] u_n + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) u_{n-1} &= 0 & \eta &= 0 \\ & & x, \tau &> 0 \\ u_n(0, 0, \tau) &= 0 \\ u_n(\xi, \eta, 0) &= 0 \\ |u_n| < \infty \text{ quand } \tau \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (A5.11)$$

Par analogie, les f_m sont solutions des équations :

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{-d \phi_m}{ds} \quad (m = 0, 1, 2 \dots n) \\ \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \frac{d\phi_0}{ds} + s\phi_0 &= 0 & \phi_0(0, p) &= 1 \\ \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \frac{d\phi_m}{ds} + s\phi_m - (s^2 + p)f_{m-1} &= 0 \end{aligned} \quad (A5.12)$$

$$\phi_m(0, p) = 0 \quad (m = 1, 2 \dots n-1)$$

$$\left[\epsilon (s^2 + p) + \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \right] \frac{d\phi_n}{ds} + s\phi_n - (s^2 + p)f_{n-1} = 0$$

$$\phi_n(0, p) = 0.$$

L'intégration de ce système donne $\phi_0(s, p) = \exp \left[- \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} + \sqrt{\frac{p}{a^2}} \right]$ (A5.13a)

$$\phi_m(s, p) = \int_0^s \left[\lambda^2 + \frac{p}{a^2} \right]^{\frac{1}{2}} (\lambda^2 + p) \exp \left[- \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} + \sqrt{\lambda^2 + \frac{p}{a^2}} \right] f_{m-1}(\lambda, p) d\lambda$$

(m = 1, 2 ... n-1) (A5.13b)

$$\phi_n(s, p) = \int_0^s \left[\epsilon (\lambda^2 + p) + \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \right]^{-1} (\lambda^2 + p) f_{n-1}(\lambda, p) \exp \left(\int_s^\lambda \frac{\xi d\xi}{\epsilon (\lambda^2 + p) + \sqrt{\xi^2 + \frac{p}{a^2}}} \right) d\lambda \quad (A5.13c)$$

Le calcul de ces expressions n'offre aucune difficulté.

De A5.13a, on tire :

$$f_0(s,p) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + p/a^2}} \exp \left[-\sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} + \sqrt{\frac{p}{a^2}} \right] = F_0(s,p) e^{\eta \sqrt{s^2 + p/a^2}}$$

$$\text{et } F_0(s,p) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + p/a^2}} \exp \left[-\sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} + \sqrt{\frac{p}{a^2}} - \eta \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \right] \quad (\text{A5.14})$$

Posons $F_1(p) = F_0(a^2 p^2) = L(\psi_1(t))$.

$$\text{Alors } F_0(p) = F_1\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right) = L(\psi_0(t))$$

$$\text{avec } \psi_0(t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{\lambda^2}{4a^2 t} \right] \psi_1(\lambda) d\lambda \quad (\text{A5.15})$$

$$\text{On cherche } \psi_1(t) = L_2^{-1} \left[\frac{se^{-\eta p}}{\sqrt{s^2 + p^2}} \exp \left[-(\eta + 1) \sqrt{s^2 + p^2} + (\eta + 1)p \right] \right]$$

$$\psi_1(t) = L_2^{-1} \left[se^{-\eta p} \frac{1}{\sqrt{s^2 + p^2}} \exp \left[(\eta + 1) (p - \sqrt{s^2 + p^2}) \right] \right]$$

$$\text{Rappelons que } \begin{cases} L_1(u(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t) dt \\ L_2(u(t)) = p L_1(u(t)) \end{cases}$$

$$L_2^{-1}(e^{-\eta p}) = H(t-\eta)$$

$$L_1^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{s^2 + p^2}} e^{+(\eta+1)(p - \sqrt{p^2 + s^2})} \right] = J_0(s \sqrt{(t^2 + 2(\eta+1)t})^{1/2})$$

(cf. /11/ p. 192 (19))

$$\text{Si } L_1(f_1(t)) = g_1(p)$$

$$L_2(f_2(t)) = G_2(p)$$

$$\text{alors } L_2 \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = G_2(p) g_1(p) = G_1(p) g_2(p)$$

et donc, après quelques transformations, :

$$L_2^{-1} \left[e^{-\eta p} s \frac{1}{\sqrt{s^2 + p^2}} \exp \left[(\eta+1)(p - \sqrt{p^2 + s^2}) \right] \right] = s \int_0^t J_0(s \sqrt{(\tau+\eta+1)^2 - (\eta+1)^2}) H(t-\tau-\eta) d\tau = \psi_1(t) \quad (\text{A5.16})$$

et d'après A5.15 :

$$\psi_0(t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{\lambda^2}{4a^2 t} \right] s \int_0^\lambda J_0(s \sqrt{(\tau+\eta+1)^2 - (\eta+1)^2}) H(\lambda-\tau-\eta) d\tau d\lambda$$

On change l'ordre d'intégration, on fait le changement de variable $\lambda - \tau = \theta$ puis $u = \frac{\tau + \theta}{2a\sqrt{\tau}}$ dans l'intégrale interne.

$$\Rightarrow \psi_0(t) = s \int_0^\infty J_0 \left(s \sqrt{(\tau+n+1)^2 - (n+1)^2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{n+\tau}{2a\sqrt{\tau}} \right) d\tau$$

Ensuite, on pose $u = \left((\tau+n+1)^2 - (n+1)^2 \right)^{1/2}$

$$\Rightarrow \psi_0(t) = s \int_0^\infty \frac{u J_0(su)}{\sqrt{u^2 + (n+1)^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{u^2 + (n+1)^2} - 1}{2a\sqrt{\tau}} \right) du \quad (\text{A5.17})$$

Puisque $v_0(\xi, n, p) = \int_0^\infty F_0(s, p) J_0(\xi s) ds$

et que $F_0(s, p) = L(\psi_0(t))$ et $v_0 = L(u_0)$, et puisqu'on peut permuter les transformations de LAPLACE et de HANKEL, on a :

$$u_0(\xi, n, \tau) = \int_0^\infty \psi_0(s, \tau) J_0(\xi s) ds$$

$$\text{soit } u_0(\xi, n, \tau) = \int_0^\infty s J_0(\xi s) \int_0^\infty \frac{u J_0(su)}{\sqrt{u^2 + (n+1)^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{u^2 + (n+1)^2} - 1}{2a\sqrt{\tau}} \right) du$$

Cette intégrale équivaut à l'application de HANKEL double et donc :

$$u_0(\xi, n, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + (n+1)^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + (n+1)^2} - 1}{2a\sqrt{\tau}} \right) \quad (\text{A5.18})$$

qui constitue le premier terme du développement A5.6.

Calculons $u_1(\xi, n, \tau)$. Pour cela, on introduit l'expression de $f_0(s, p)$ dans celle de $\phi_1(s, p)$ donnée par A5.13b.

$$\phi_1(s, p) = \exp \left(\sqrt{\frac{p}{a^2}} - \sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} \right) \int_0^s \frac{\lambda (\lambda^2 + p/a^2)}{\lambda^2 + p/a^2} d\lambda$$

L'intégration ci-dessus se fait facilement (en posant $u^2 = \lambda^2 + p/a^2$) et on obtient :

$$f_1(s, p) = - \frac{d\phi_1}{ds} = f_0(s, p) \left\{ \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) p \operatorname{Log} \frac{s^2 + p/a^2}{p/a^2} - \sqrt{s^2 + p/a^2} \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \frac{p}{\sqrt{s^2 + p/a^2}} \right\} \quad (\text{A5.19})$$

On pose $f_1(s,p) = f_{11}(s,p) + f_{12}(s,p) + f_{13}(s,p) + f_{14}(s,p)$
 avec $u_1(\xi, \eta, \tau) = \sum_{j=1}^4 u_{1j}(\xi, \eta, \tau)$ (A5.20)

et $v_{1j}(\xi, \eta, p) = \int_0^\infty f_{1j}(s,p) \exp\left[-\eta\sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}}\right] J_0(\xi s) ds$

$$f_{11}(s,p) = -\sqrt{s^2 + \frac{p}{a^2}} f_0(s,p)$$

$$f_{12}(s,p) = \frac{s^2}{2} f_0(s,p)$$

$$f_{13}(s,p) = - \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \frac{p}{\sqrt{s^2 + p/a^2}} f_0(s,p)$$

$$f_{14}(s,p) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) p \operatorname{Log} \frac{s^2 + p/a^2}{p/a^2} f_0(s,p)$$

Il est facile de vérifier que $u_{11}(\xi, \eta, \tau) = \frac{\partial}{\partial \eta} u_0(\xi, \eta, \tau)$ (A5.21a)

$$u_{12}(\xi, \eta, \tau) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) u_0(\xi, \eta, \tau)$$
 (A5.21b)

$$u_{13}(\xi, \eta, \tau) = - \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty u_0(\xi, y, \tau) dy$$
 (A5.21c)

Il reste à calculer u_{14}

$$f_{14}(s,p) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) p \operatorname{Log} \left(\frac{s^2 + p/a^2}{p/a^2} \right) f_0(s,p)$$

Or $\operatorname{Log} \left(\frac{s^2 + p/a^2}{p/a^2} \right) = L_1 \left(\frac{1 - e^{-a^2 s^2 t}}{t} \right)$ (cf. /11/ p. 251)

et donc :

$$F_{14}(s, \eta, p) = f_{14}(s,p) e^{-\eta\sqrt{s^2 + p/a^2}} = L_2 \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{1 - e^{-a^2 s^2 (t-\tau)}}{t - \tau} \right) F_0(s, \eta, \tau) d\tau$$

$$u_{14}(\xi, \eta, \tau) = \int_0^\infty J_0(\xi s) \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{1 - \exp(-a^2 s^2 (\tau-y))}{\tau - y} \right) F_0(s, \eta, y) dy ds$$
 (A5.21d)

$u_1(\xi, \eta, \tau)$ est obtenu par sommation sur les quatre termes $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$.

Pour $a^2=1$, il est facile de vérifier que les solutions u_0 et u_1 trouvées satisfont aux équations (A5.9) et (A5.10). Dans le cas où $a^2 \neq 1$, cette vérification est plus difficile.

2ème méthode

Cette fois, on part de la solution générale du schéma D donnée pour $a^2 = 1$ par l'expression A4.26 :

$$u(x, z, t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \exp(\alpha \rho) \frac{\partial^n}{\partial \rho^n} \left(\exp(-\alpha \rho) \operatorname{erfc} \frac{\rho}{2\sqrt{t}} \right) \exp(-\alpha s) \frac{s^n}{\rho} ds$$

avec $\rho^2 = (s + z)^2 + x^2$.

On pose encore $\xi = \frac{\alpha x}{n}$, $\eta = \frac{\alpha z}{n}$, $\tau = \frac{\alpha^2 t}{n^2}$ et de plus $\lambda = \frac{\alpha s}{n}$ $R^2 = (\eta + \lambda)^2 + \xi^2$

On a donc $\frac{\rho}{R} = \frac{n}{\alpha}$ et par conséquent :

$$u(\xi, \eta, \tau) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \exp n(R - \lambda) \frac{\partial^n}{\partial R^n} \left(\exp(-nR) \operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{\tau}} \right) \frac{\lambda^n}{R} d\lambda \quad (\text{A5.22})$$

Considérons l'expression $\frac{\partial^n}{\partial R^n} \left(\exp(-nR) \operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{\tau}} \right)$

$f(z) = \exp(-nz) \operatorname{erfc} \frac{z}{2\sqrt{\tau}}$ est une fonction analytique mono-valuée de z .

Or, d'après un théorème fondamental de l'analyse, si $f(z)$ est analytique pour $z < \rho_0$ donné, $f(z)$ est développable en série entière à rayon de convergence $\rho_1 \geq \rho_0$, à l'origine, c'est-à-dire qu'il existe une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ qui converge normalement vers $f(z)$ pour $z \leq r$, $\forall r < \rho_0$ et

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt \text{ où } \gamma \text{ est un contour bien orienté entourant le centre.}$$

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que

$$\left. \frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n} \right|_{z=0} = n! a_n = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt$$

Ici, on pose $z = t - R$. $f(t) = \sum_n a_n (t-R)^n$ est développable autour du point $t = R$ et on a :

conséquent : $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-R)^{n+1}} dt$ où γ est un contour entourant R , et par

$$\left. \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \right|_{t=R} = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-R)^{n+1}} dt$$

Le contour γ est n'importe quel contour entourant R et tel que l'intégrale double

$$\frac{n(-1)^n}{2i\pi} \int_0^\infty \exp(n(R-\lambda)) \frac{\lambda^n}{R} d\lambda \int_\gamma \exp(-n\zeta) \operatorname{erfc} \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \frac{d\zeta}{(\zeta - R)^{n+1}} \quad (\text{A5.23})$$

converge absolument vers u .

On va maintenant utiliser la méthode du Col. Rappelons-en rapidement le principe : soit $f(z)$ et $g(z)$ des fonctions analytiques dans ϕ un ouvert de \mathbb{C} , on considère :

$$I = \int_{L \subset \phi} \exp(n f(z)) g(z) dz$$

avec $f'(z_0) = 0$ pour $z = z_0 \in \phi$.

La plus grande partie de l'intégrale va provenir des endroits où $\operatorname{Re}(f(z))$ est maximum. L'idée consiste à déformer le contour L de façon à ce que la région où $\operatorname{Re}(f(z))$ est grand soit réduite à un espace minimum.

Posons $f(z) = u + iv$ avec $z = x + iy$.

A cause des conditions de CAUCHY, si $u(x,y)$ passe par un extremum, $v(x,y)$ passe également par cet extremum.

Développons $f(z)$ près de z_0 . $f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0) (z - z_0)^2$
avec $f''(z_0) = \rho e^{i\theta}$ $z - z_0 = s e^{i\phi}$

et donc $u \approx u(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \rho s^2 \cos(\theta + 2\phi)$

$v \approx v(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \rho s^2 \sin(\theta + 2\phi)$

Si u est maximum pour z_0 , la direction pour laquelle u va décroître le plus vite est donnée par $\cos(\theta + 2\phi) = -1$ et $v = v_0$ dans cette direction.

Le chemin de plus grande pente est donc à $v = \text{constante} = \operatorname{Im}(f(z))$ et ϕ est ainsi fixé. On déforme donc le contour originel de façon à suivre ce chemin, et on peut écrire :

$$I = \int_L \exp(n f(z)) g(z) dz = e^{n f(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n/2) \rho s^2} g(z) e^{i\phi} ds$$

A5.23 s'écrit (la vérification en est simple) :

$$u = \frac{n}{2i\pi} \int_0^\infty \exp(n(1 - \lambda + \text{Log } \lambda)) \frac{d\lambda}{R} \int_L \exp(n(R - \zeta - 1 - \log(r - \zeta))) \text{erfc} \frac{\zeta - d\zeta}{2\sqrt{\tau}(\zeta - R)} \quad (\text{A5.24})$$

Soit J l'intégrale interne sur ζ , J s'écrit $\int \exp(n f(\zeta)) g(\zeta) d\zeta$
avec $f(\zeta) = R - \zeta - 1 - \log(R - \zeta)$ maximum pour $\zeta_0 = R - 1$

$$f''(\zeta_0) = 1 \text{ et donc } f(\zeta) = f(\zeta_0) + \frac{1}{2} (\zeta - \zeta_0)^2$$

Posons $\zeta - \zeta_0 = s e^{i\phi}$

Alors, $u(\zeta) = u(\zeta_0) + \frac{1}{2} s^2 \cos 2\phi$

$$v(\zeta) = v(\zeta_0) + \frac{1}{2} s^2 \sin 2\phi$$

Le chemin de plus grande pente est donné par $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $\zeta - \zeta_0 = s e^{\pm \frac{i\pi}{2}} = \pm i s$ imaginaire pur.

On pose ensuite $\zeta = \zeta_0 + i s$ soit $\zeta = R - 1 + \frac{\rho}{\sqrt{n}} i$ avec $-n^\delta < \rho < n^\delta$ et $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Puisque $f^{(n)}(\zeta_0) = (n - 1)!$ et $f(\zeta_0) = 0$, on peut écrire que

$$f(\zeta) = -\frac{\rho^2}{2n} + \sum_{m=3}^\infty \left(\frac{\rho i}{\sqrt{n}} \right)^m \frac{1}{m}$$

et donc :

$$J = \int_{-n^\delta}^{n^\delta} i n^{-1/2} \exp \left(-\frac{\rho^2}{2} + n \sum_{m=3}^\infty \left(\frac{\rho i}{\sqrt{n}} \right)^m \frac{1}{m} \right) \text{erfc} \left(\frac{R - 1 + \rho i n^{-1/2}}{2\sqrt{\tau}} \right) \frac{d\rho}{\rho n^{-1/2} i - 1} \quad (\text{A5.25})$$

A partir de maintenant, nous ne donnons plus que les grandes lignes des calculs qui ne présentent pas de difficulté importante, mais sont relativement longs.

On considère l'expression :

$$j_1 = \text{erfc} \left(\frac{R - 1 + \rho i n^{-1/2}}{2\sqrt{\tau}} \right) \frac{1}{\rho i n^{-1/2} - 1}$$

On développe $\operatorname{erfc}(\cdot)$ en série de TAYLOR au voisinage de $\frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}$; on exprime $\frac{d^m \operatorname{erfc}(z)}{dz^m}$ en fonction des polynômes d'HERMITE $H_m(z)$; on tient compte de l'identité

$$\sum_{m=0}^{\infty} a^m \sum_{k=0}^{\infty} a^k b_k = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sum_{k=0}^n b_k \text{ pour } a < 1$$

et on obtient finalement :

$$j_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho n^{-1/2} i)^k \sum_{m=0}^k - \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial R^m} \operatorname{erfc} \left(\frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \right) \quad (A5.26)$$

Ensuite, on vérifie facilement que

$$j_2 = \exp \left[n \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(\rho n^{-1/2} i)^m}{m} \right] = \prod_{m=3}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho i)^{mk}}{m^k k!} n^{k \frac{-mk}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k/2} A_k(\rho) \quad (A5.27)$$

avec :

$A_k(\rho)$ polynôme de degré k en ρ .

On a donc finalement de A5.25, A5.26, A5.27 :

$$J \approx i n^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} n^{-j/2} \int_{-n\partial}^{n\partial} \exp \left(- \frac{\rho^2}{2} \right) \sum_{k=0}^j A_{j-k}(\rho) (\rho i)^k \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial R^m} \operatorname{erfc} \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} d\rho \quad (A5.28)$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on obtient la formule asymptotique :

$$J \approx i n^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} n^{-j/2} \sum_{k=0}^j \alpha_{jk}^* \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial R^m} \operatorname{erfc} \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \quad (A5.29)$$

$$\text{avec } \alpha_{jk}^* = \int_{-\infty}^{\infty} A_{j-k}(\rho) (\rho i)^k \exp \left(- \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho \quad (A5.30)$$

L'intégrand est de degré j et donc $\alpha_{jk}^* = 0$ pour j impair. On pose donc

$$\alpha_{2j,k}^* = \alpha_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \frac{\rho^2}{2} \right) A_{2j-k}(\rho) (\rho i)^k d\rho$$

$$J \approx i n^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} n^{-j} \sum_{k=0}^{2j} \alpha_{jk} \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial R^m} \operatorname{erfc} \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \quad (A5.31)$$

On introduit cette expression de J dans A5.24 et on obtient :

$$u = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} n^{-j} \sum_{k=0}^{2j} \sum_{m=0}^k \frac{\alpha_{jkm}}{m!} \int_0^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial R_0^m} \operatorname{erfc} \left(\frac{R_0-1}{2\sqrt{\tau}} \right) \frac{1}{R_0} \exp (n (1 - \lambda + \log \lambda)) d\lambda$$

avec $R_0 = (\lambda + \eta)^2 + \xi^2$

On applique à nouveau la méthode du col à l'intégrale sur λ soit j_m . Le point critique est cette fois $\lambda_0 = 1$ et on trouve que la direction critique est donnée par $\lambda - \lambda_0 = \pm s = \pm \frac{\rho}{\sqrt{n}}$.

En suivant une démarche similaire de la précédente, on trouve que :

$$j_m \approx n^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k/2} \sum_{s=0}^k \frac{1}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^m}{\partial R^m} \operatorname{erfc} \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \right) \int_{-n\delta}^{n\delta} \exp \left(-\frac{\rho^2}{2} \right) E_{k-s}(\rho) \rho^s ds \quad (A5.32)$$

où les $E_k(\rho)$ sont des polynômes d'ordre k et $R^2 = (1 + \eta)^2 + \xi^2$.

$$j_m \approx n^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k} \sum_{s=0}^{2k} \frac{1}{s!} f_{sm} \beta_{ks}$$

avec $\beta_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{\rho^2}{2} \right) \rho^s E_{2k-s}(\rho) d\rho$

$$f_{sm} = \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^m}{\partial R^m} \operatorname{erfc} \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \right)$$

Quelques développements supplémentaires (longs et fastidieux) permettent d'arriver finalement à

$$u \approx \sum_{j=0}^{\infty} u_j n^{-j}$$

avec $u_0 = \frac{1}{R} \operatorname{erfc} \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \quad (A5.33)$

et $u_1 = \frac{\partial}{\partial \eta} u_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R u_0) \quad (A5.34)$

qui correspondent respectivement à A5.18 et A5.21 pour $a^2 = 1$ car

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R u_0) - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) u_0$$