

MINISTÈRE DE L'INDUSTRIE, DU COMMERCE ET DE L'ARTISANAT

**BUREAU DE RECHERCHES GÉOLOGIQUES ET MINIÈRES**

**SERVICE GÉOLOGIQUE NATIONAL**

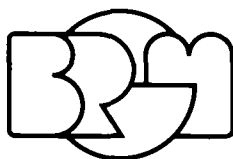
B.P. 6009 - 45018 Orléans Cédex - Tél. : (38) 63.80.01

**IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DU TRANSPORT  
HYDRODISPERSIF DANS LES AQUIFÈRES  
PAR INTERPRÉTATION DE TRAÇAGES EN ÉCOULEMENT  
CYLINDRIQUE CONVERGENT OU DIVERGENT**

par

J.-P. SAUTY

*Texte à paraître dans « Journal of Hydrology » en 1978*



**Département hydrogéologie**

B.P. 6009 - 45018 Orléans Cédex - Tél. : (38) 63.80.01

## R É S U M É

Les traçages en écoulement radial constituent une méthode économique pour l'obtention sur le terrain des paramètres de migration des substances dans les eaux souterraines, lorsqu'ils sont mis en oeuvre sur les sites de captage équipés d'un piézomètre.

Leur interprétation pose cependant quelques difficultés car il n'existe pas de solution analytique exacte pratiquement utilisable et qui permettrait de calculer les courbes de restitution à des traçages par injection continue ou instantanée en écoulement radial convergent (pompage dans le puits central avec injection dans le piézomètre satellite) ou divergent (injection centrale).

Le présent article indique une méthode simple de calcul par différences finies affranchie de la dispersion numérique, phénomène parasite affectant habituellement ces méthodes. Il est montré, par la prise en compte de concentrations moyennes sur des cercles concentriques, que la dispersion physique transversale est sans effet dans le schéma hydrodispersif pur sur les concentrations mesurées dans le puits central (dans le cas du pompage central).

Un programme, élaboré sur ce principe, a permis, grâce à un choix approprié de variables adimensionnelles, d'établir un abaque universel pour chacun des deux types d'injection et d'écoulement.

Il est montré que, dans chaque cas, il existe une formule analytique approchée représentative de la courbe de restitution tant que la vitesse de l'écoulement est suffisante (nombre de Péclet  $> 3$ ).

Des méthodes automatiques ou manuelles sont proposées pour appliquer ces résultats à l'identification des paramètres porosité cinématique et dispersivité.

Enfin, plusieurs exemples d'identification manuelle à l'aide de ces abaques sont donnés dans le cas de traçage en aquifère monocouche et même stratifié en deux couches.

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre des études méthodologiques du département Hydrogéologie.

## S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
1. INTRODUCTION	1
2. MISE EN EQUATION DES TRANSFERTS EN ECOULEMENT RADIAL	3
PHYSIQUE DES TRANSFERTS	3
EQUATION GENERALE	3
PARAMETRES INTRINSEQUES	4
EQUATION DANS LE CAS DE L'ECOULEMENT CYLINDRIQUE	5
INTEGRATION ANALYTIQUE	6
3. INTEGRATION DES EQUATIONS PAR VOIE NUMERIQUE	7
LES METHODES USUELLES	7
LA DISPERSION NUMERIQUE	8
DISCRETISATION RETENUE	10
PRECISION DES CALCULS	11
PROGRAMMATION ET CONTROLE DES RESULTATS	11
4. ABAQUES	13
CHOIX DES VARIABLES ADIMENSIONNELLES	13
PRESENTATION DES ABAQUES	15
INJECTION CONTINUE DANS UN ECOULEMENT DIVERGENT	15
INJECTION CONTINUE DANS UN ECOULEMENT CONVERGENT	18
IMPULSION DANS UN ECOULEMENT DIVERGENT	20
IMPULSION DANS UN ECOULEMENT CONVERGENT	22
CONCLUSION CONCERNANT LES FORMULES APPROCHEES	24



## 1. - INTRODUCTION

Les eaux souterraines constituent une ressource de qualité généralement supérieure à celle des eaux de surface grâce à la protection naturelle des couches de sol susjacentes et aux propriétés filtrantes des terrains. Cependant, l'accroissement des causes de pollution (rejets d'usines, excès d'engrais ou de pesticides, dépôts d'ordure, stockage souterrain de déchets, etc...) est tel que l'enfouissement de l'eau dans le sous-sol n'est plus un gage suffisant de pureté.

Après une période où l'hydrogéologie était principalement vouée à l'évaluation quantitative des ressources avec la création d'une méthodologie de mesures (piézométrie, essais de débit, ...) et d'outils de synthèse (modèles analogiques puis mathématiques), vient une époque où l'hydrogéologue doit de plus en plus fréquemment faire face aux problèmes pratiques posés par l'évolution de la qualité des eaux souterraines.

La migration des produits nocifs, matières organiques et sels dissous, entraînés par l'eau en mouvement, est régie par la convection, la dispersion (diffusion moléculaire et dispersion mécanique), par les échanges physiques avec le milieu et les réactions chimiques et biologiques. Les deux premiers phénomènes sont la cause du déplacement des produits dans les nappes ; les suivants sont plutôt un gage de destruction, ou au moins de retard, mais leur influence relative tend à s'atténuer avec l'accroissement des quantités de polluants déversées dans les aquifères.

Il est donc important au premier chef de prévoir la migration des contaminants dans les nappes par convection et dispersion. Si la connaissance théorique de ces phénomènes est bonne, avec l'existence d'outils de simulation opérationnels, les données de terrain sont peu nombreuses, et il est temps de développer et appliquer systématiquement une méthodologie de mesures sur le terrain peu coûteuse et simple d'emploi.

La plupart des captages importants sont équipés de piézomètres satellites mis en place pour la mesure des coefficients d'emmagasinement par essai de débit. Ils constituent un dispositif préexistant pour la mesure de la vitesse de transfert et de la dispersivité : ils permettent donc d'économiser le coût des forages.

La mesure est réalisée par traçage en écoulement radial convergent avec pompage dans le puits central et injection de traceur dans le piézomètre périphérique, ou bien en écoulement radial divergent avec injection du fluide moteur et du traceur dans le puits central et prélèvement pour mesures dans le piézomètre. L'interprétation de la courbe de restitution doit permettre d'identifier des paramètres intrinsèques de l'aquifère, c'est-à-dire encore valables pour des débits ou des conditions aux limites différents. Le traçage sera réalisé par injection de traceur à concentration constante, ou par injection brève.

L'interprétation de ce type de traçage présente cependant une difficulté car il n'existe pas de formule analytique exacte représentative des transferts hydrodispersifs en écoulement radial. Il est donc nécessaire de recourir à une intégration numérique des équations.

Le présent article montre entre autres comment il est possible d'établir des abaques universels par voie numérique et de les exploiter pour analyser les courbes de restitution obtenues par les deux procédés d'injection de traceur (continue ou instantanée) dans les deux types d'écoulement radial (convergent ou divergent).

## 2. - MISE EN EQUATION DES TRANSFERTS EN ECOULEMENT RADIAL

### PHYSIQUE DES TRANSFERTS

Rappelons brièvement les différents phénomènes régissant la migration d'un soluté dans les eaux en mouvement (cf. Fried et Combarous, 1971 - Sauty, 1975).

Convection : entraînement du polluant par le mouvement du fluide solvant.

Dispersion : en s'éloignant du lieu d'injection, la masse de soluté se dilue pour occuper un volume croissant avec une concentration corrélativement décroissante. Cet étalement de la courbe de concentration est dû :

- . au déplacement des molécules sous l'effet de la diffusion moléculaire,
- . à la dispersion cinématique : le temps de transfert d'une section à une autre est variable suivant les particules car, à l'échelle microscopique, les vitesses sont très fluctuantes et les trajectoires sont de longueur variable suivant les grains qu'elles doivent contourner.

Echanges : des échanges de soluté peuvent prendre place entre le liquide et les grains solides du milieu poreux sous l'effet des différences de concentration (adsorption, suivie de désorption en cas de réversibilité).

Des particules peuvent aussi être échangées entre l'eau en mouvement qui occupe un volume  $\omega V$  du volume total  $V$  (avec  $\omega$  porosité cinématique) et l'eau immobile qui occupe un volume  $(\phi - \omega)V$  (avec  $\phi$  porosité totale).

Réactions chimiques, minérales, organiques : Le milieu aquifère et les micro-organismes peuvent réagir sur les produits en solution. Il s'agit de phénomènes complexes dont la cinématique varie considérablement en fonction des constituants.

### EQUATION GENERALE

L'équation classique (cf. Bear, 1972) basée sur la loi de Fick et la loi de conservation de la masse de soluté, est :

$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \text{div} (\bar{D} \vec{\text{grad}} C) - \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} C - E$$

qui exprime le bilan du soluté dont les fluctuations de concentration sont dues à la dispersion (premier terme du second membre) à la convection (deuxième terme) et aux échanges (terme E).

Le but des traçages interprétés ici étant d'identifier les paramètres de convection et de dispersion, on s'arrangera pour que les échanges soient faibles ( $E = 0$ ) grâce à un traceur aussi parfait que possible. La diffusion moléculaire restera faible devant la dispersion cinématique, avec des vitesses telles que l'on se trouve dans la zone IV des courbes expérimentales de Pfannkuch (1953) (hypothèse usuelle de dispersion proportionnelle à la vitesse d'écoulement ; hypothèse de dispersivité géométrique de Scheidegger (1960)). Le terme de dispersion fonction du vecteur vitesse effective  $\vec{V}$ , s'écrit alors :

$$(2) \quad \bar{D} = \begin{vmatrix} \alpha_L & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_T \end{vmatrix} \cdot |\vec{V}|$$

avec  $\alpha_L$  dispersivité longitudinale et  $\alpha_T$  dispersivité transversale.

## PARAMETRES INTRINSEQUES

### Porosité cinématique

Dans une section  $\Delta S$  du milieu aquifère saturé en eau, la portion  $(1-\phi)\Delta S$  est occupée par la matrice solide ; mais, sur la portion restante  $\phi\Delta S$ , seule la section d'aire  $\omega\Delta S$  est traversée par de l'eau en mouvement :  $\omega$ , porosité cinématique  $< \phi$ , porosité totale.

En effet, certains pores en cul de sac (théorie de Coats) contiennent de l'eau immobile ; d'autre part, au voisinage immédiat des grains, une pellicule d'eau immobile, ou du moins fortement visqueuse, peut réduire considérablement la valeur de  $\omega$  dans les sols à texture fine.

La porosité cinématique  $\omega$  est donc le rapport entre section totale et la section traversée par de l'eau en mouvement ; par voie de conséquence, c'est aussi le quotient de la vitesse apparente de Darcy rapportée à la section totale par la vitesse effective de pore.

En première approximation, la porosité cinématique  $\omega$  est indépendante de la vitesse.

### Dispersivité

Les coefficients  $\alpha_L$  et  $\alpha_T$  de l'équation (2) varient peu avec la vitesse dans la plage des nombres de Reynolds correspondant aux écoulements habituels des nappes superficielles.

### Nombre de Péclet

C'est un nombre adimensionnel qui caractérise l'importance relative des transferts par convection par rapport aux transferts par dispersion : on le désignera par la lettre P. Par définition,  $P = \frac{u d}{D}$

$u$  est la vitesse de pore,

$D$  est le coefficient de dispersion longitudinale. Dans l'hypothèse retenue de proportionnalité à la vitesse,  $D = \alpha_L u = \alpha u$

$d$  est une dimension caractéristique. On prendra ici  $d=r$ , distance entre le piézomètre satellite et l'axe du puits central.

Donc,  $P = \frac{u d}{D} = \frac{r}{\alpha}$ , distance réduite.

Sur une trentaine de mesures effectuées avec des traceurs parfaits, sur des distances allant de la dizaine de mètres à plusieurs centaines, le nombre de Péclet a toujours été identifié entre 1 et 100, avec une fréquence maximale au voisinage des valeurs 10 à 20.

N.B. : Originellement, le nombre de Péclet a été défini pour l'étude des transferts de chaleur : la variable  $D$  représente alors la diffusivité thermique (rapport conductivité/capacité calorifique). Son utilisation a été étendue aux transferts par diffusion moléculaire, puis aux transferts par dispersion en milieux poreux :  $D$  est le coefficient de dispersion et  $d$  une longueur caractéristique du milieu (par exemple, taille des grains ou diamètre moyen des pores). Le nombre  $P$  défini dans la présente étude est une extension de cette notion. Il caractérise la nappe munie de son dispositif d'observation ( $D$  est lié à l'aquifère,  $u$  à la vitesse de la nappe et  $d$  la distance de mesure).

### Paramètres intrinsèques

Les coefficients  $\alpha$  et  $\omega$  sont alors des paramètres intrinsèques qu'il est possible de mesurer dans certaines conditions d'écoulement de la nappe (notamment écoulement radial vers un forage en exploitation), et dont il est possible de conserver les valeurs pour prédire le comportement hydrodispersif d'un soluté dans d'autres conditions d'écoulement.



Il faut toutefois avoir présent à l'esprit que le coefficient  $\alpha$  rend compte des hétérogénéités et que sa valeur moyenne croît également avec la distance sur laquelle il est mesuré puisque l'on intègre alors des hétérogénéités à des échelles croissantes.

Si l'on désire s'assurer de la précision obtenue sur les paramètres  $\alpha$  et  $\omega$ , il convient de réaliser des mesures à des distances et des débits variables.

Par ailleurs, le traceur retenu doit être aussi "parfait" que possible, c'est-à-dire peu sujet aux échanges et réactions chimiques. L'étude réalisée en 1975-1976 par le BRGM\* et le CENG\* a permis de mettre en évidence des produits plus facilement utilisables que d'autres réputés parfaits, tout en donnant des courbes de réponse comparables (Gaillard et al., 1976).

### EQUATION DANS LE CAS DE L'ÉCOULEMENT CYLINDRIQUE

Dans le cas de l'écoulement radial vers un puits dans une nappe de puissance constante et de perméabilité statistiquement homogène, l'équation (1) devient :

$$(3) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial r} + |u| \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha_L \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{|u|}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\alpha_T}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} \right)$$

Quand l'écoulement est radial divergent (injection dans le puits central), toutes les conditions étant symétriques, la concentration est indépendante de  $\theta$  et le troisième terme du second membre tombe.

Quand l'écoulement est radial convergent (pompage constant dans le puits central et injection dans le piézomètre satellite d'une quantité de traceur suffisamment faible pour ne pas détruire la symétrie axiale de l'écoulement), le traceur va se disperser latéralement, mais les particules de traceur passées dans un tube voisin vont se trouver entraînées vers le puits d'exhaure dans les mêmes conditions: la dispersion transversale n'apporte pas de retard à la date d'arrivée au puits central. Ce fait peut être facilement mis en évidence sur l'équation (3) à l'aide du changement de variable :  $\bar{C}(r,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(r,\theta,t) d\theta$

qui représente la concentration moyenne à la distance  $r$  du puits. À la distance  $r_p$  du centre, correspondant à la position du piézomètre d'injection, cette concentration est donnée par le rapport du flux massique injecté au débit total pompé.

Si l'on fait agir l'opérateur  $X = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot d\theta$  sur les différents termes de l'équation (3), on constate que :

$$X \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} ,$$

$$X \cdot u \frac{\partial C}{\partial r} = u \frac{\partial \bar{C}}{\partial r} ,$$

$$X \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha_L \frac{\partial C}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \alpha_L \frac{\partial \bar{C}}{\partial r} ,$$

en vertu de la règle de Leibniz, ou dérivation sous le signe somme.

$$X \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\alpha_T}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\alpha_T}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) \cdot d\theta$$

---

\* BRGM : Bureau de Recherches Géologiques et Minières  
CENG : Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble

Or,  $C$  est une fonction non multiforme de  $\theta$  ; c'est-à-dire  $C(\theta) = C(\theta+2\pi)$   
 De même,  $\int \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\alpha_T |u|}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) d\theta$  n'est pas multiforme.

$$\text{Donc} \quad \left[ \int \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\alpha_T |u|}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} d\theta \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Dans ces conditions, l'équation (3) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = -u \frac{\partial \bar{C}}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha_L \frac{\partial \bar{C}}{\partial r} \right)$$

ou encore, en écoulement radial, avec  $\alpha_L$  uniforme :

$$(4) \quad \boxed{\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = -\frac{A}{r} \frac{\partial \bar{C}}{\partial r} + \alpha_L \frac{|A|}{r} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial r^2}}$$

avec :

$$A = \frac{Q}{2\pi h \omega}$$

$Q$  = débit du puits central ( $> 0$  s'il est injecté : écoulement divergent,  
 $< 0$  en pompage : écoulement convergent)

$h$  = épaisseur aquifère

$\omega$  = porosité cinématique

$\alpha$  dispersivité longitudinale.

N.B. : L'utilisation de la fonction  $\bar{C}$  est aussi valable en écoulement divergent : les conditions aux limites étant symétriques,  $C(r, \theta) = \bar{C} \forall \theta$ .

N.B. : Le fait que la dispersion transversale disparaisse lorsque l'on considère la courbe de restitution dans l'eau prélevée dans le puits central ne doit pas surprendre. On a recours au même raisonnement lorsqu'on injecte le traceur sur une portion seulement de l'épaisseur aquifère, et que l'on considère ensuite la concentration moyenne obtenue en rapportant la masse injectée au débit total circulant dans l'aquifère.

### INTEGRATION ANALYTIQUE

L'intégration analytique a été développée pour la migration d'un traceur injecté de façon continue sous concentration constante dans un écoulement divergent. Ogata (1958) en donne la solution exacte, mais son expression nécessite l'intégration d'une fraction rationnelle de fonctions de Bessel de première et deuxième espèce. Le calcul numérique de cette fonction est extrêmement complexe et la méthode de résolution doit être recherchée ailleurs.

Raimondi et al. (1959) en donnent la solution approchée suivante :

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \frac{r^2/2 - \bar{r}^2/2}{\sqrt{\frac{4}{3} \frac{\alpha r^2}{\alpha r^2}}}$$

Lau et al. (1959) présentent une autre solution approchée :

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \frac{r - \bar{r}}{\sqrt{\frac{4}{3} \alpha \bar{r}}}$$

avec  $\bar{r}$  rayon du front convectif pur à l'instant  $t$   
 $\bar{r} = \sqrt{2} \frac{Q}{A} t$   
 et  $A = \frac{Q}{2\pi h \omega}$

Ces solutions ne sont qu'approchées et ne traitent qu'un seul des cas qui nous intéressent. Elles seront d'ailleurs vues plus en détail au paragraphe 4.

Pour résoudre le problème de l'écoulement convergent ou de l'injection instantanée, le recours à une voie numérique est apparu nécessaire.

### 3. - INTEGRATION DES EQUATIONS PAR VOIE NUMERIQUE

#### LES METHODES USUELLES

A l'intégration des transferts en écoulement radial, les trois méthodes principales : différences finies, caractéristiques, Galerkin.

#### Différences finies

La méthode la plus simple consiste à discrétiser le temps en pas  $\Delta t$  constants et l'axe des rayons en pas  $\Delta r$  constants. Cette méthode, utilisée dès 1958 par Ogata, puis en 1965 par Hoopes et Harleman, pose des problèmes de convergence, de stabilité, et introduit un terme parasite de dispersion numérique. Des schémas plus complexes permettent d'atténuer ces difficultés: Stone et Brian (1963) ; Shamir et Harleman (1966), sans toutefois les éliminer totalement, et ce notamment aux faibles dispersivités, car la réduction de la dispersion numérique introduit des oscillations.

#### Méthode des caractéristiques

Cette méthode, mise en oeuvre par Gardner, Peaceman et Pozzi (1964) puis par Pinder et Cooper (1970) et par Konikow et Bredehoeft (1974) a été reprise par Oakes et Edworthy (1976) pour l'écoulement radial.

Au sein d'un maillage établi pour les différences finies, on répartit un certain nombre de particules dans chaque cellule ("particles in cell method"). Les échanges par dispersion et diffusion sont calculés par différences finies entre les cellules. Par contre, les échanges par convection sont calculés en laissant chaque particule se déplacer sur sa ligne de courant. A l'issue de chaque pas de temps, on affecte aux cellules la concentration résultant de la moyenne des concentrations des particules qu'elles contiennent. Cette méthode élimine la dispersion numérique à condition de prendre un grand nombre de particules. Elle conduit alors à des temps importants de passage sur ordinateur, auxquels s'ajoute la complexité de conception et de réalisation du programme.

### Méthode de Galerkin

Les méthodes variationnelles, appliquées dès 1968 aux transferts de masse par Price et al., puis principalement par Pinder (1973), consistent (cf. Neuman et Witherspoon (1973)) à remplacer les équations aux dérivées partielles par deux systèmes d'équations intégrales approchées. Les fonctions potentiel hydraulique et concentration sont alors décomposées sur un système de fonctions orthogonales relatives à chaque élément qui résulte de la discrétisation du domaine. Ces fonctions sont déterminées par la géométrie des éléments, le degré de précision désiré et les conditions aux limites. Les éléments couramment utilisés sont triangulaires (Pickens et Lennox, 1976) ou des quadrilatères curvilignes dits éléments isoparamétriques (Pinder, 1973 ; Segol et al., 1975).

Mais, là aussi, la méthode est complexe, et on a des difficultés à éliminer la dispersion numérique sans créer d'instabilité, quand le coefficient de dispersion devient faible.

### Conclusions sur ces méthodes

Les deux dernières méthodes citées fournissent des résultats satisfaisants quand le nombre de Péclet n'est pas trop élevé, mais au prix d'une programmation complexe et d'un code généré volumineux.

L'analyse de la dispersion numérique dans le cas d'une formulation par différences finies montre la voie d'une méthode de résolution simple et parfaitement adaptée aux simulations prenant en compte les valeurs de dispersivité usuellement rencontrées dans les aquifères superficiels.

### LA DISPERSION NUMERIQUE

La discrétisation de l'équation (4) par différences finies à pas d'espace  $\Delta r$  et de temps  $\Delta t$  constants s'écrit :

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha |A|}{r} \frac{\check{C}_{i-1} - 2\check{C}_i + \check{C}_{i+1}}{\Delta r^2} - \frac{A(1-\lambda)}{r} \frac{\check{C}_{i+1} + (2\lambda-1)\check{C}_i - \lambda\check{C}_{i-1}}{\Delta r}$$

avec :

$$C_i^n = C(i\Delta r, n\Delta t)$$

$$\check{C}_i = (1-\theta_1) C_i^n + \theta_1 C_i^{n+1}$$

$$\check{C}_i = (1-\theta_2) C_i^n + \theta_2 C_i^{n+1}$$

$$\theta_1 = \text{coefficient de pondération implicite-explicite pour le terme dispersif} \\ 0 \leq \theta_1 \leq 1$$

$$\theta_2 = \text{coefficient de pondération implicite-explicite pour le terme convectif} \\ 0 \leq \theta_2 \leq 1$$

$$\lambda = \text{coefficient de pondération amont-aval pour le terme convectif} \\ 0 \leq \lambda \leq 1$$

Si l'on développe les divers  $C_i^n$  en séries de Taylor limitées au second ordre, puis si l'on remplace les dérivées secondes par rapport à  $t$  en dérivées par rapport à  $r$  (selon les méthodes de Lantz (1971) on fait apparaître, pour les nombres de Péclet suffisamment élevés, le terme suivant en facteur de  $\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}$  :

$$\frac{A}{r} \left[ \alpha + (2\lambda - 1) \frac{\Delta r}{2} - \frac{A}{r} \frac{\Delta t}{2} \right] \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}$$

A la dispersion physique  $\frac{\alpha A}{r}$ , s'ajoute donc un terme parasite :

$$\frac{A}{r} \left[ (2\lambda - 1) \frac{\Delta r}{2} - \frac{A}{r} \frac{\Delta t}{2} \right]$$

Par ailleurs, un autre terme parasite apparaît en dérivée croisée :

$$- \theta_2 \Delta t \frac{A}{r} \frac{\partial^2 C}{\partial r \partial t}$$

On peut en tirer la stratégie suivante :

- a-  $\theta_1$  n'intervient pas dans ces termes parasites. On peut retenir la valeur  $\theta_1 = 1$  pour répondre à des critères de stabilité : le terme dispersif est alors implicite.
- b- Pour supprimer le facteur de  $\frac{\partial^2 C}{\partial r \partial t}$ , on choisit  $\theta_2 = 0$  ; donc terme convectif explicite.
- c- Pour éliminer la première partie de la dispersion parasite, on pourrait choisir  $\lambda = \frac{1}{2}$ , mais le second terme  $-\frac{A}{r} \cdot \frac{\Delta t}{2}$  ne pourrait être éliminé.
- d- Par contre, si l'on choisit un découpage tel que  $\Delta t = \frac{r(2\lambda - 1)}{A} \Delta r$ , les deux termes se détruisent.
- e- Pour permettre un pas de temps  $\Delta t$  aussi grand que possible, on a retenu  $\lambda = 1$  d'où  $\Delta t = \frac{r \Delta r}{A}$
- f- Le pas de temps est imposé par le maillage spatial.

### DISCRETISATION RETENUE

Le découpage spatial n'est plus uniforme :

$$(5) \quad \Delta r = A \frac{\Delta t}{r}$$

On définit N mailles indicées par  $i$ , avec :

$i=1$  : maille centrée sur la périphérie du puits central de rayon  $r_1=r_{\min}$

$i=N$  : maille centrée sur le piézomètre satellite à la distance  $r_N=r_{\max}$  de l'axe du puits central

La condition (5) peut s'écrire :

$$r_{i+1} = \sqrt{r_{i-1}^2 + 2 A \Delta t}$$

On prend la même loi de découpage pour les centres des mailles :

$$r_i = \sqrt{r_{i-1}^2 + 2 A \Delta t}$$

En faisant jouer la formule de récurrence sur les  $N-1$  intervalles séparant les  $N$  mailles :

$$r_{\max} = \sqrt{r_{\min}^2 + 2 (N-1) A \Delta t}$$

N.B. : Avec ce découpage, dans le cas de la convection pure (absence de dispersion), chaque maille est exactement remplie au cours d'un pas de temps par le contenu de la maille située immédiatement en amont ; en effet, le volume d'eau contenu dans une maille est :

$$V = \pi w h \left( r_{i+1}^2 - r_{i-1}^2 \right)$$

$$V = 2\pi w h r \Delta r = \frac{Q}{A} r \Delta r$$

et d'après (5)

$$V = Q \Delta t$$

Ceci explique alors l'élimination de la dispersion numérique due au remplissage partiel de certaines mailles.

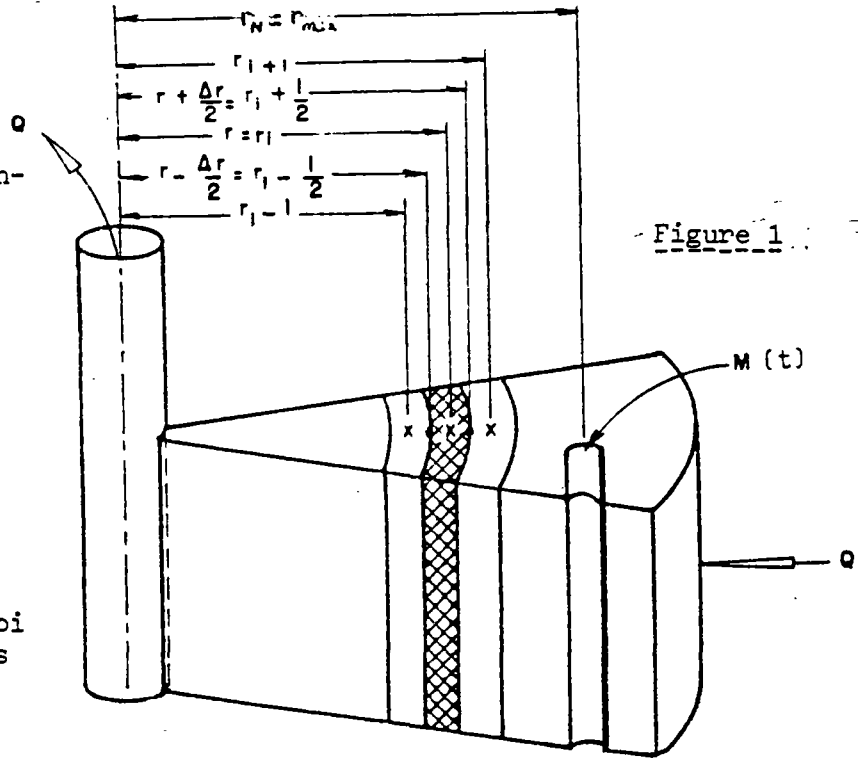


Figure 1

### PRECISION DES CALCULS

La discrétisation, choisie pour un calcul exact du terme de convection, conduit à utiliser des mailles de plus en plus étroites vers la périphérie. On peut s'attendre à des difficultés en provenance de l'intégration du terme dispersif.

Il est difficile de définir un critère de convergence, c'est pourquoi on se réfère au pas de temps de stabilité de la méthode explicite :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta r^2}{2D} = \frac{r \cdot \Delta r^2}{2\alpha A}$$

D'après (5), ceci peut être réécrit :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta r}{2\alpha} \Delta t$$

$$\frac{\Delta r}{\alpha} \geq 2$$

Ce critère laisse prévoir des difficultés de convergence aux faibles nombres de Péclet (forte dispersivité), d'abord pour les mailles périphériques (plus faible  $\Delta r$ ), et ce d'autant plus qu'on utilise un grand nombre de mailles car bien sûr  $\Delta r$  décroît corrélativement. Toutefois, la précision a été vérifiée empiriquement en faisant varier la dimension des pas d'espace et de temps, et elle s'est trouvée satisfaisante tant que  $P \geq 1$  (ce qui est le cas dans la pratique).

Contrairement aux méthodes classiques précédemment citées, cette méthode conduit à une simulation d'autant meilleure que le nombre de Péclet est élevé. Pour les valeurs de ce nombre les plus usuellement rencontrées dans les nappes (ordre de 10 à 100), les résultats sont excellents.

### PROGRAMMATION ET CONTRÔLE DES RESULTATS

Un programme a donc été bâti autour de la méthode décrite ci-dessus et que l'on pourrait appeler méthode des différences finies synchrones puisque le découpage de l'espace est choisi pour s'adapter exactement au déplacement convectif d'un front non dispersif.

Avec cette méthode, les centres des mailles sont répartis suivant une loi en  $\sqrt{r}$  ; le terme dispersif est implicite, le terme convectif est explicite et spatialement centré à l'amont.

Le programme RAMSES (simulation RADiale de la Migration d'un Soluté dans les Eaux Souterraines) permet de simuler les écoulements radiaux convergent ou divergent, avec une loi quelconque d'injection d'un soluté à l'amont.

Il a été utilisé pour dresser des abaques de réponse à des injections continues ou ponctuelles dans le temps, pour les deux sens d'écoulement. Auparavant, le programme a été testé par quelques calculs simples.

### Transfert d'un créneau

La figure 2 présente le transfert d'un créneau avec et sans dispersion. Dans le second cas, on constate l'absence de toute dispersion parasite.

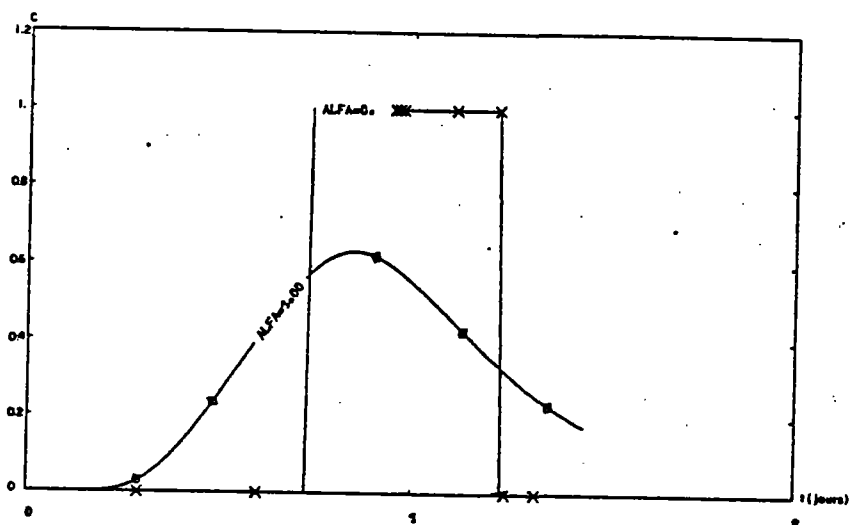


fig.2

PROGRAMME RAMSES ■ TEST NO 1 ■ CRENEAU ■ NON DISPERSE (ALFA=0) ■ DISPERSE (ALFA=1) ■

### Variation du nombre de mailles

Cinq simulations ont été réalisées successivement avec les mêmes paramètres physiques, mais en prenant des découpages différents : 64, 32, 16, 8 et 4. mailles (figure 3). Les résultats pour 32 et 64 mailles sont quasiment confondus. Avec 4 mailles seulement, les résultats sont encore extrêmement bons.

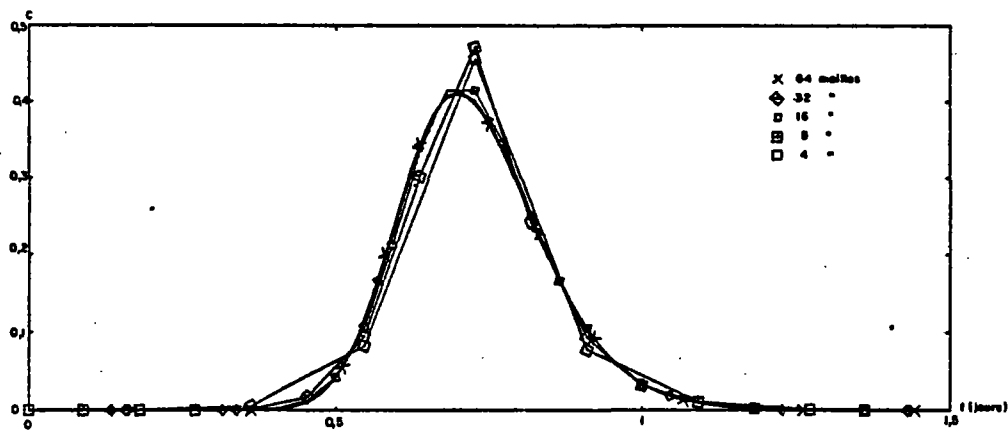


fig.3

RAMSES.....PRECISION DES RESULTATS EN FONCTION DU NOMBRE DE MAILLES(64,32,16,8,4)



### Comparaison aux solutions approchées de Raimondi et de Lau

Quelques tests ont montré l'excellente concordance avec ces solutions analytiques approchées dans leur domaine d'application. Une étude systématique (figures 5 et 6) en donne une vue synthétique.

#### 4. - ABAQUES

On verra que, moyennant le choix de variables adimensionnelles convenables, il est possible d'établir un abaque universel donnant la courbe de restitution au point de prélèvement pour des conditions simples d'injection du traceur. Quatre abaques ont pu être tracés qui correspondent à la combinaison des deux types d'écoulement (convergent et divergent) et des deux méthodes classiques d'introduction du traceur (continue et impulsion).

Il est montré que, malgré l'absence de solution analytique exacte, on peut mettre en évidence des formules analytiques approchées qui, dans chacun des quatre cas, restituent les courbes avec une bonne précision tant que le nombre de Péclet reste suffisamment élevé.

#### CHOIX DES VARIABLES ADIMENSIONNELLES

L'examen de l'équation différentielle (4) met en évidence la dépendance de la concentration  $C$  vis-à-vis des deux variables indépendantes  $r$  et  $t$ , et des trois paramètres  $\alpha$ ,  $A$  et  $\epsilon$  (ainsi que des conditions aux limites notées  $C_L$ )

$$C = C(r, t, \alpha, A, \epsilon, C_L) \text{ avec } \begin{cases} A = \frac{Q}{2 \pi h \omega} \\ \epsilon = \text{sgn}(Q) \quad \begin{array}{l} \epsilon = +1 : \text{divergent} \\ \epsilon = -1 : \text{convergent} \end{array} \\ C_L(t) = \text{concentration sur la limite amont} \end{cases}$$

#### Distance réduite

On choisit  $r_R = \frac{r}{\alpha}$  où  $\alpha$ , coefficient de dispersivité, a la dimension d'une longueur.

#### Temps réduit

La durée de référence a été prise égale au temps  $t_C$  de transfert du point d'injection à la distance  $r$  considérée, par convection pure :

$$t_C = \frac{\omega \pi r^2 h}{Q} = \frac{r^2}{2A}$$

D'où l'expression du temps réduit :

$$t_R = \frac{t}{t_C} = \frac{2 A t}{r^2}$$

#### Equation aux variables réduites

Le remplacement dans (4) de  $r$  et de  $t$  en fonction de  $r_R$  et  $t_R$  conduit à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(6) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial r_R^2} - \epsilon \frac{\partial C}{\partial r_R} - 4 \frac{t_R}{r_R} \frac{\partial^2 C}{\partial r_R \partial t_R} + \frac{2}{r_R} \left( 3 \frac{t_R}{r_R} + \epsilon t_R - 1 \right) \frac{\partial C}{\partial t_R} + 4 \frac{t_R^2}{r_R^2} \frac{\partial^2 C}{\partial t_R^2} = 0$$

Donc :

$$C = C(r_R, t_R, \varepsilon, C_L)$$

Seul subsiste le paramètre  $\varepsilon$  qui caractérise le sens de l'écoulement, ainsi, bien sûr, que les conditions d'injection.

N.B. : Traditionnellement, (Ogata, Raimondi, Lau ...), le temps réduit  $t_R$  est remplacé par la variable  $\zeta$  :

$$\zeta = \frac{|Q|}{2 \pi h \omega \alpha^2} t = \frac{|A|}{\alpha^2} t = \frac{1}{2} t_R (r_R)^2$$

Ce choix conduit à une équation aux variables réduites plus simple que (6) et plus propre à l'intégration analytique. Elle a cependant l'inconvénient de recourir à une échelle de temps qui dépend à la fois de  $\omega$  et de  $\alpha$ . Les abaques que l'on obtiendrait de cette façon seraient impropres à un ajustement manuel des paramètres. D'autre part, le temps réduit  $t_R$  a une signification analogue à celui que l'on utilise dans les modèles linéaires :  $\frac{v}{x} t$ .

#### Courbe de restitution

Lorsqu'on s'intéresse aux courbes de restitution, la position spatiale du point de prélèvement est fixée, et le rayon à prendre en compte est  $r_{\max}$ , distance entre points d'injection et d'observation.

Donc,  $r_R = \frac{r_{\max}}{\alpha}$  devient paramètre, et la seule variable indépendante est  $t_R$ .

#### Nombre de Péclet

La distance réduite  $r_R = \frac{r_{\max}}{\alpha} = \frac{u r_{\max}}{D}$  est alors le nombre de Péclet  $P$  défini au paragraphe 2.

#### Concentration réduite

L'amplitude des courbes est déterminée :

- par la concentration imposée en amont dans le cas d'une injection continue,
- par la masse injectée instantanément dans le cas d'une impulsion brève (pic de Dirac).

Dans le premier cas, le recours à la concentration réduite  $C_R = \frac{C}{C_0} = \frac{C}{C_{\max}}$  s'impose.

Dans le second cas, on pourrait normer les courbes de telle sorte que leur aire soit unitaire (réponse impulsionnelle) :

$$C_R = \frac{C}{\int_0^{\infty} C(t) dt}$$

Cependant, l'utilisation de cette norme est mal commode pour l'emploi des abaques, et peut rendre difficile l'interprétation de la courbe ; en effet :

- il faut alors commencer par planimétriser la courbe expérimentale avant de la tracer en coordonnées réduites. En effet, la masse restituée est toujours inférieure à la masse injectée car il y a un minimum d'échanges, et ce dans des proportions très variables.
- la valeur de l'aire calculée est fortement influencée par la queue de la courbe que l'on ne peut mesurer que partiellement (coût d'une longue manipulation) et qui généralement reflète des phénomènes tout autres que la dispersion (échanges notamment).

Les courbes ainsi normées permettront donc difficilement d'identifier la dispersivité ; c'est pourquoi, dans le cas d'une impulsion, on a aussi retenu la norme de l'amplitude du maximum observé :

$$C_R = \frac{C}{C_{\max}}$$

### PRESENTATION DES ABAQUES

Un abaque a été tracé pour chacun des quatre cas cités avec injection d'un échelon ou d'un pic de Dirac, dans un écoulement convergent ou divergent.

L'évolution de la concentration réduite en fonction du temps réduit (de 0 à 2,5) a été reportée pour différentes valeurs du nombre de Péclet : 1000, 300, 100, 30, 10, 3 et 1.

### INJECTION CONTINUE DANS UN ECOULEMENT DIVERGENT

Le puits central est soumis à une injection à débit et concentration constants. La figure 4 présente les courbes de restitution à différentes distances réduites  $\frac{r}{\alpha}$  du puits central.

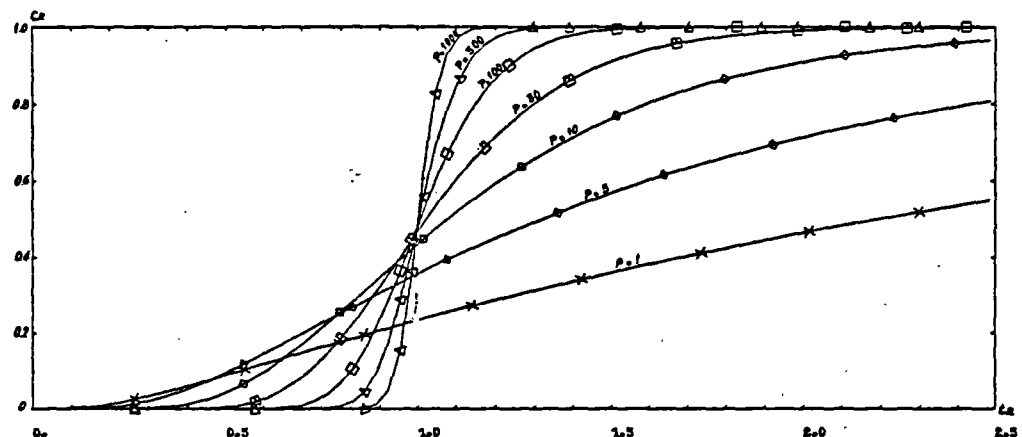


fig. 4

### Comparaison à la solution approchée de Raimondi

Cette solution, publiée par Raimondi et al, (1959) et citée au paragraphe 2, peut être transcrite en variables réduites sous la forme :

$$(7) \quad C_R = 0,5 \operatorname{Erfc} \left( \frac{\sqrt{3P}}{4} \frac{1-t_R}{t_R^{0,75}} \right)$$

L'approximation de Raimondi (Bear, 1972) obtenue en négligeant l'influence de la dispersion en un point comparée à l'effet cumulé de celle qu'il a subie auparavant n'est valable que pour les nombres de Péclet élevés.

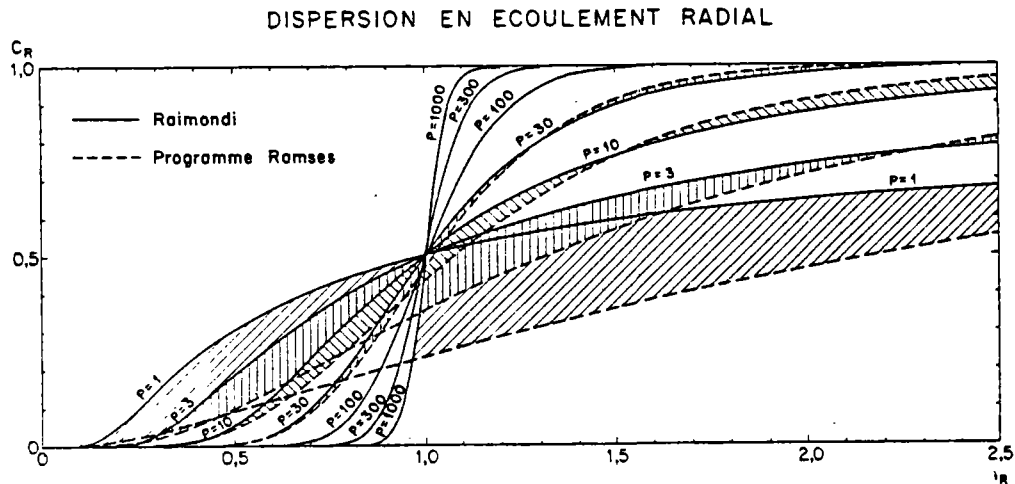


Fig. 5 - Injection continue en écoulement divergent  
(Approximation de Raimondi)

Les différences entre les courbes de restitution calculées par la solution de Raimondi et l'abaque de la figure 4 sont mises en évidence sur la figure 5 pour des nombres de Péclet de 1 à 1000.

On remarquera que les courbes de Raimondi passent toutes par le point central  $C_R = 0,5$  pour  $t_R = 1$ .

L'erreur très faible pour  $P \geq 100$  est encore tolérable pour  $P = 30$ , mais devient très forte quand  $P < 10$ .

### Comparaison à la solution approchée de Lau

Cette solution, publiée par Lau et al. (1959) et citée au paragraphe 2, peut être transcrite en variables réduites sous la forme :

$$(8) \quad C_R = 0,5 \operatorname{Erfc} \left[ \frac{\sqrt{3P}}{2} \frac{1 - \sqrt{t_R}}{t_R^{0,25}} \right]$$

Cette approximation obtenue (Bear 1972) en supposant que le traceur a une distribution normale, somme de deux effets indépendants et linéairement additifs (dispersion longitudinale et divergence des lignes de courant), n'est valable que pour les nombres de Péclet élevés.

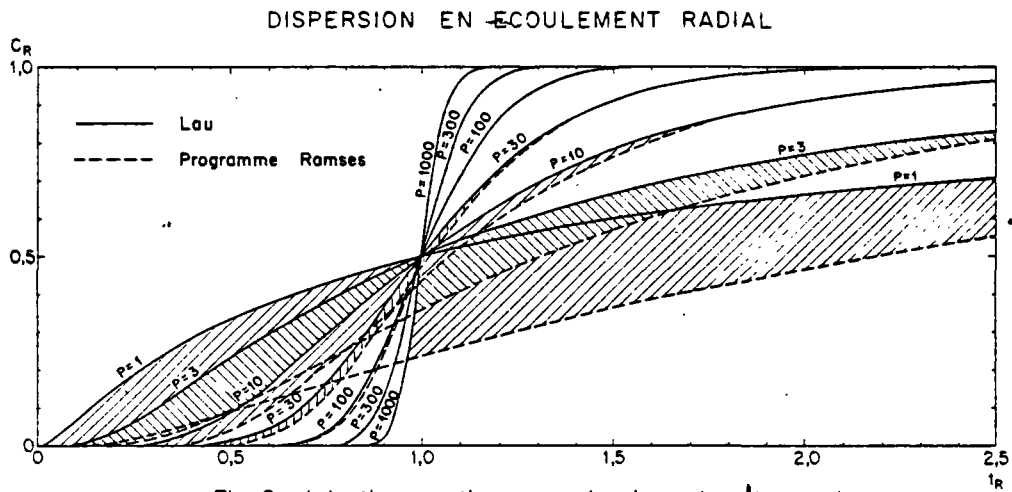


Fig. 6 - Injection continue en écoulement divergent  
(approximation de Lau)

Les différences entre les courbes de restitution calculées par la solution de Lau et l'abaque de la figure 4 sont mises en évidence sur la figure 6 pour des nombres de Péclet de 1 à 1000.

On remarque que là aussi toutes les courbes passent par le point central  $C_R = 0,5$  pour  $t_R = 1$ .

De même que pour la solution de Raimondi, l'erreur faible pour  $P \geq 100$  n'est plus acceptable pour  $P < 10$ .

La solution de Lau conduit à des écarts légèrement plus accentués pour  $t_R < 1$ .

Par contre, aux valeurs de  $t_R > 1$ , la solution de Lau est meilleure que celle de Raimondi.

### INJECTION CONTINUE DANS UN ECOULEMENT CONVERGENT

Le puits central est le siège d'un pompage à débit constant. Le traceur est injecté à débit massique constant dans le piézomètre satellite avec une surcharge suffisamment faible pour ne pas perturber la symétrie radiale de l'écoulement.

La figure 7 présente les courbes de restitution au puits central pour des injections à différentes distances réduites  $\frac{r}{a}$ .

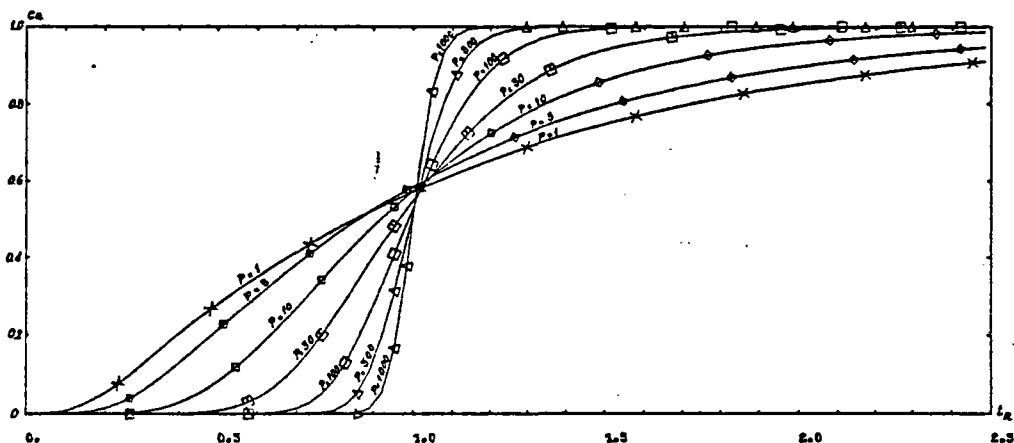


fig. 7

RAMSES \* ABAQUE POUR UNE INJECTION CONTINUE DANS UN ECOULEMENT CONVERGENT

### Comparaison entre échelons en écoulement convergent et divergent

La figure 8 met en évidence les écarts entre les courbes de réponse à une injection continue en écoulement divergent d'une part, et en écoulement convergent d'autre part pour des nombres de Péclet de 1000 à 10. Les écarts ne sont pas donnés pour  $P = 3$  et 1 car leur amplitude devient telle que les zones se recouvrent.

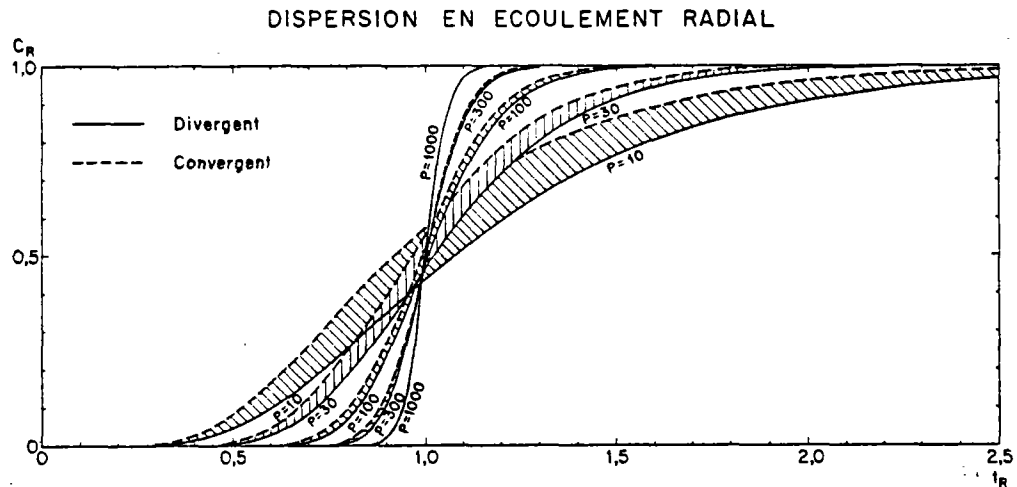


Fig.8 - Injection continue en écoulements convergent et divergent

On constate que la montée en concentration est systématiquement plus rapide en écoulement convergent qu'en écoulement divergent. En particulier, pour  $t_R = 1$ ,

$$\begin{cases} C_R > 0,5 & \text{en écoulement convergent} \\ C_R < 0,5 & \text{en écoulement divergent.} \end{cases}$$

Si les courbes sont confondues pour  $P \geq 300$ , elles sont nettement démarquées pour des valeurs inférieures.

### Comparaison entre échelon convergent et monodimensionnel uniforme

Les écarts entre la restitution d'une injection continue en écoulement radial convergent et en écoulement monodimensionnel uniforme (champ de vitesse uniforme et absence de dispersion transversale) sont mis en évidence par la figure 9.

La courbe de restitution a pour équation dans ce dernier cas (Ogata et Banks, 1961) :

$$(9) \quad C_R = 0,5 \left\{ \operatorname{Erfc} \frac{\sqrt{P} (1-t_R)}{2 \sqrt{t_R}} + \exp(P) \cdot \operatorname{Erfc} \frac{\sqrt{P} (1+t_R)}{2 \sqrt{t_R}} \right\}$$

## DISPERSION EN ECOULEMENT RADIAL

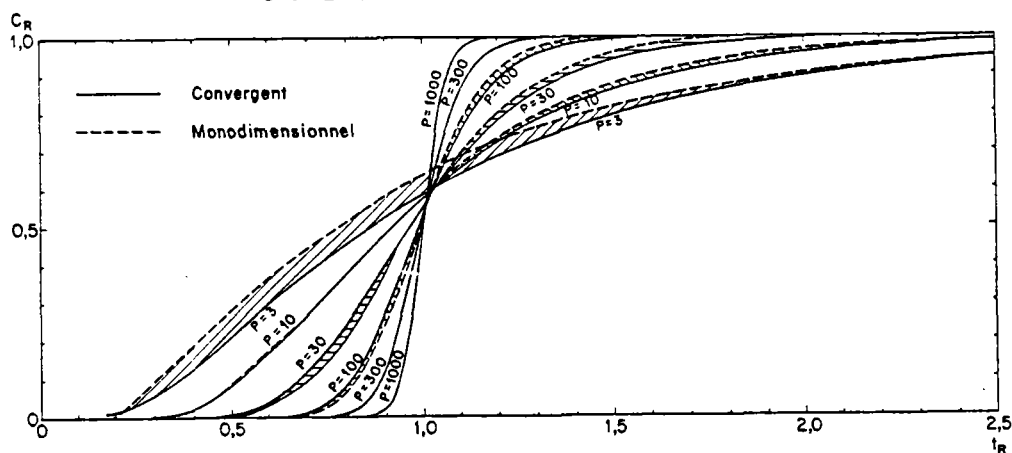


Fig. 9 - Injection continue en écoulement convergent comparaison avec écoulement monodimensionnel

On observe une très bonne concordance tant que  $P \geq 3$ . L'équation (9) donne une meilleure approximation de la réponse à l'échelon en écoulement convergent que les équations (7) Raimondi et (8) Lau pour le cas divergent.

### IMPULSION DANS UN ECOULEMENT DIVERGENT

Le puits central est le siège d'une injection à débit constant. A l'instant  $t = 0$ , on y introduit une masse  $m$  de traceur, solubilisé dans l'eau d'injection. La durée d'introduction du traceur doit être brève comparée au temps de transit de la substance jusqu'au piézomètre de prélèvement. Cette condition initiale d'injection instantanée peut alors être représentée par une fonction de Dirac.

L'abaque de la figure 10 fournit les courbes de restitution à différentes distances réduites  $\frac{r}{\alpha}$  du puits central.

Pour les raisons exposées précédemment (concentrations réduites), les courbes sont normées par l'amplitude du pic.

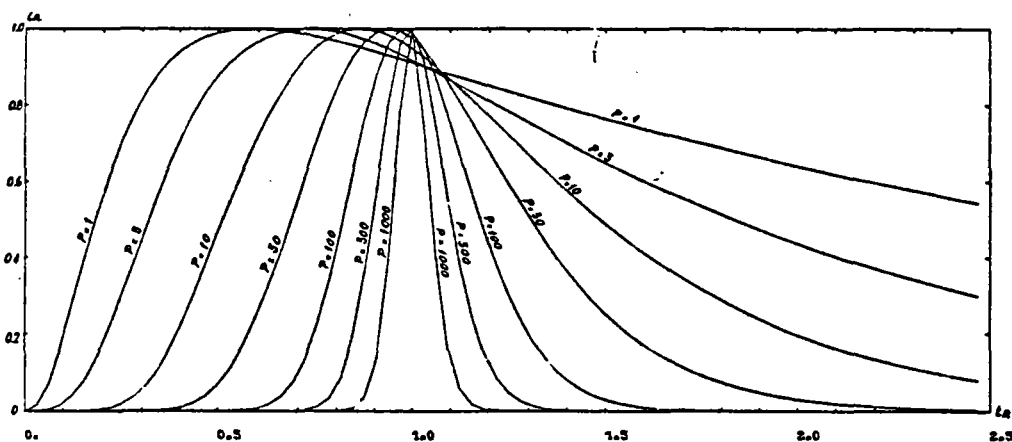


fig. 10



### Comparaison entre Dirac divergent et monodimensionnel uniforme

Les écarts entre les restitutions d'une injection instantanée en écoulement radial divergent et en écoulement monodimensionnel uniforme sont mis en évidence par la figure 11.

La courbe de restitution a pour équation dans ce dernier cas :

$$(10) \quad C_R = \frac{K}{\sqrt{t_R}} \exp \left( - \frac{P}{4t_R} (1-t_R)^2 \right)$$

avec :

$$K = \sqrt{t_{Rmax}} \cdot \exp \left( \frac{P}{4t_{Rmax}} (1-t_{Rmax})^2 \right)$$

$$\text{où } t_{Rmax} = \sqrt{1 + \left( \frac{1}{P} \right)^2} - \frac{1}{P}$$

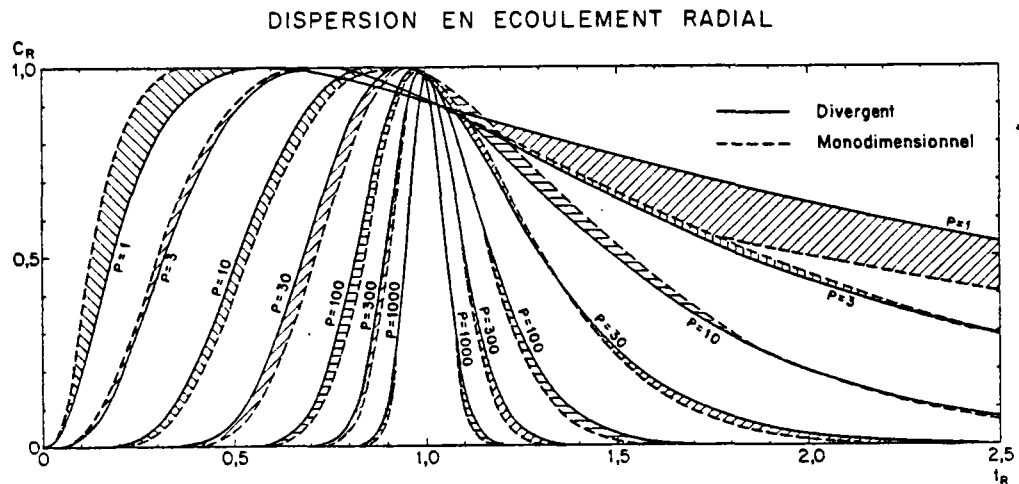


Fig. 11 - Impulsion breve en écoulement divergent comparaison avec écoulement monodimensionnel

On observe une excellente concordance tant que  $P > 1$ .

### IMPULSION DANS UN ÉCOULEMENT CONVERGENT

Le puits central est soumis à un pompage continu à débit constant. On introduit une masse  $m$  de traceur dans le piézomètre satellite. Cette masse passe rapidement dans l'écoulement qui ne doit pas être sensiblement perturbé par la surcharge nécessaire à l'injection du traceur.

La figure 12 présente les courbes de restitution au puits central pour des injections à différentes distances réduites  $\frac{r}{\alpha}$ .

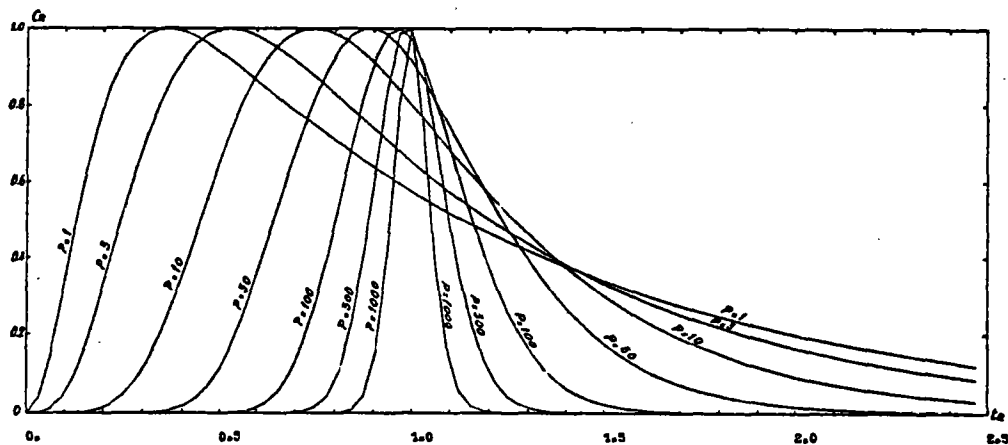


fig. 12

RAMSES ■ ABaque pour une injection instantanée dans un écoulement convergent

### Comparaison entre Dirac divergent et convergent

La figure 13 indique les écarts entre les courbes de restitution à une impulsion brève obtenues dans les deux types d'écoulement : divergent et convergent.

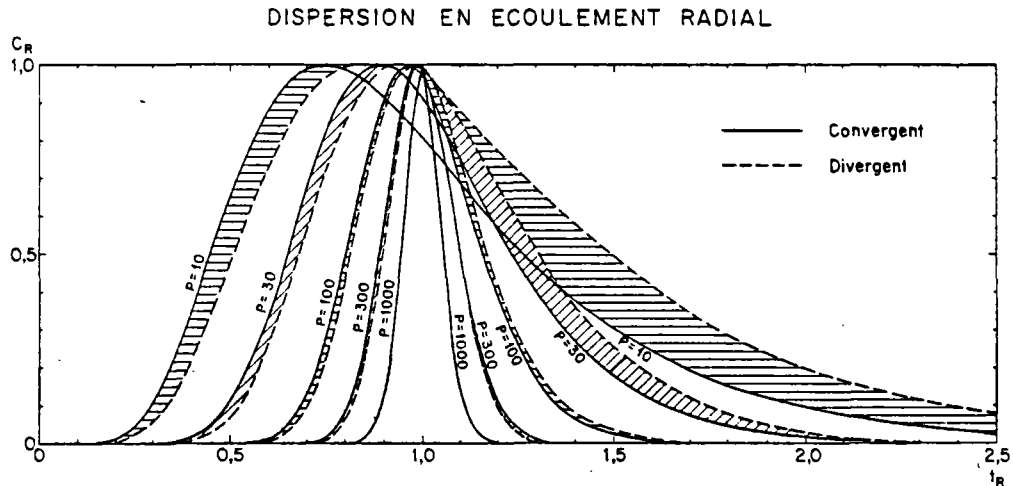


Fig. 13 - Impulsion brève en écoulements convergent et divergent

On observe une quasi-identité des courbes pour  $P > 100$ . Pour  $P \leq 100$ , les différences deviennent très importantes.

Dans tous les cas, les courbes de restitution en écoulement convergent montent plus tôt qu'en divergent, avec un pic décalé en avant dans le temps.

Comparaison entre Dirac convergent et dérivée de la réponse à un échelon en écoulement monodimensionnel uniforme

Les écarts entre la courbe de restitution à une injection brève en écoulement radial convergent et la dérivée de la réponse à une injection continue dans un écoulement monodimensionnel à vitesse uniforme sont rapportés figure 14.

La courbe de restitution s'obtient par dérivation de l'équation (9) par rapport à  $t_R$  :

$$(11) \quad C_R = \frac{K'}{t_R^{1,5}} \exp \left[ -\frac{P}{4t_R} (1-t_R)^2 \right]$$

avec :

$$K' = t_{Rmax}^{1,5} \exp \left[ \frac{P}{4t_{Rmax}} (1-t_{Rmax})^2 \right]$$

$$\text{où } t_{Rmax} = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{P}\right)^2} - \frac{3}{P}$$

Une formulation équivalente a été proposée par Lenda et Zuber (1979):

N.B. : Il est courant de confondre dérivée de la réponse à l'échelon et réponse à une impulsion de Dirac, parce que l'impulsion de Dirac est la dérivée de l'échelon unité. Or, les deux fonctions (10) et (11) ne correspondent pas aux mêmes conditions aux limites. Pour (10), il s'agit de la migration d'une masse constante de traceur, alors que pour l'équation (11), qui constitue le cas limite d'un créneau de surface donnée, dont l'écartement tendrait vers zéro, une concentration nulle est imposée en  $x = 0$  dès que  $t_R > 0$ , et la masse n'est plus conservatrice.

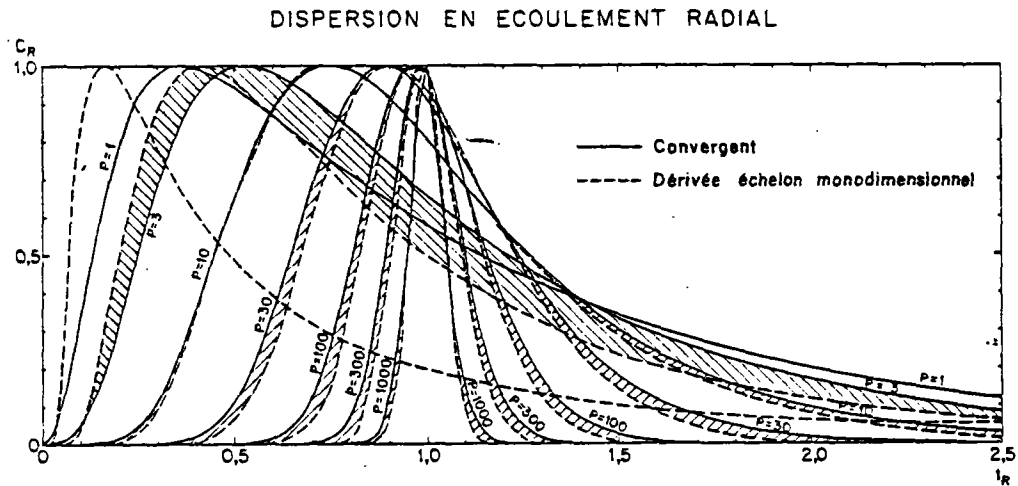


Fig. 14 - Impulsion brève en écoulement convergent comparaison avec la dérivée de la réponse à l'échelon en écoulement monodimensionnel

On observe une très bonne concordance tant que  $P > 3$ .

### CONCLUSION CONCERNANT LES FORMULES APPROCHEES

Dans les quatre cas étudiés, il a été montré que des formules analytiques pouvaient fournir une solution approchée à condition que le nombre de Péclet  $P$  soit suffisamment élevé. Les résultats sont synthétisés par la table II.

La figure 15 permet la comparaison des réponses à une impulsion dans les deux types d'écoulement et leurs solutions approchées, pour un nombre de Péclet égal à dix.

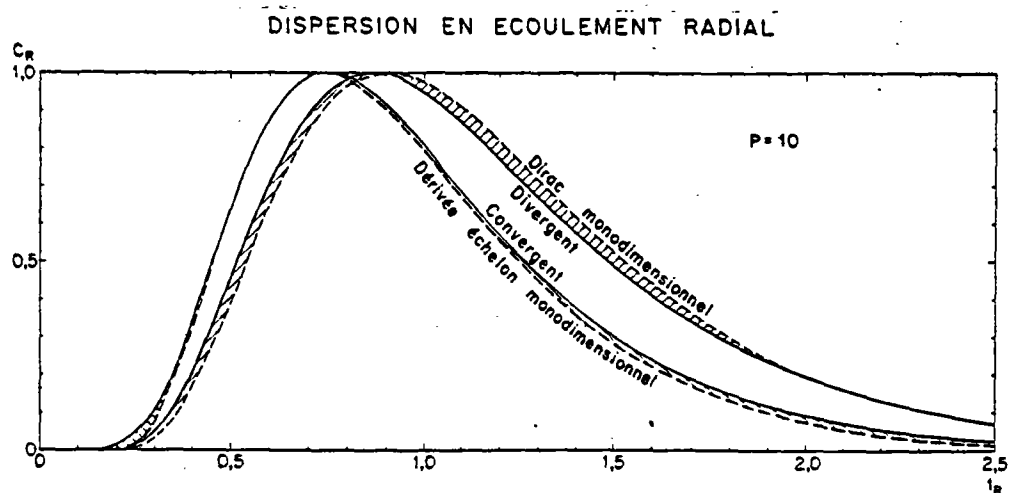


Fig. 15 - Comparaison entre écoulements divergent, convergent Dirac monodimensionnel et dérivée de l'échelon monodimensionnel

## 5. - INTERPRETATION DES COURBES DE RESTITUTION

L'interprétation des courbes de restitution dans l'hypothèse d'un schéma convectif-dispersif (ou encore Piston-Diffusion) consiste à ajuster les paramètres  $\omega$ , porosité cinématique et  $\alpha$ , dispersivité, de façon à ce que la courbe théorique correspondante soit aussi voisine que possible de la courbe observée.

### CONDITIONS D'APPLICATION DES ABAQUES

Les abaques ont été construits dans l'hypothèse d'un transfert purement hydrodispersif dans un aquifère homogène. En réalité, les courbes de restitution mesurées présentent une traînée ou queue plus ou moins accentuée (cf. figures 17 à 25) ; celle-ci peut être due aux phénomènes suivants :

- Echanges par adsorption-désorption avec la phase solide et réactions chimiques. Ces phénomènes peuvent être pratiquement éliminés par le choix d'un bon traceur (Gaillard et al., 1976 - Molinari et al., 1977).
- Echanges entre l'eau en mouvement et une phase d'eau immobile (Gaudet et Vachaud, 1977). L'effet de cette phase immobile est semblable à celui d'une mince couche parallèle dont la vitesse d'écoulement serait quasiment nulle (Brissaud et al., 1976).
- Aquifère de structure multistratée : si les échanges entre les différentes couches restent faibles, chacune conduit à une courbe de restitution de type piston-diffusion. La courbe observée dans l'ouvrage de prélèvement en constitue une combinaison fonction du flux capté dans chacune des couches.

Si les vitesses des différentes couches sont suffisamment différenciées, la première partie de la courbe (montée, pic et éventuellement début de descente) permet d'identifier les paramètres de la strate la plus rapide.

Le reliquat non expliqué par cette première interprétation pourra être interprété comme provenant de couches à vitesse moins rapide, véhiculant une fraction de l'écoulement radial très variable suivant les cas. L'exemple n° 1 met en évidence une structure bicouche bien caractérisée.

### Effets de l'écoulement régional

L'interprétation en écoulement à symétrie cylindrique n'est valable que si le piézomètre satellite est suffisamment proche du puits central pour que l'influence de l'écoulement naturel de la nappe n'y perturbe pas sensiblement la symétrie.

La dissymétrie créée par l'écoulement régional peut être calculée d'après Bear et Jacob (1965) ou Sauty et Thiery (1975) : le temps de transfert entre le forage central et deux points situés à la même distance  $r$  de part et d'autre de ce forage et sur l'axe de l'écoulement régional est :

$$t = \frac{\pi \omega h r^2}{Q} \left\{ 1 + \frac{2\pi}{3} \frac{h v_0}{Q} r \right\} \quad \text{pour le point en amont}$$

$$t = \frac{\pi \omega h r}{Q} \left\{ 1 - \frac{2\pi}{3} \frac{h v_0}{Q} r \right\} \quad \text{pour le point en aval.}$$

avec  $v_0$  vitesse de Darcy de l'écoulement naturel.

N.B. : Ce résultat obtenu par développement limité n'est valable qu'au voisinage du puits lorsque

$$r \ll \frac{Q}{2h v_0}$$

### INTERPRETATION AUTOMATIQUE

La méthode la plus usuelle pour interpréter les courbes en écoulement uniforme consiste à ajuster automatiquement les paramètres  $\alpha$  et  $w$  par minimisation d'une norme d'écart entre les points de mesure et la courbe théorique définie par son expression analytique exacte.

En fait, en écoulement radial, on ne dispose pas de telle expression analytique. On a le choix entre :

- interpréter à l'aide de la solution analytique approchée. Le résultat ne sera suffisamment précis que si le nombre de Péclet est au moins égal à 10.
- ou bien calculer les courbes théoriques pour des couples  $\alpha$  et  $w$  obtenus par interpolation dans un réseau de courbes calculées par voie numérique et stockées sur ordinateur sous forme discrète.

### INTERPRETATION MANUELLE

Une autre méthode d'interprétation consiste à ajuster manuellement en reportant la courbe mesurée sur un abaque.

La difficulté matérielle provient de la nécessité d'ajuster simultanément deux paramètres. En fait, le réseau de courbes est tel que l'on ne rencontre pas d'ambiguïté quant à l'ajustement d'un couple de paramètres ; de plus, l'indétermination sur les résultats reste de l'ordre de 10%. Ceci est nettement suffisant, compte tenu de la nature imprécise des phénomènes étudiés et des précautions à prendre pour en extrapoler les résultats.

L'interprétation manuelle a été appliquée à quelques tracés en écoulement radial convergent par injection brève.

#### Interprétation en coordonnées semi-logarithmiques

La méthode adoptée est la suivante :

- les concentrations mesurées sont normées par l'amplitude du pic :  

$$C_R = C/C_{\max}$$
- les points de mesures ( $C_R, t$ ) sont alors reportés sur un papier semi-logarithmique transparent (échelle logarithmique des temps).
- la courbe ainsi obtenue est comparée aux courbes de l'abaque de la figure 12bis (injection instantanée dans un écoulement convergent), qui est une transposition en coordonnées semi-logarithmiques de la figure 12.
- on obtient après translation suivant l'axe des temps, la coïncidence entre la courbe normée (ou au moins partie de celle-ci) et une des courbes de l'abaque.

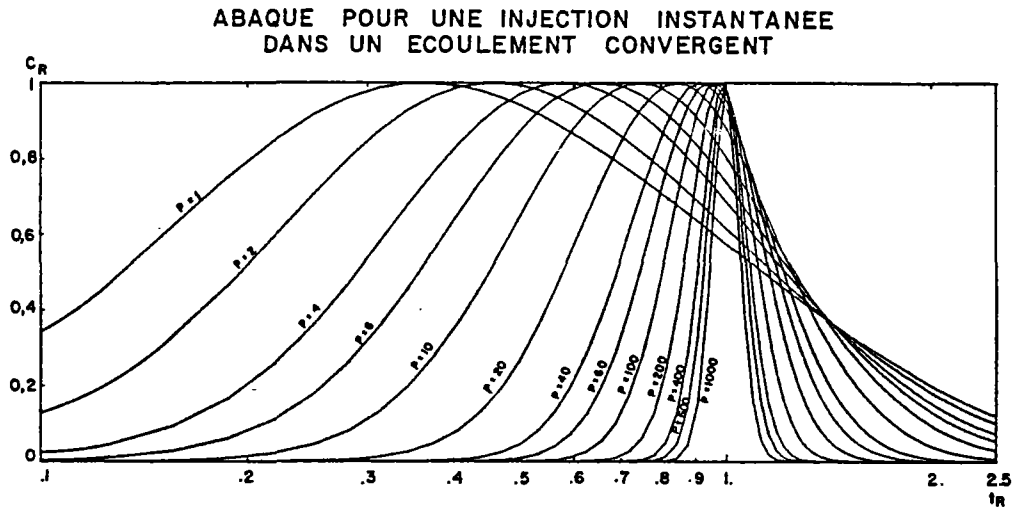


figure 12 bis

- le nombre de Péclet est celui de la courbe théorique en coïncidence.
- le temps de transfert par convection est le temps réel de la courbe mesurée, en correspondance avec le temps réduit  $t_R = 1$  sur la courbe théorique.
- connaissant le débit (Q), l'épaisseur aquifère (h) et la distance puits-piézomètre (r), on déduit directement la dispersivité  $\alpha$  à partir de P et la porosité cinématique  $w$  à partir de  $t_C$ .

#### Interprétation en coordonnées cartésiennes

Cette identification peut aussi être réalisée à l'aide de l'abaque de la figure 12, en conservant l'échelle cartésienne pour les temps. Dans ce cas, il est nécessaire de transposer les temps en variables réduites :  $t_R = t/t_C$ . Le paramètre  $t_C$  (fonction de la porosité cinématique) étant a priori inconnu, il convient de faire plusieurs estimations successives :

- si la valeur essayée pour  $t_C$  est trop faible, la montée de la courbe de restitution sera trop lente, comparée aux courbes voisines de l'abaque (fig. 16) ;
- si  $t_C$  est trop élevé, la montée de la courbe de restitution sera trop pentue ;
- en quelques essais, on trouve une valeur de  $t_C$  pour laquelle la courbe (au moins en sa partie ascendante) s'accorde avec le réseau de l'abaque ;
- il suffit alors de lire la valeur correspondante du nombre de Péclet par interpolation entre les courbes voisines.

Cette dernière méthode ayant l'avantage de mieux mettre en évidence la précision à attendre de l'identification, c'est en axes cartésiens que seront présentés les exemples d'application.

### EXEMPLE D'APPLICATION

On trouvera, ci-après, cinq exemples d'interprétation de courbes de restitution. Le traceur retenu pour ces expérimentations a été l'iodure de sodium pour lequel des études méthodologiques antérieures, réalisées dans des sols de nature comparable (Gaillard et al, 1976 ou Molinari et Peaudecerf, 1977) ont mis en évidence un comportement très voisin du tritium, tout en étant d'un emploi moins onéreux.

L'interprétation physique des résultats ainsi que la méthodologie pratique de traçage sont décrites par ailleurs (Gaillard, Rousselot, Sauty, 1977).

On s'attachera ici à l'ajustement de  $\alpha$  et  $w$  sur la première partie de la courbe, et qui correspond donc à la couche aquifère la plus conductrice.

#### Traçage n° 1

La courbe de restitution a été reportée quatre fois en variables réduites pour des valeurs de  $t_c$  égales à 20 h, 12h, 11h et 10h (figure 16).

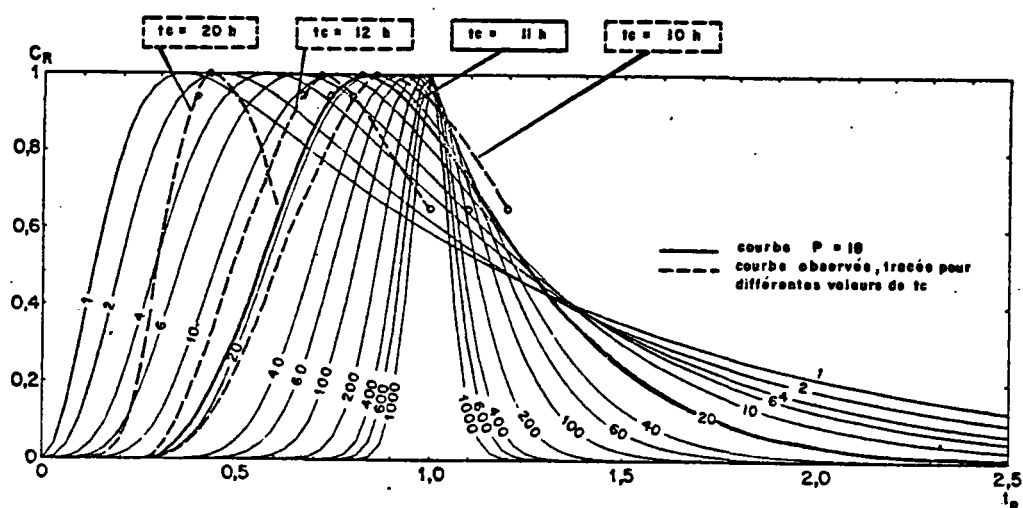


fig. 16 - TRACAGE N° 1 - COURBE DE RESTITUTION EN VARIABLES RÉDUITES

La courbe  $t_c = 12h$ , proche de la courbe  $P = 20$  en début de montée, est très proche de la courbe  $P = 10$  en son sommet. Donc,  $t_c < 12$ .

De même, la courbe  $t_c = 10h$ , très proche de la courbe  $P = 20$  à sa base, est à mi-chemin entre  $P = 20$  et  $P = 40$  à proximité du pic.



Par contre, la courbe  $t_c = 11h$  s'insère très bien dans les observations de courbes, à proximité de  $P = 20$ . La valeur correspondante du nombre de Péclet est de l'ordre de 18.

On peut ensuite calculer la porosité cinématique et la dispersivité :

$$\omega = \frac{Q t_c}{\pi r^2 h} = 8,4\% \text{ et } \alpha = \frac{r}{P} = 0,3 \text{ m.}$$

La courbe  $P = 18$ ,  $t_c = 11h$  est ensuite reportée dans les axes réels, avec la courbe de restitution observée et ses points de mesure (figure 17).

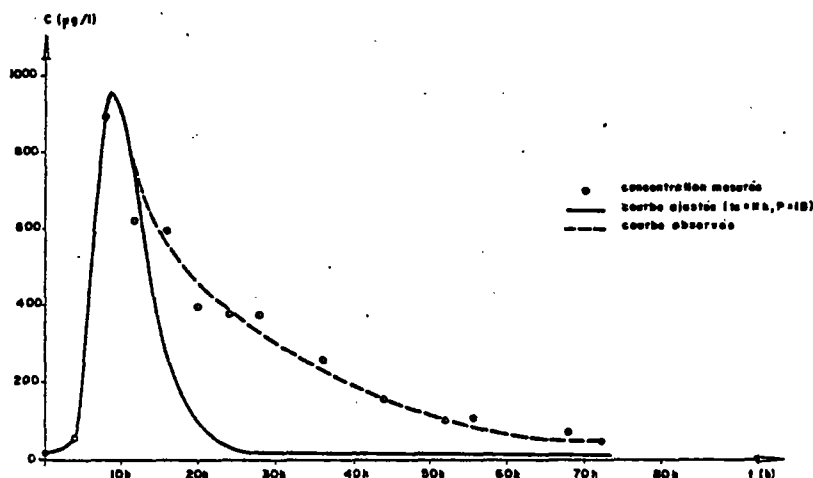


fig. 17 - Tracé n°1 - Courbe de restitution interprétée

Ce premier exemple met en évidence une "explication" très incomplète par le modèle Piston-Diffusion sur une seule couche : écarts importants entre courbe ajustée et courbe réelle sur la seconde partie.

En fait, une étude géologique plus approfondie (Gaillard et al, 1977) présence de deux couches géologiques bien différenciées et continues depuis le piézomètre d'injection jusqu'à l'ouvrage d'exhaure. Cet exemple sera repris à la fin du présent paragraphe.

### Traçage n° 4

De nombreuses autres expériences de traçage sur le terrain ont été interprétées par cette méthode (cf. Saüty, 1977) :

- essais de plusieurs valeurs de  $t_c$  pour choisir l'échelle des temps puis interpolation du nombre de Péclet ;
- la courbe est ensuite reportée dans les axes aux dimensions réelles.

Les contraintes de publication nous limitent à en présenter un seul exemple. Le choix du traçage n° 4 est intéressant car il montre un accord quasiment parfait entre la mesure et le schéma théorique (fig. 18 et 19).

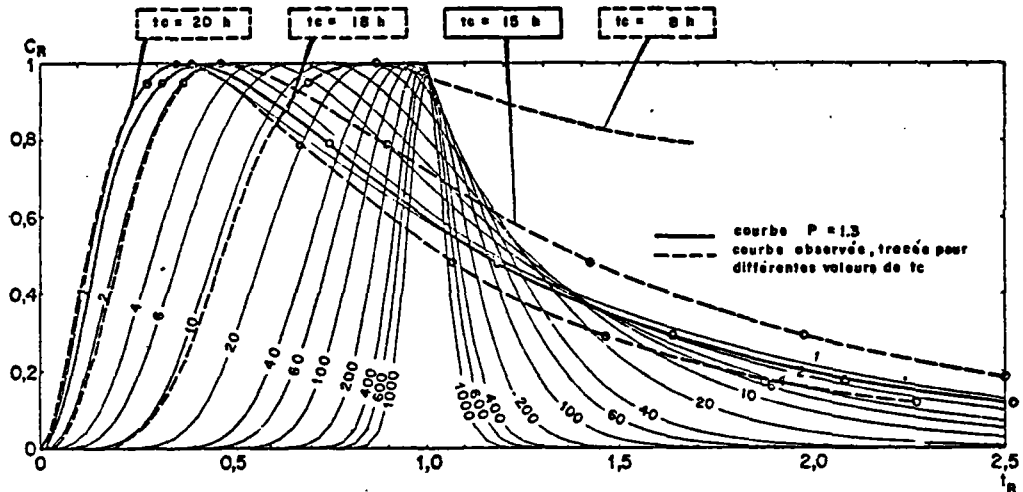


Fig. 18

TRACAGE N°4 - COURBE DE RESTITUTION EN VARIABLES REDUITES

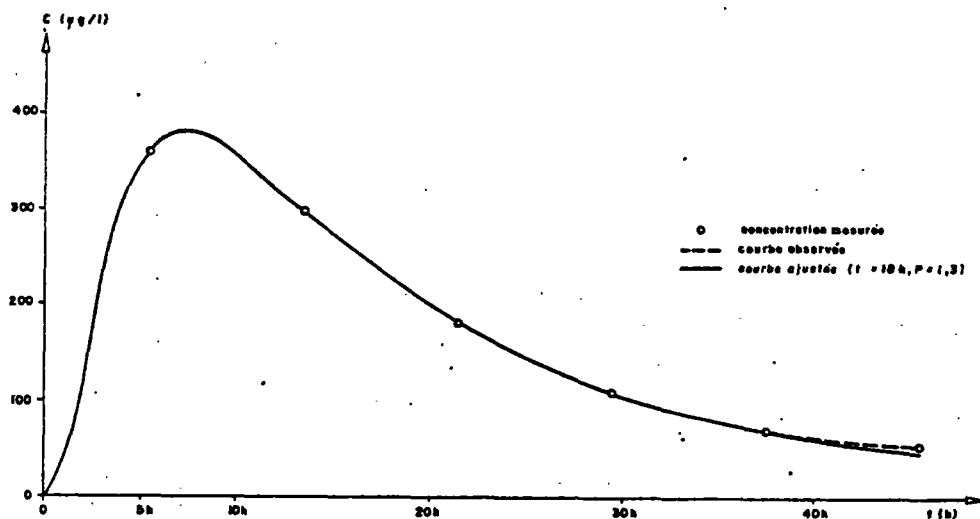


Fig. 19

Traçage n°4 - Courbe de restitution interprétée

Il conduit à l'identification des paramètres suivants :  
 $t_c = 18 \text{ h}$  ;  $\omega = 14,5 \%$  ;  $P = 1,3$  ;  $\alpha = 6,9 \text{ m}$ .

### Réinterprétation du traçage n°1 par un modèle bicouche

Si l'on compare sur la figure 17 l'aire comprise entre les courbes ajustée et mesurée et la droite  $C = C_0 = 10 \mu\text{g/l}$ , on trouve un rapport de 0,43. Donc seuls 43% de la restitution sont expliqués par le modèle monocouche. En fait, les coupes dressées pour les forages indiquent une couche privilégiée de galets d'épaisseur 1m. Le restant de la couche aquifère en eau est constitué de 4,9 m de formations glaciaires beaucoup moins conductrices.

La première partie de la courbe de restitution peut donc être attribuée à la couche de galets avec 43% du débit puisque le traceur a été soigneusement homogénéisé sur toute la hauteur d'injection. La seconde partie, avec 57% du débit, conduit à l'ajustement de la courbe théorique  $P = 8$ ,  $t_c = 33\text{h}$ .

La figure 26 donne l'interprétation finale du traçage n°1 avec individualisation des transferts par chacune des couches supposées non communicantes en première approximation, selon le schéma de BRISSAUD et al. (1976).

La connaissance du débit  $Q = 4 \text{ m}^3/\text{h}$  et de la distance puits-piézomètre  $r = 5,3 \text{ m}$  permettent de calculer les caractéristiques des deux couches :

couche de galets	$\omega_1 = 21\%$	$\alpha_1 = 0,3\text{m}$
formation glaciaire	$\omega_2 = 18\%$	$\alpha_2 = 0,7\text{m}$

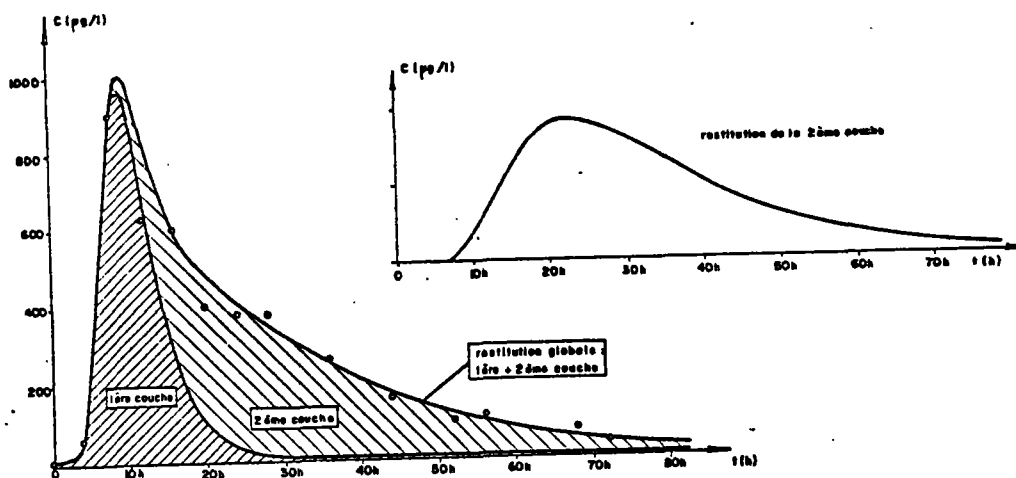


Fig. 20

— Traçage 1 - Interprétation par un modèle bicouche.

## 6. - CONCLUSIONS

Une méthode numérique a permis de calculer les courbes de restitution de traceurs en écoulement radial convergent ou divergent suivant deux types d'injection : continue ou brève.

Des formules analytiques ont été comparées à ces résultats.

Les courbes de restitution ont été assemblées sous forme d'abaques construits pour les valeurs de paramètres adimensionnels rencontrés dans la pratique. Une méthodologie d'interprétation manuelle a été mise en oeuvre pour ajuster les paramètres de porosité cinématique et de dispersivité de la couche aquifère la plus rapide sur des courbes de restitution obtenues sur le terrain.

Il a aussi été montré que cette méthode manuelle permet d'identifier les paramètres d'une formation bicouche lorsque les vitesses dans chaque couche sont suffisamment distinctes.

Puisque la courbe de restitution d'un traçage radial peut être simplement interprétée, et que ce mode de traçage peut être réalisé économiquement sur les puits munis de piézomètres satellites (Gaillard et al., 1977), il serait souhaitable d'entreprendre systématiquement ce type de mesure, notamment lors des essais de débit des captages destinés à la consommation humaine.

On pourrait ainsi mieux définir au voisinage de captages l'extension des périmètres à protéger contre un transfert de polluant dans le milieu saturé.

Par la même occasion, on verserait au dossier de la dispersion dans les nappes d'eau souterraine des mesures nombreuses réalisées in situ. Ces mesures, nécessaires pour des études systématiques en fonction de la géologie des aquifères, ou en relation avec d'autres paramètres tels que la perméabilité ou la granulométrie, font actuellement défaut.

# LISTE DES REFERENCES CITEES

- /1/ J. BEAR, M. JACOBS .- On the movement of water bodies injected into aquifers .- *Journal of Hydrology*, t.3, n°1, 1965, p. 37-57.
- /2/ J. BEAR .- Dynamics of fluids in porous media .- New York, American Elsevier, 1972.
- /3/ F. BRISSAUD, Ph. COUCHAT, C. ESCANDE .- Une étude des propriétés dispersives d'un milieu aquifère à l'échelle de l'échantillon .- *Journal of Hydrology* t.30, n° 1-2, 1976, p. 113-126.
- /4/ J.J. FRIED, M.A. COMBARNOUS .- Dispersion in porous media .- In : *Advances in hydrosciences*, New York, London : Academic Press, 1971, Vol. 7, p. 169-282.
- /5/ B. GAILLARD, J. GUIZERIX, J. MARGAT, R. MARGRITA, D. ROUSSELOT, J.P. SAUTY .- Evaluation pratique par traceurs des caractéristiques de transfert de l'eau, vecteur de polluants, dans la zone saturée des aquifères .- Vienne : A.I.E.A., 1976.
- /6/ B. GAILLARD .- Méthode de traceurs pour la détermination des paramètres de transfert de substances en solution dans l'eau des aquifères .- *Thèse, Université scientifique et médicale de Grenoble*, 1976.
- /7/ B. GAILLARD, J. GUIZERIX, J. MARGAT, J. MOLINARI, P. PEAUDECERF .- Etude méthodologique des caractéristiques de transfert des substances chimiques dans les nappes .- *5ème rapport, Résultats de la recherche ATP CNRS*, Paris 1976.
- /8/ B. GAILLARD, D. ROUSSELOT, J.P. SAUTY .- Applications d'une méthode économique de détermination sur le terrain des paramètres de dispersion .- *Hydrodynamic diffusion and dispersion in porous media - Symposium AIRH Pavie*, 1977
- /9/ A.O. GARDNER, D.W. PEACEMAN, A.L. POZZI .- Numerical calculation of multidimensional miscible displacement by the method of characteristics .- *J. Soc. Petroleum Engrs.*, vol.4, n°1, 1964, p. 26-36.
- /10/ J.P. GAUDET, G. VACHAUD .- Simulation de l'infiltration en régime transitoire d'eau et de soluté dans la zone non saturée .- *Colloque national pour la protection des eaux souterraines - Orléans, Mars 1977, BRGM, Service Géologique National*, vol.2, p. 203-212.
- /11/ J.A. HOOPES, D.R.F. HARLEMAN .- Waste water recharge and dispersion in porous media .- *Hydrodynamics Laboratory, Massachusetts Institute of Technology*, Report n° 75, 1965.
- /12/ L.F. KONIKOW, J.D. BREDEHOEFT .- Modeling flow and chemical quality changes in an irrigated steam-aquifer system .- *Water Resources Research*, vol.10, n°3, 1974, p. 546-562.
- /13/ R.B. LANTZ .- Quantitative Evaluation of Numerical Diffusion .- *J. Soc. Petroleum Engrs.*, 1971, p. 315-320
- /14/ L.K. LAU, W.J. KAUFMAN, D.K. TOOD .- Dispersion of a water tracer in radial laminar flow through homogeneous porous media .- *Hydraulic Laboratory and Sanitary Engineering Research Laboratory, University of California, Berkeley*, 1959.

- /15/ A. LENDA, A. ZUBER .- Tracer dispersion in groundwater experiments .- *Vienne, A.I.E.A. Proceedings of a symposium, 9-13 march 1970.*
- /16/ J. MOLINARI, P. PEAUDECERF .- Essais conjoints en laboratoire et sur le terrain en vue d'une approche simplifiée de la prévision des propagations de substances miscibles dans les aquifères réels .- *Hydrodynamic diffusion and dispersion in porous media - Symposium AIRH, Pavie 1977.*
- /17/ S.P. NEUMAN, P.A. WITHERSPOON .- La méthode des éléments finis appliqués à l'hydrogéologie - Finite element methods in hydrogeology .- *Bulletin du Bureau de Recherches Géologiques et Minières, Section III, n° 4, 1973.*
- /18/ D.B. OAKES, K.J. EDWORTHY .- Field measurements of dispersion coefficients in the United Kingdom .- *Groundwater Quality Conference, Reading, 6-8 septembre 1976.*
- /19/ A. OGATA .- Dispersion in porous media .- *Ph.D. Thesis - Northwestern University, Illinois, 1958.*
- /20/ A. OGATA, R.B. BANKS .- A solution of the differential equation of longitudinal dispersion in porous media .- *U.S. Geological Survey, Professional paper 411-A, 1961.*
- /21/ H.O. PFANNKUCH .- Contribution à l'étude des déplacements de fluides miscibles dans un milieu poreux .- *Revue de l'Institut Français du Pétrole, vol. 18, n°2, 1963, p. 215-270.*
- /22/ J.F. PICKENS, W.C. LENNOX .- Numerical simulation of Waste Movement in Steady Groundwater Flow Systems .- *Water Resources Research, vol.12, n°2, 1976 p.171-180.*
- /23/ G.F. PINDER, H.H. COOPER Jr. .- A numerical technique for calculating the transient position of the saltwater front .- *Water Resources Research vol.6, n°3, 1970, p. 875-882.*
- /24/ G.F. PINDER .- A Galerkin Finite Element Simulation of Groundwater Contamination on Long Island, New York .- *Water Resources Research, vol.9, n°6, 1973, p. 1657-1669.*
- /25/ H.S. PRICE, J.C. CAVENDISH, R.S. VARGA .- Numerical methods of higher order accuracy for diffusion-convection equations .- *J. Soc. Petroleum Engrs., vol.8, n°3, 1968, p. 293-303.*
- /26/ P. RAIMONDI, G.H.F. GARDNER, C.B. PETRICK .- Effect of pore structure and molecular diffusion on the mixing of miscible liquids flowing in porous media .- *A.I.Ch.E., Soc. Petrol. Eng., Joint Symp. "Oil Recovery Methods", San Francisco, Preprint 43, 1959.*
- /27/ J.P. SAUTY .- Computer simulation of pollution front movement .- In : *Groundwater in Europe, New York, Water Information Center, 1972, p. 69-85.*
- /28/ J.P. SAUTY .- Propagation de la pollution dans les nappes .- *Conférence de l'Association Nationale pour la Protection des Eaux, Paris, 1975, 7 p.*

- /29/ J.P. SAUTY, D. THIERY .- Utilisation d'abaques pour la détermination de périmètres de protection . Note technique n° 6 aux géologues agréés en matière d'hygiène publique .- *BRGM, rapport inédit, 75 SGN 430 AME, 1975.*
- /30/ A.E. SCHEIDEGGER .- The Physics of Flow through Porous Media, 2ème ed. .- *Toronto, University of Toronto Press, 1960.*
- /31/ G. SEGOL, G.F. PINDER, W.G. GRAY .- A Galerkin . Finite element technique for calculating the transient solution of the saltwater front .- *Water Resources Research - vol.11, n°2, 1975, p.343-347.*
- /32/ U.Y. SHAMIR, D.R.F. HARLEMAN .- Numerical and analytical solutions of dispersion problems in homogeneous and layered aquifers . - *Hydrodynamics Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Report n° 89, 1966.*
- /33/ H.L. STONE, P.L.T. BRIAN .- Numerical solution of convective transport problems .- *Journal A.I.Ch.E., vol.9, n°5, 1963, p. 681-688.*
- /34/ J.P. SAUTY .- Contribution à l'identification des paramètres de dispersion dans les aquifères par l'interprétation des expériences de traçage .- *Thèse, Université scientifique et médicale de Grenoble - Septembre 1977.*

TABLEAU I  
TABLE DES SYMBOLES  
-----

<u>Symbole</u>	<u>Dimension</u>	
A	$L^2 T^{-1}$	Constante du calcul en écoulement radial $A = Q/2\pi h\omega$
$C(r, \theta, t)$ ou C	$M L^{-3}$	Concentration en masse par unité de volume
$\bar{C}$	$M L^{-3}$	Concentration moyenne sur un cercle de rayon r: $\bar{C} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(r, \theta, t) \cdot d\theta$
$C_R$	sans	Concentration réduite $C_R = C/C_{\max}$ avec $C_{\max}$ concentration maximale de la courbe de restitution
$\bar{D}$	$L^2 T^{-1}$	Tenseur de dispersion
h	L	Epaisseur aquifère en eau
K	$T^{0,5}$	Facteur de normation de la courbe de restitution d'un pic de Dirac en écoulement monodimensionnel uniforme par une concentration maximale unitaire : $K = t_{R\max}^{0,5} \cdot \exp \left( \frac{P}{4 t_{R\max}} (1 - t_{R\max})^2 \right)$
K'	$T^{1,5}$	Facteur de normation de la dérivée de la courbe de restitution d'un échelon en écoulement monodimensionnel uniforme par une concentration maximale unitaire : $K' = t_{R\max}^{1,5} \cdot \exp \left( \frac{P}{4 t_{R\max}} (1 - t_{R\max})^2 \right)$
P	sans	Nombre de Péclet de l'aquifère muni de son dispositif de mesure : $P = \frac{u r}{D} = \frac{r}{\alpha}$ avec r : distance puits-piézomètre
Q	$L^3 T^{-1}$	Débit injecté ( $Q > 0$ ) ou pompé ( $Q < 0$ ) dans le puits central
r	L	- Variable indépendante, distance à l'axe des puits - Plus particulièrement utilisée pour désigner la distance puits-piézomètre
$\bar{r}$	L	Rayon du front convectif pur à l'instant t: $\bar{r} = \sqrt{2 At}$
$r_i$	L	Rayon central de la maille d'indice i
$r_R$	sans	$r_R = \frac{r}{\alpha} = P$ rayon réduit (distance réduite puits-piézomètre)
t	T	Temps, variable indépendante.



<u>Symbole</u>	<u>Dimension</u>	
$t_C$	T	Temps de transfert par convection pure du point de prélèvement au point d'injection : $t_C = (\omega \pi r^2 h) / Q = r^2 / 2A$
$t_R$	sans	Temps réduit $t_R = t / t_C = 2 At / r^2$
$t_{Rmax}$	sans	Temps réduit correspondant au maximum de la courbe de restitution
$u$	$L T^{-1}$	Vitesse effective de pore à la distance $r$ : $u = Q / (2\pi r h \omega) = A / r$
$\alpha, \alpha_L$	L	Dispersivité longitudinale ou coefficient longitudinal intrinsèque de dispersion.
$\alpha_T$	L	Dispersivité transversale
$\Delta t$	T	Pas de temps pour l'intégration numérique
$\Delta r$	L	Pas d'espace pour l'intégration numérique
$\epsilon$	sans	Facteur donnant le signe du débit : $\begin{array}{lll} \epsilon = +1 & Q > 0 & \text{injection} \\ \epsilon = -1 & Q < 0 & \text{pompage} \end{array}$
$\phi$	sans	Porosité totale
$\lambda$	sans	Coefficient de pondération amont-aval du terme convectif dans la méthode numérique
$\theta_1$	sans	Coefficient de pondération implicite-explicite du terme dispersif dans la méthode numérique
$\theta_2$	sans	Coefficient de pondération implicite-explicite du terme convectif dans la méthode numérique
$\omega$	sans	Porosité cinématique

TABLEAU II

Formules approchées représentatives des courbes de restitution

type écoulement	type injection	formule approchée	domaine de validité
divergent	continue	RAIMONDI (7): $C_R = 0,5 \operatorname{Erfc} \left( \frac{\sqrt{3P}}{4} \frac{1-t_R}{t_R^{0,75}} \right)$	$P > 10$
		LAU (8) : $C_R = 0,5 \operatorname{Erfc} \left( \frac{\sqrt{3P}}{2} \frac{1-\sqrt{t_R}}{t_R^{0,25}} \right)$	$P > 10$
convergent	continue	Echelon vitesse uniforme (1 dimension): (9) $C_R = 0,5 \left[ \operatorname{Erfc} \frac{\sqrt{P}(1-t_R)}{2 \sqrt{t_R}} + \exp(P) \cdot \operatorname{Erfc} \frac{\sqrt{P}(1+t_R)}{2 \sqrt{t_R}} \right]$	$P > 1$
		Impulsion vitesse uniforme (1 dimension): (10) $C_R = \frac{K}{\sqrt{t_R}} \cdot \exp \left( - \frac{P}{4t_R} (1-t_R)^2 \right)$	$P > 1$
convergent	impulsion	Dérivée de (9) : (11) $C_R = \frac{K'}{t_R^{1,5}} \exp \left( - \frac{P}{4t_R} (1-t_R)^2 \right)$	$P > 3$