

MINISTÈRE DU DÉVELOPPEMENT INDUSTRIEL ET SCIENTIFIQUE

BUREAU DE RECHERCHES GÉOLOGIQUES ET MINIÈRES

SERVICE GÉOLOGIQUE NATIONAL

B.P. 6009 – 45018 Orléans Cédex – Tél.: (38) 66.06.60

**EFFETS DE LA PÉNÉTRATION PARTIELLE
D'UN Puits DE POMPAGE SUR
L'ÉVOLUTION DES RABATTEMENTS**

par

J. FORKASIEWICZ et P. PEAUDECERF



Département géologie de l'aménagement

B.P. 6009 – 45018 Orléans Cédex – Tél.: (38) 66.06.60

73 SGN 441 AME

Décembre 1973

Orléans, le 1er mars 1978

A CLASSER DANS LE RAPPORT 73 SGN 441 AME

NOTE TECHNIQUE 78/7

DEUX METHODES SIMPLES POUR L'EVALUATION DU NOMBRE DE TERMES A RETENIR
DANS LE CALCUL DE LA SERIE QUI DONNE LA CORRECTION SUR LE RABATTEMENT
EN CAS DE PENETRATION PARTIELLE DANS UNE NAPPE CAPTIVE
POUR DES TEMPS SUFFISAMMENT GRANDS

M.L. NOYER

1. INTRODUCTION

Cette note apporte un complément d'information au rapport 73 SGN 441 AME intitulé "Effets de la pénétration partielle d'un puits de pompage sur l'évolution des rabattements" par J. FORKASIEWICZ et P. PEAUDECERF.

Ce rapport présente les expressions du rabattement corrigé en pénétration partielle, pour différents cas. Ces solutions ont été calculées par M.S. HANTUSH et présentées dans le chapitre "Hydraulics of wells", extrait du volume I de l'ouvrage collectif "Advances in hydrosciences" (New-York, 1964), et disponible en français dans l'ouvrage intitulé "Hydraulique des puits" (traduction DS 67 A 119).

L'une de ces solutions concerne le rabattement dans un piézomètre ponctuel situé au voisinage d'un puits incomplet, lorsque le temps écoulé depuis le début du pompage est relativement long.

Le terme de correction (donné plus explicitement dans le paragraphe suivant) fait intervenir une série infinie. Pratiquement, on ne calcule qu'un nombre fini de termes. Or, les valeurs absolues de ces termes ne décroissent pas forcément de façon monotone lorsque l'ordre augmente, et leur signe est aléatoirement positif ou négatif. Il n'y a donc pas de moyen immédiat de savoir combien de termes on doit calculer pour être certain que la somme de ceux que l'on néglige ne dépasse pas une marge d'erreur donnée.

Cette note a donc pour objet de présenter des méthodes simples et générales permettant d'évaluer dans chaque cas pratique et pour chaque précision demandée le nombre de termes à prendre en compte.

Il est clair que, dans la plupart des cas, le terme U_1 sera bien inférieur à cette borne. De toute façon, les inégalités suivantes sont vérifiées pour tout n :

$$|U_n| \leq M_n \leq M_{n-1} \leq \dots \leq M_1 \quad (1)$$

Il est à noter que ni U_n , ni $|U_n|$ ne sont nécessairement des fonctions monotones décroissantes de n .

4. PREMIERE METHODE PROPOSEE

Etant donné une précision ϵ , on désire connaître l'ordre N à partir duquel on aura :

$$\left| \frac{U_n}{U_1} \right| \leq \epsilon \text{ pour tout } n \geq N.$$

On va procéder ainsi :

a) on calcule exactement le terme U_1 , soit :

$$U_1 = \left(\sin\left(\frac{\pi l}{b}\right) - \sin\left(\frac{\pi d}{b}\right) \right) \cos\left(\frac{\pi z}{b}\right) K_0\left(\frac{\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_z}{K_r}}\right)$$

b) on veut $|U_n| \leq \epsilon |U_1|$ pour $n \geq N$.

$$\text{Or, } |U_n| \leq M_n = \frac{2}{n} K_0\left(\frac{n\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_z}{K_r}}\right) \leq 2 K_0\left(\frac{n\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_z}{K_r}}\right) \quad (2)$$

N peut être choisi comme le plus petit n vérifiant la relation :

$$2 K_0\left(\frac{n\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_z}{K_r}}\right) \leq \epsilon |U_1| \quad (3)$$

car alors on aura bien pour tout $n \geq N$

$$|U_n| \leq M_n \leq \epsilon |U_1| \quad (4)$$

c) de la relation (3), on tire :

$$\boxed{K_0\left(\frac{n\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_z}{K_r}}\right) \leq \frac{\epsilon}{2} |U_1|} \quad (5)$$

On lit dans la table de $K_0(x)$ la valeur limite x_1 de x correspondant à $K_0(x) = \epsilon |U_1| / 2$

d) on en tire la relation $x_1 = \frac{n\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_z}{K_r}}$ et N est l'entier immédiatement supérieur à la valeur :

$$x_1 \frac{b}{\pi r} \sqrt{\frac{K_r}{K_z}}$$

5.2. Deuxième exemple

Si on prend maintenant pour ϵ la valeur $1/10$, on doit satisfaire à la condition :

$$|U_n| \leq 0.021$$

et la condition 5 devient : $K_0(n \ 0.685) \leq 0.0105$

On lit dans la table :

$$K_0(4.05) = 0.01055$$

$$K_0(4.10) = 0.00998$$

et donc $x_1 = 4.10 = n \ 0.685$

Ce qui entraîne

$$N = 6$$

D'après les valeurs des U_n calculées ci-dessus, on voit que $|U_2| = 0.0067$ est déjà plus petit que la limite $|U_1|/10 = 0.021$ et on aurait pu penser a priori qu'il suffisait d'en rester là, ce qui aurait été une erreur car $U_3 = 0.0216$ est plus grand que cette limite.

La méthode exposée nous permet d'affirmer qu'au-delà de la valeur $n = 6$, tous les termes sont, à coup sûr, inférieurs en valeur absolue à 0.021 . Ceci est déjà vrai en fait à partir de $n = 4$. La limite donnée par la méthode est seulement un peu plus grande.

6. DEUXIEME METHODE

On peut objecter, à juste titre, que la méthode proposée au paragraphe 4 est basée sur des majorations un peu fortes qui entraînent une surestimation du nombre de termes à calculer.

Cette méthode a cependant l'avantage d'être extrêmement simple et rapide. A la place des expressions (2) et (3) du paragraphe 4, on peut poser directement :

$$|U_n| \leq \frac{2}{n} K_0 \left(\frac{n\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_z}{K_r}} \right) \leq \epsilon |U_1| \quad (6)$$

et donc :

$$\boxed{\frac{1}{n} K_0 \left(\frac{n\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_z}{K_r}} \right) \leq \frac{\epsilon |U_1|}{2}} \quad (7)$$

La nouvelle majoration (7) est moins forte que la précédente (5) et doit donc entraîner des résultats plus précis.

Le problème est alors de chercher le premier n vérifiant

$$\frac{K_0(n \ A)}{n} \leq \frac{\epsilon |U_1|}{2} \quad \text{avec } A = \frac{\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_z}{K_r}}$$

R E S U M E

=====

Contrairement à l'écoulement en direction du puits à pénétration complète où l'écoulement se fait essentiellement dans les plans parallèles aux plans de stratification (écoulement bidimensionnel), l'écoulement au voisinage d'un puits à pénétration partielle est à trois dimensions.

Aussi, dans le cas du puits lui-même ainsi que dans le cas des piézomètres proches ($r < 1,5 \sqrt{K_h/K_v}$) et pénétrant eux aussi partiellement la nappe, la variation rabattement - temps sera influencée par l'effet de la pénétration partielle du puits pompé et les formules habituelles de THEIS, JACOB et HANTUSH ne seront plus applicables.

Le présent rapport expose des solutions mathématiques établies par HANTUSH et WALTON pour le régime transitoire, dans le cas d'une nappe captive, infinie et pompée au débit constant.

L'application pratique des formules proposées est illustrée par des exemples théoriques.

Ce travail a été réalisé dans le cadre des études générales méthodologiques du département Géologie de l'aménagement, service Hydrodynamique.

x x
x

S O M M A I R E

=====

Notations employées

INTRODUCTION

1. RABATTEMENTS AU VOISINAGE D'UN Puits INCOMPLET

1.1. Rabattements dans les piézomètres ponctuels

1.1.1. Solution pour un temps de pompage relativement court :

$$t < \frac{(2b - 1 - z)^2 S/b}{20K_v}$$

1.1.2. Solution pour un temps de pompage relativement long :

$$t > \frac{Sb}{2K_v}$$

1.2. Rabattements dans les piézomètres crépinés

2. RABATTEMENTS A LA PAROI DU Puits DE POMPAGE

3. CAS DES PIEZOMETRES CREPINES PENETRANT L'AQUIFERE DE LA MEME FACON QUE LE Puits DE POMPAGE

4. REMARQUES GENERALES SUR L'EFFET DE LA PENETRATION PARTIELLE

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES 1 à 9

LISTE DES ANNEXES
=====

1. Tables de la fonction $M(u, \beta)$
2. Calcul automatique de la fonction E : le programme PENEPART
par M. CANCEILL et P. PEAUDECERF
3. Tables de la fonction $W(u, \omega, \gamma)$
4. Courbes types de la fonction $W(u, \omega, \gamma)$ pour $\gamma = 0,25$
5. Courbes types de la fonction $W(u, \omega, \gamma)$ pour $\gamma = 0,50$
6. Courbes types de la fonction $W(u, \omega, \gamma)$ pour $\gamma = 0,75$
7. Table des valeurs des fonctions e^x et $K_0(x)$
8. Exemple de calcul des paramètres hydrodynamiques
9. Evaluation rapide de l'effet de la pénétration partielle sur les
rabattements au puits de pompage

NOTATIONS EMPLOYEES

=====

- Q = débit de pompage
 t = temps écoulé depuis le début de pompage
 s = rabattement
 r_p = rayon du puits de pompage
 r = distance du point considéré à l'axe du puits de pompage
 K_h = coefficient de perméabilité horizontale de la couche aquifère
 K_v = coefficient de perméabilité verticale de la couche aquifère
 $a = \sqrt{\frac{K_h}{K_v}}$ = coefficient d'anisotropie des perméabilités
 b = épaisseur de la couche aquifère
 $T = K_h \cdot b$ = transmissivité de la couche aquifère
 S = coefficient d'emmagasinement de la couche aquifère
 $W(u)$ = fonction du puits pour les nappes captives
 $F(u') = W(u)$
 $u = \frac{r^2 S}{4 T t}$
 $u' = \frac{1}{u} = \frac{4 T t}{r^2 S}$
 d = profondeur de la partie non crépinée du puits, mesurée à partir du toit de la couche aquifère
 d' = profondeur de la partie non crépinée du piézomètre, mesurée à partir du toit de la couche aquifère
 l = profondeur de pénétration du puits de pompage, mesurée à partir du toit de la couche aquifère
 l' = profondeur de pénétration du piézomètre, mesurée à partir du toit de la couche aquifère
 z = coordonnée verticale, mesurée positivement à partir du toit de la couche aquifère
 $E(u, l/r, d/r, z/r) = M\left[u, \frac{a(l+z)}{r}\right] - M\left[u, \frac{a(d+z)}{r}\right] + M\left[u, \frac{a(l-z)}{r}\right] - M\left[u, \frac{a(d-z)}{r}\right]$
 $M(u, \beta) = \int_u^\infty \frac{e^{-Y}}{Y} \operatorname{erf}(\beta \sqrt{Y}) dy$ (fonction tabulée)
 β = paramètre de la fonction $M(u, \beta)$ dépendant des variables : l, l', d, d', z, r et b
 $f_s = f_s(r/b, l/b, d/b, z/b) = \frac{4b}{\pi(1-d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_0 \left(\sqrt{\frac{K_v}{K_h}} \cdot \frac{n\pi r}{b} \right) \left(\sin \frac{n\pi l}{b} - \sin \frac{n\pi d}{b} \right) \times \cos \frac{n\pi z}{b}$
 $K_0(X)$ = fonction de BESSEL modifiée du second degré et d'ordre zéro (tabulée)

INTRODUCTION

Dans de nombreux cas réels les puits et les piézomètres ne sont pas crépinés sur toute la hauteur de la couche aquifère captée. Suivant la configuration géométrique des ouvrages et les caractéristiques des formations aquifères, les effets de la pénétration partielle seront très divers.

Considérons par exemple le cas d'une nappe captée par un puits complet, c'est-à-dire crépiné sur toute la hauteur supposée constante de la couche aquifère. Si les formations sont homogènes sur une même verticale, quelle que soit l'anisotropie des perméabilités, les écoulements sont plans et parallèles aux couches. Aussi théoriquement, tous les piézomètres même pénétrant partiellement la nappe, subiront des rabattements uniquement fonction du temps et de leur distance au puits de pompage, selon les expressions classiques de THEIS et de JACOB.

Au contraire, si le puits de pompage pénètre partiellement la couche aquifère, l'eau souterraine devra suivre des trajectoires non parallèles à cette couche (fig. 1). Les écoulements seront tridimensionnels au voisinage du puits. Les charges ne seront plus nécessairement identiques sur une même verticale et les réponses d'un piézomètre dépendront de sa pénétration.

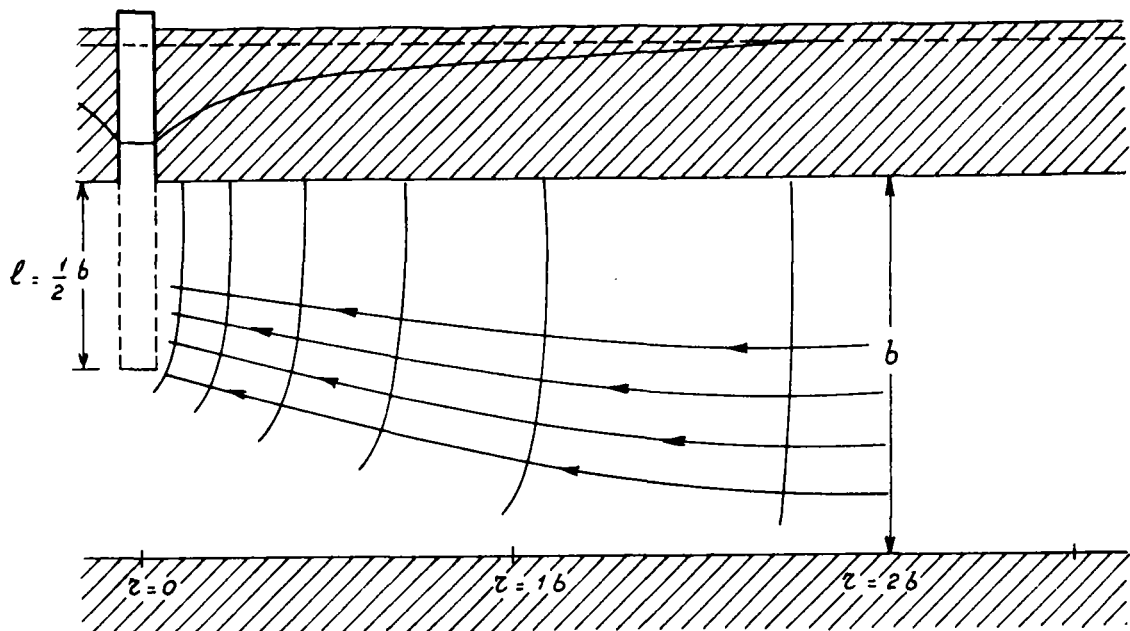


figure 1 - déformation de l'écoulement radial par la pénétration partielle du puits

d'après "Ground water and wells", éd. E.E. Johnson inc., St-Paul, Minnesota, USA, 1966, chap. 6, p. 133

Ces effets s'atténuent lorsqu'on s'éloigne du puits. Les écoulements deviennent alors assimilables à des écoulements plans radiaux. Cette approximation est acceptable à des distances supérieures à $1,5 b \sqrt{K_h/K_v}$ (piézomètre 7, fig. 2) ou $1,5 b$ en milieu isotrope (la signification des symboles est précisée au début du présent rapport)*.

Dans le cas d'un piézomètre crépiné sur toute l'épaisseur de la formation aquifère (piézomètre 2, fig. 2) l'effet d'une pénétration partielle du puits de pompage est négligeable quel que soit son éloignement du puits.

Dans tous les autres cas (piézomètre distant de $r < 1,5 b \sqrt{\frac{K_h}{K_v}}$ ou pénétrant partiellement la nappe) la variation du rabattement en fonction du temps sera influencée par l'effet de la pénétration partielle du puits et les formules habituelles de THEIS, JACOB et HANTUSH établies pour un puits complet ne seront pas applicables.

Ce problème de la pénétration partielle des puits a été étudié par de nombreux chercheurs et des solutions mathématiques approchées ou rigoureuses ont été proposées notamment pour le régime permanent (références : 4, 6, 7, 8, 11, 17).

La plupart de ces auteurs se sont surtout penchés sur l'évaluation des débits des puits incomplets et sur l'efficacité de tels puits par rapport aux puits complets exploités au même débit (références : 12, 13, 14, 15, 16 et 18).

Quant aux écoulements au voisinage d'un puits incomplet en régime transitoire, des solutions exactes sont proposées par M.S. HANTUSH (références : 1, 2 et 3) et VISOCKY (référence : 5).

Dans la présente étude, nous exposerons les différentes solutions basées toutes sur les travaux de HANTUSH (références : 1, 2, 3, 4 et 5).

Elles permettent d'élaborer des méthodes d'interprétation des données de pompage pour l'évaluation des paramètres hydrodynamiques de l'aquifère testé.

* Cette distance limite est prise égale à $2b \sqrt{\frac{K_h}{K_v}}$ par certains auteurs.

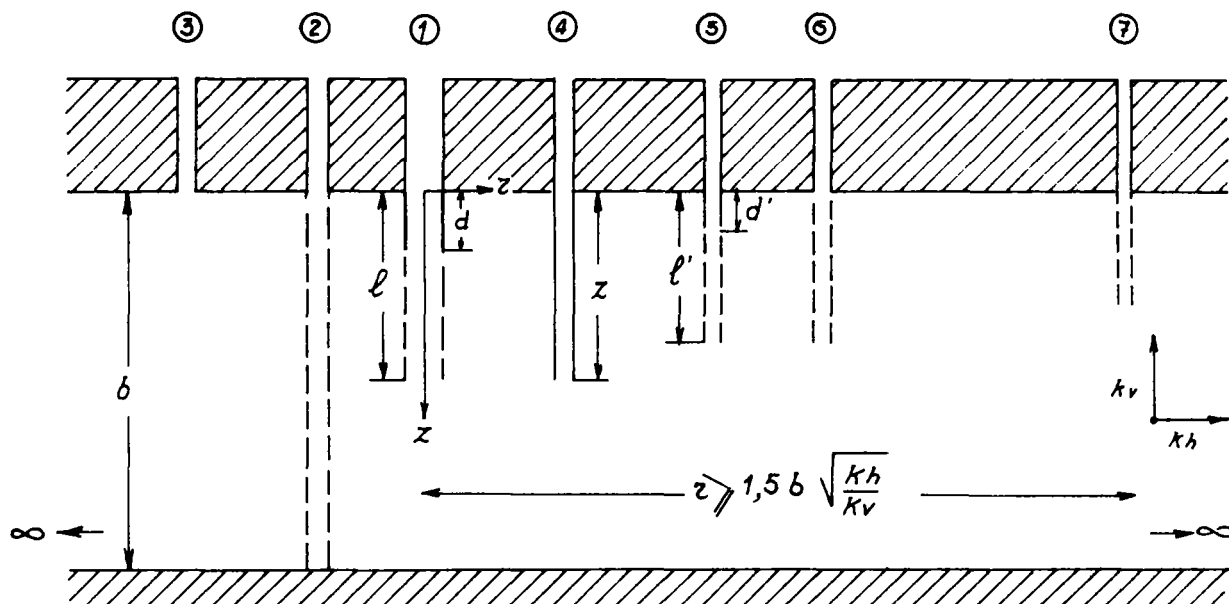


figure 2 - Représentation schématique de puits pénétrant partiellement dans une couche aquifère à nappe captive.

- ① puits de pompage crépiné entre la profondeur d et l .
- ② piézomètre non influencé par l'effet de pénétration partielle du puits crépiné sur toute l'épaisseur de la nappe.
- ③ piézomètre ponctuel de pénétration nulle ($d = 0, l = 0, z = 0$).
- ④ piézomètre ponctuel de pénétration z .
- ⑤ piézomètre crépiné entre la profondeur d' et l' ($z = 0,5(d'+l')$).
- ⑥ piézomètre crépiné sur toute la profondeur de pénétration ($d' = 0, z = \frac{l'}{2}$).
- ⑦ piézomètre non influencé par l'effet de pénétration partielle du puits car situé à

$$r > 1,5b\sqrt{\frac{k_h}{k_v}}$$

1. RABATTEMENTS AU VOISINAGE D'UN PUIT INCOMPLET

L'écoulement en direction d'un puits à pénétration partielle étant à trois dimensions, le rabattement observé dans un piézomètre dépendra, parmi d'autres variables, de la longueur et de la position dans l'espace de la partie crépinée du piézomètre ainsi que de celle du puits de pompage.

Dans l'exposé ci-après, nous distinguerons deux types de piézomètres :

- les piézomètres ponctuels c'est-à-dire ceux dont la crépine est de petites dimensions et qui peuvent donc être considérés comme représentatifs de la charge en un point du milieu poreux (piézomètres 3 et 4 de la fig. 2),
- les piézomètres crépinés dont la partie crépinée a une dimension notable et dont le niveau est induit par une charge moyenne sur la partie pénétrée de l'aquifère (piézomètres 2, 5, 6 et 7 de la fig. 2).

M.S. HANTUSH a analysé le problème de l'écoulement en direction d'un puits à pénétration partielle implanté dans une nappe (voir fig. 2) répondant aux conditions suivantes :

1. La nappe est captive (ses épontes sont imperméables) et d'extension latérale infinie.
2. La libération de l'eau est instantanée.
3. Le puits a un rayon infiniment petit et un débit constant.
4. Les perméabilités de l'aquifère dans les directions horizontales (K_h) et verticales (K_v) sont constantes, mais elles peuvent être différentes ($K_h \geq K_v$).

L'équation différentielle correspondant à ces conditions a été résolue par HANTUSH dans différents cas.

1.1. Rabattements dans les piézomètres ponctuels

Les solutions donnant les rabattements dans un piézomètre ponctuel de pénétration z (voir fig. 2) et situé à $r < 1,5 b \sqrt{\frac{K_h}{K_v}}$ ont été établies par HANTUSH d'une part pour des temps de pompage relativement court : $t < \frac{(2b-l-z)^2 S/b}{20 K_v}$, d'autre part pour des temps de pompage longs : $t > \frac{Sb}{2K_v}$.

Pour le stade intermédiaire :

$$\frac{(2b-l-z)^2 S/b}{20 K_v} < t < \frac{Sb}{2K_v}$$

aucune expression mathématique n'est proposée.

1.1.1. Solution pour un temps de pompage relativement court : $t < \frac{(2b-l-z)^2 S/b}{20 K_v}$

(c'est-à-dire au stade initial de pompage ou lorsque l'aquifère est infiniment épais)

Le rabattement dans un piézomètre ponctuel de pénétration z est donné par l'expression :

$$s = \frac{Q}{8\pi K_h(1-d)} E(u, \frac{1}{r}, \frac{d}{r}, \frac{z}{r}) = \frac{0,04 Q}{K_h(1-d)} E(u, \frac{1}{r}, \frac{d}{r}, \frac{z}{r}) \quad (1)$$

$$\text{avec :} \quad E = M(u, \beta_1) - M(u, \beta_2) + M(u, \beta_3) - M(u, \beta_4)$$

$$\text{où} \quad u = \frac{r^2 S/b}{4 K_h t} = \frac{r^2 S}{4 T t}$$

$$\beta_1 = \frac{a(1+z)}{r} ; \beta_3 = \frac{a(1-z)}{r}$$

$$\beta_2 = \frac{a(d+z)}{r} ; \beta_4 = \frac{a(d-z)}{r}$$

$$\text{et} \quad a = \sqrt{\frac{K_h}{K_v}}$$

$M(u, \beta)$ est une fonction tabulée (voir annexe 1).

Nota : $M(u, -\beta) = -M(u, \beta)$

Les dimensions l , z , d et r sont représentées à la fig. 2.

Remarque :

La valeur de la fonction E dépend des pénétrations du puits et du piézomètre, des paramètres hydrauliques et de l'épaisseur de l'aquifère, mais aussi du temps. Dans les limites d'application qui nous intéressent c'est une fonction croissante du temps.

Application à l'interprétation des pompages d'essai

L'expression (1) permet l'interprétation des données de pompages d'essai par une méthode de superposition à des courbes-types. Mais le nombre des paramètres à considérer notamment l'anisotropie et les dimensions géométriques exigent la construction d'abaques spécifiques pour chaque configuration.

La méthode d'interprétation est donc la suivante :

1. Construction des abaques

Lorsqu'on ignore la valeur de l'anisotropie on est obligé de construire une famille de courbes, par exemple pour :

$$\begin{array}{ll} \frac{K_h}{K_v} = 100 & a = 10 \\ \frac{K_h}{K_v} = 20 & a = 4,5 \\ \frac{K_h}{K_v} = 10 & a = 3,2 \\ \frac{K_h}{K_v} = 2 & a = 1,4 \quad \text{etc...} \end{array}$$

Pour chacune des valeurs de a choisies, on détermine les valeurs de $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et β_4 pour un piézomètre donné et on calcule pour différentes valeurs de $\frac{1}{u}$ la fonction E (équation 1).

Ce calcul peut être effectué en utilisant les tables de la fonction M (annexe 1) ou si le nombre de paramètres est trop grand, au moyen du programme de calcul automatique présenté à l'annexe 2 (avec l'aide éventuelle du département Géologie de l'aménagement).

Ces valeurs E sont portées en fonction de u sur graphique bilogarithmique pour obtenir la ou les courbes-types.

2. Interprétation des données de pompage

On reportera les rabattements observés s dans le piézomètre en fonction du temps de pompage t dans les mêmes coordonnées bilogarithmiques et on superposera la courbe observée sur l'une des courbes-types en maintenant les axes des coordonnées parallèles ; dans certains cas la fin de la courbe observée pourra s'écarter de la courbe-type qui est basée, rappelons-le, sur l'hypothèse des temps de pompage relativement courts (voir fig. 3).

EFFET DE LA PENETRATION PARTIELLE

(méthode de la courbe type)

(Courbe type de la fonction $M(u, \beta)$)

$$\text{où } \beta = \frac{4l}{3r} = 1,2$$

$$M(u, \beta) = M(u, 1,2)$$

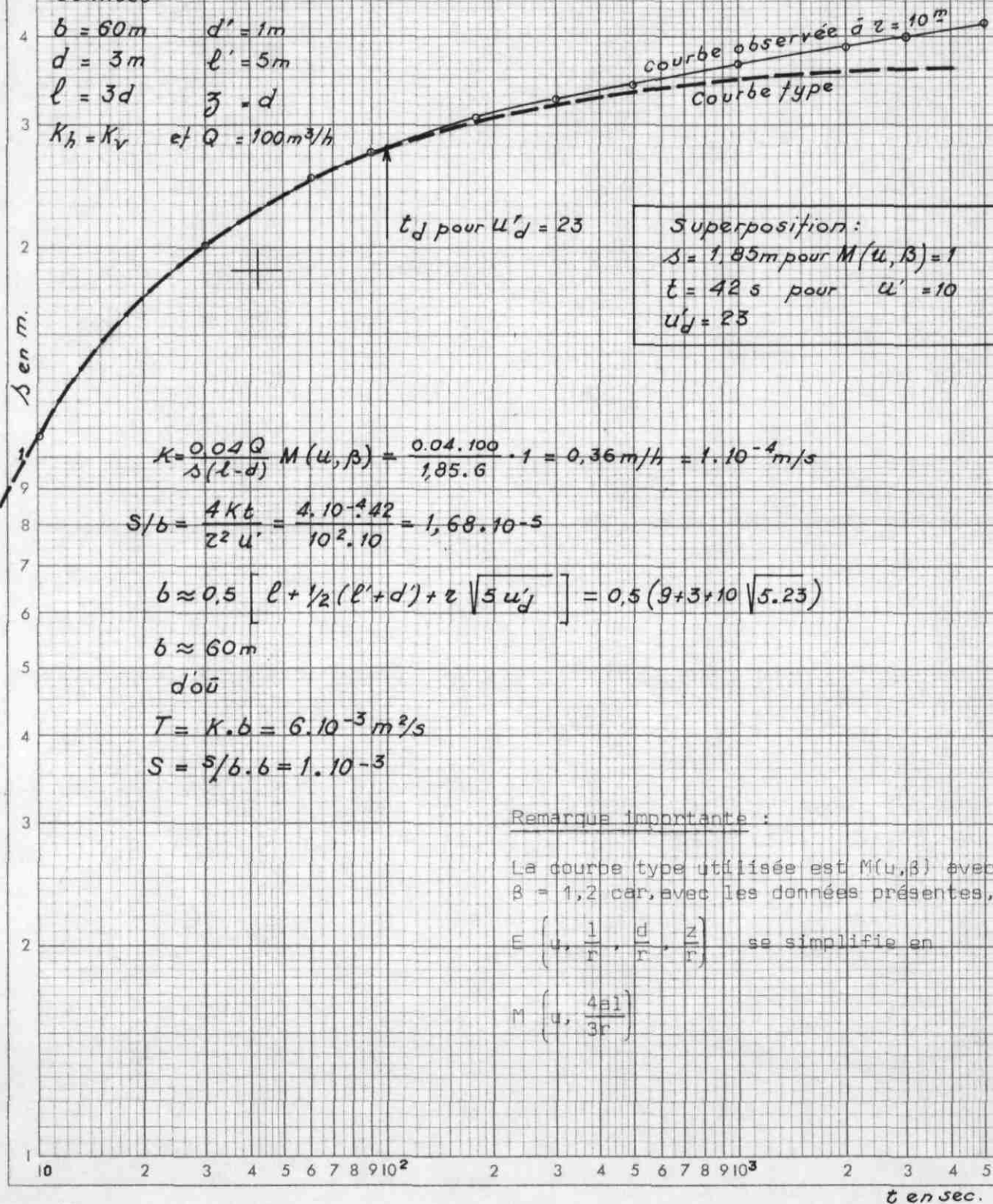
données

$$b = 60 \text{ m} \quad d' = 1 \text{ m}$$

$$d = 3 \text{ m} \quad l' = 5 \text{ m}$$

$$l = 3d \quad z = d$$

$$K_h = K_v \quad \text{et } Q = 100 \text{ m}^3/\text{h}$$



$$K = \frac{0,04 Q}{\beta(l-d)} \quad M(u, \beta) = \frac{0,04 \cdot 100}{1,85 \cdot 6} \cdot 1 = 0,36 \text{ m/h} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$S/b = \frac{4 K t}{z^2 u'} = \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 42}{10^2 \cdot 10} = 1,68 \cdot 10^{-5}$$

$$b \approx 0,5 \left[l + \frac{1}{2}(l' + d') + z \sqrt{5 u'_d} \right] = 0,5 (9 + 3 + 10 \sqrt{5 \cdot 23})$$

$$b \approx 60 \text{ m}$$

d'où

$$T = K \cdot b = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$S = \frac{T}{b \cdot b} = 1 \cdot 10^{-3}$$

- On relèvera les coordonnées d'un point dans les systèmes d'axes des deux graphiques : E, s, u' et t ; ces coordonnées permettent de calculer K_h et S/b suivant les expressions :

$$K_h = \frac{0,04 Q}{s(1-d)} E$$

$$S/b = \frac{4K_h t}{r^2 u'}$$

S'il y a un effet d'anisotropie, le coefficient a de la courbe type choisie nous permettra d'évaluer $K_v = K_h/a^2$.

- Lorsque la courbe observée s'écarte de la courbe type, on pourra tenter d'évaluer la valeur de u' au point de départ de la courbe : soit u'_d et vérifier que u'_d vérifie l'équation

$$b \approx 0,5 \{1 + z + r \sqrt{5u'_d}\} .$$

Les valeurs de $T = K_h b$ et de S peuvent alors être calculées.

Cas particuliers

Dans des configurations géométriques particulières l'expression du rabattement (1) valable pour

$$t < \left[\frac{(2b - r\beta)^2 S/b}{20K_v} \right]$$

peut être mise sous la forme simplifiée suivante :

$$s = C M(u, \beta) \quad (1')$$

où C et β sont des constantes qui dépendent des paramètres géométriques du système d'écoulement considéré :

1. Le puits de pompage est crépiné sur toute sa profondeur de pénétration ($d=0$) et la profondeur de pénétration du piézomètre est égale à celle du puits ($z = 1$). L'expression (1) se réduit à :

$$s = \frac{Q}{8\pi K_h l} M \left(u, \frac{2al}{r} \right) \quad (1'a)$$

2. Si, d'autre part, le piézomètre a une pénétration nulle ($z' = 0$)

$$s = \frac{Q}{4\pi K_h l} M \left(u, \frac{al}{r} \right) \quad (1'b)$$

3. Dans le cas où $l = 3d$ et $z = d$ (cf. fig. 3, page 7)

$$s = \frac{3Q}{16\pi K_h l} M \left(u, \frac{4al}{3r} \right) \quad (1'c)$$

1.1.2. Solution après un temps de pompage relativement long : $t > \frac{bS}{2K_v}$

$$s = \frac{Q}{4\pi K_h b} \left[W(u) + f_s \left(\frac{r}{b}, \frac{l}{b}, \frac{d}{b}, \frac{z}{b} \right) \right] = \frac{0,08Q}{T} \left[F(u') + f_s \left(\frac{r}{b}, \frac{l}{b}, \frac{d}{b}, \frac{z}{b} \right) \right] \quad (2)$$

$$\text{où } f_s = \frac{4b}{\pi(1-d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_0 \left(\frac{n\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_v}{K_h}} \right) \left(\sin \frac{n\pi l}{b} - \sin \frac{n\pi d}{b} \right) \cos \frac{n\pi z}{b} \quad (2')$$

Nota : les angles sont exprimés en radians ($1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,3^\circ$)

Remarques :

La fonction f_s , étant indépendante du temps, a une valeur constante pour un piézomètre donné. L'expression (2) montre alors qu'au delà d'un temps $t = \frac{bS}{2K_v}$, l'effet de pénétration partielle sur la courbe des rabattements en fonction du temps se réduit à une translation d'une valeur constante égale à

$$\frac{0,08 Q}{T} \times f_s \left(r/b, l/b, d/b, z/b \right)$$

par rapport à la courbe des rabattements observée dans les conditions de pénétration totale. Autrement dit, l'effet de pénétration partielle a atteint sa valeur maximale. Il en résulte que pour $t > \frac{bS}{2K_v}$ et lorsque les conditions d'approximation semi-logarithmiques sont satisfaites ($\frac{1}{u} > 10$) le report des rabattements en fonction du logarithme du temps de pompage donnera une droite de pente $i = \frac{0,183 Q}{T}$.

Application à l'interprétation des pompages d'essai

Méthode :

- reporter les rabattements s observés dans un piézomètre en fonction du temps de pompage t en coordonnées semi-logarithmiques et tracer la droite finale ;
- calculer la pente i de cette droite et déterminer le temps t_p correspondant au point de la droite d'ordonnée $s = 0$ (voir fig. 4) ;
- calculer la transmissivité T suivant l'expression :

$$T = \frac{0,183 Q}{i}$$

- calculer la valeur de la fonction f_s (quelques termes de la série sont généralement suffisants) ;
- calculer $\exp(f_s)$ en se servant des tables appropriées (Annexe 7) et calculer le coefficient d'emmagasinement S suivant l'expression :

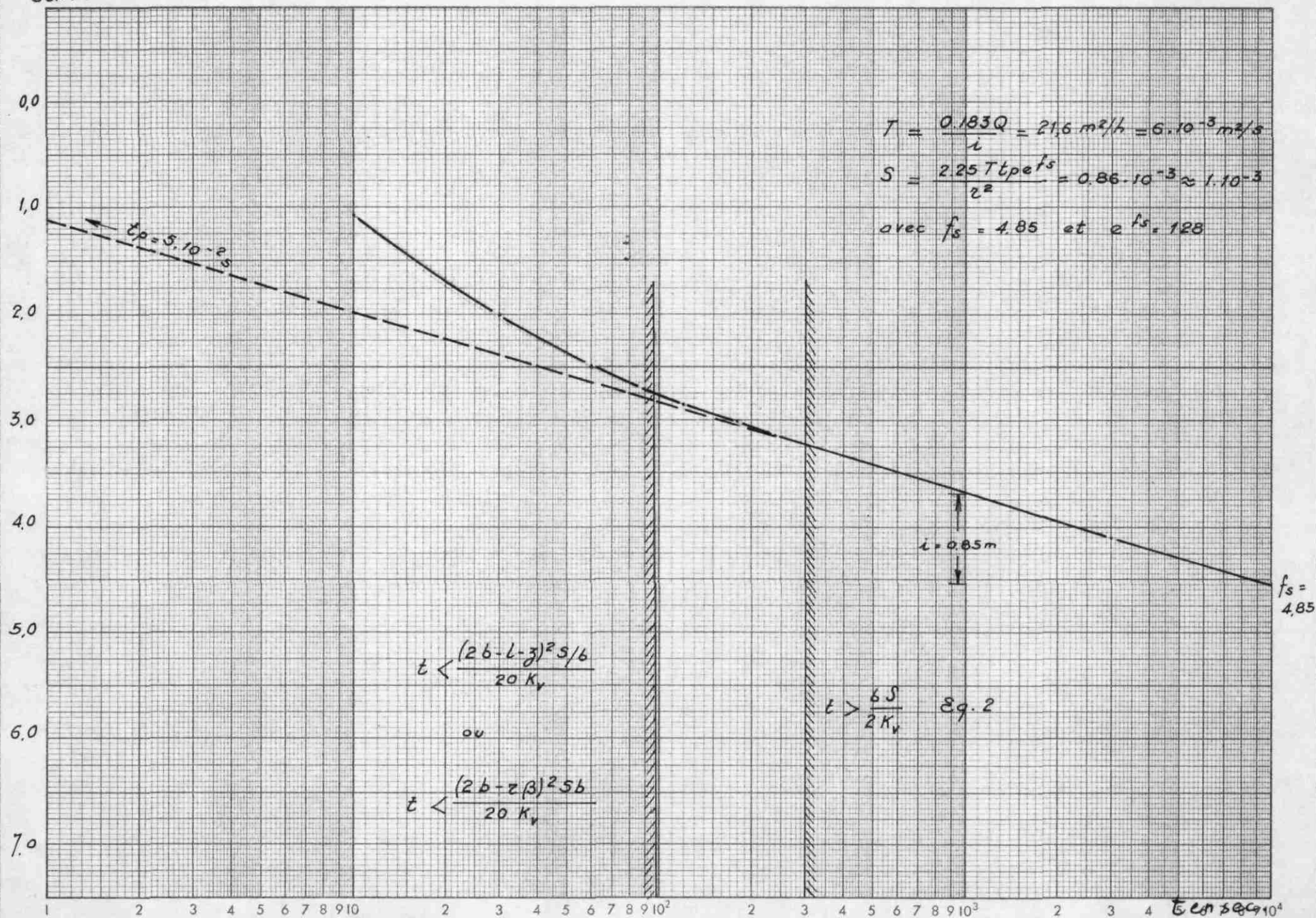
$$S = \frac{2,25 \times T \times t_p \times e^{f_s}}{r^2}$$

1.2. Rabattements dans les piézomètres crépinés

Le niveau de l'eau dans un piézomètre crépiné entre les profondeurs l' et d' correspond au niveau moyen de la partie de la nappe traversée par la crépine du piézomètre. Le rabattement moyen $\bar{s}$ s'obtient en intégrant les équations présentées pour les piézomètres ponctuels en fonction de z entre les limites d' et l' et en divisant le résultat par $(l' - d')$. Toutefois, lorsque $l'/l < 2$ on obtient des résultats d'une précision suffisante pour les applications pratiques à partir des expressions (1) et (2) en remplaçant z par $0,5(l' + d')$.

De même, si $\frac{r}{l} \sqrt{\frac{K_v}{K_h}} > 1$ et $l'/l < 1$, le rabattement moyen peut, pour toutes les applications pratiques, être considéré comme celui fourni par l'expression (1) avec la valeur de z prise arbitrairement entre l' et 0. Ce choix se fait généralement de manière à simplifier l'expression

Courbe de rabattement observée dans un piézomètre situé à 10 m. (autres données: $b = 60\text{m}$, $l = 9\text{m}$, $d = 3\text{m}$,
 Sen m $l' = 5\text{m}$, $d' = 1\text{m}$, $Q = 100\text{ m}^3/\text{h}$)



qui, dans certains cas, peut prendre la forme de l'équation (1'). Par exemple, si $l = 3d$, le choix de $z = d$ réduit l'expression (1) à l'expression (1'c). De même, si $d = 0$, le choix de $z = 0$ conduit à l'équation (1'b) et le choix de $z = 1$ à l'équation (1'a).

2. RABATTEMENTS A LA PAROI DU Puits DE POMPAGE

Il a été démontré que le niveau de l'eau à la paroi d'un puits de pompage (qui ne sera égal au niveau mesuré dans le puits que si les pertes de charges dues au puits sont négligeables) peut être calculé d'après les expressions du rabattement établies pour les piézomètres en donnant à z la valeur de $0,5(1 + d)$ correspondant approximativement à la cote de dépression maximale et en introduisant r_p à la place de r , r_p étant le rayon efficace du puits.

Cas particulier :

Il est fréquent que le puits soit crépiné sur toute sa hauteur de pénétration.

Dans ce cas, l'équation du rabattement à la surface d'entrée du puits de pompage se trouve considérablement simplifiée :

* Pour $t > \frac{Sb}{2K_v}$, cette équation est donnée par l'équation (2) pour $r = r_p$, $z = 0$ et $d = 0$.

Lorsqu'en plus $\frac{1}{r_p} \sqrt{\frac{K_h}{K_v}} > 10$ et $0 \leq 1/b \leq 0,5$, ce que l'on obtient généralement en pratique, l'équation du rabattement au puits peut s'écrire

$$s_p = \frac{Q}{4\pi T} [W(u) + F] \quad (3)$$

$$\text{où } F = \frac{2b}{1} \left[\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ln \left(\frac{2a1}{r_p}\right) - \frac{1}{b} \ln \left(\frac{2b}{1}\right) - 0,423 \frac{1}{b} + \ln \left(\frac{2b + 1}{2b - 1}\right) \right]$$

$$\text{avec } a = \sqrt{\frac{K_h}{K_v}}.$$

* Pour $t < \frac{Sb \left(1 - \frac{1}{2b}\right)^2}{5K_v}$ le rabattement à la paroi d'un puits crépiné sur toute sa profondeur de pénétration est, d'après l'expression (1), pour $d = 0$ et $z = 0$:

$$s_p = \frac{Q}{4\pi K_h l} M \left(u, \frac{a1}{r_p}\right) \quad (4)$$

3. CAS DES PIEZOMETRES PENETRANT L'AQUIFERE DE LA MEME FACON QUE LE Puits DE POMPAGE

Lorsque le puits et le piézomètre sont crépinés dans la même partie de l'aquifère (voir fig. 5), entre la profondeur d et la base de l'aquifère,

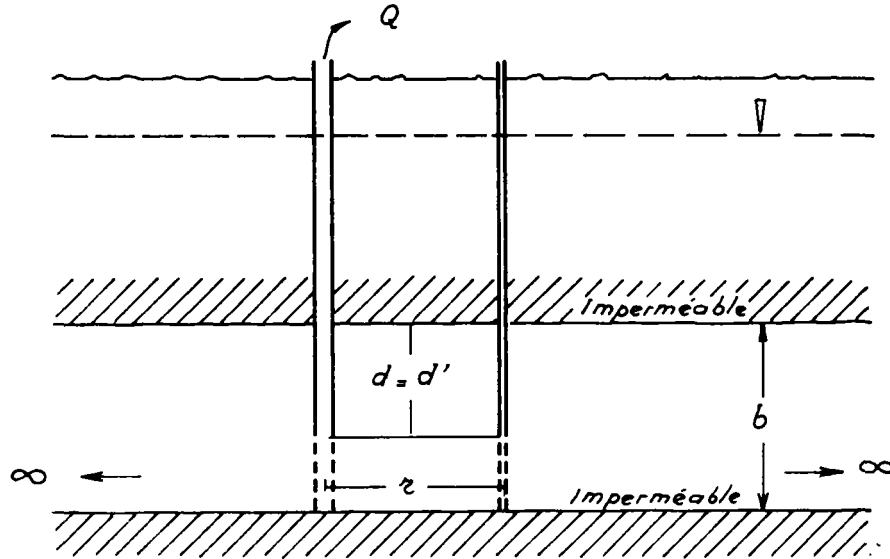


Figure 5 - Cas d'un piézomètre pénétrant une nappe captive de la même façon que le puits de pompage.

la solution suivante a été donnée par HANTUSH (référence 5) :

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \left[\int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du + \frac{2b^2}{\pi^2 (b-d)^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \sin \left(\frac{n\pi d}{b} \right) \right. \\ \left. \times \int_u^\infty \frac{1}{y} \exp \left(\frac{-y - \left(\frac{K_v}{K_h} \right) \left(\frac{n\pi r}{b} \right)^2}{4y} \right) dy \right] \quad (5)$$

Dans cette équation le rabattement s est la somme du rabattement produit par le puits pénétrant totalement l'aquifère et du rabattement additionnel dû à l'effet de la pénétration partielle. En exprimant cette somme symboliquement par le terme $W(u, \omega, \gamma)$, l'équation peut être présentée sous la forme abrégée suivante :

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u, \omega, \gamma) = \frac{0,08 Q}{T} W(u, \omega, \gamma) \quad (6)$$

où : $u = \frac{r^2 S}{4Tt}$; γ = degré de pénétration ;

ω = soit r/b dans le cas d'un aquifère captif isotrope,
soit $r/b \sqrt{K_v/K_h}$ dans le cas d'un aquifère captif anisotrope.

Les valeurs de cette fonction ont été calculées par A. VISOCKY pour des valeurs pratiques de u et de ω et les valeurs de γ égales à 0,25, 0,50 et 0,75 (voir annexe 3). Les courbes types de $W(u, \omega, \gamma)$ en fonction de $\frac{1}{u}$ sont tracées en annexes 4, 5 et 6.

Application à l'interprétation des données de pompage

1) Cas d'un aquifère isotrope

- On reportera les rabattements observés dans le piézomètre, en fonction du temps, en coordonnées bi-logarithmiques et on superposera la courbe obtenue sur la courbe type de $\omega = r/b$ et γ appropriée en maintenant les axes des coordonnées parallèles.
- On relèvera dans le système d'axes des deux graphiques les coordonnées d'un point : $W(u, \omega, \gamma)$, $\frac{1}{u}$, s et t .
- On calculera :
 - . la transmissivité T suivant l'expression :

$$T = \frac{0,08 Q}{s} W(u, \omega, \gamma)$$

avec les valeurs relevées de $W(u, \omega, \gamma)$ et s ;

- . le coefficient d'emmagasinement suivant l'expression :

$$S = \frac{4Tt}{r^2 \frac{1}{u}}$$

avec les valeurs relevées de t et de $\frac{1}{u}$ et la valeur de T calculée.

2) Cas d'un aquifère anisotrope

Lorsque l'aquifère est anisotrope, la superposition de la courbe observée sur une des courbes types devient plus délicate, car on connaît rarement la valeur de l'anisotropie et par conséquent la valeur de

$$\omega = \frac{r}{b} \sqrt{\frac{K_v}{K_h}} .$$

On ne sait donc pas a priori quelle courbe type on doit utiliser.

Dans certains cas le parallélisme des courbes types est tel (pour $\gamma = 0,75$ ou même pour $\gamma = 0,50$) que la superposition sans un choix préalable du paramètre $r/b \sqrt{K_v/K_h}$ devient hasardeuse.

Remarque : Cette solution, présentée pour un cas particulier et sans restriction des limites de temps, a l'avantage d'être d'un emploi simple dans le cas d'un aquifère captif isotrope.

4. REMARQUES GENERALES SUR L'EFFET DE LA PENETRATION PARTIELLE

Pour mettre en évidence les effets de la pénétration partielle et illustrer les remarques générales que l'on peut formuler à ce sujet, on a porté sur les figures 6 à 8 les courbes de variation des rabattements en fonction du temps, calculées au moyen des formules précédentes et relatives au cas type suivant :

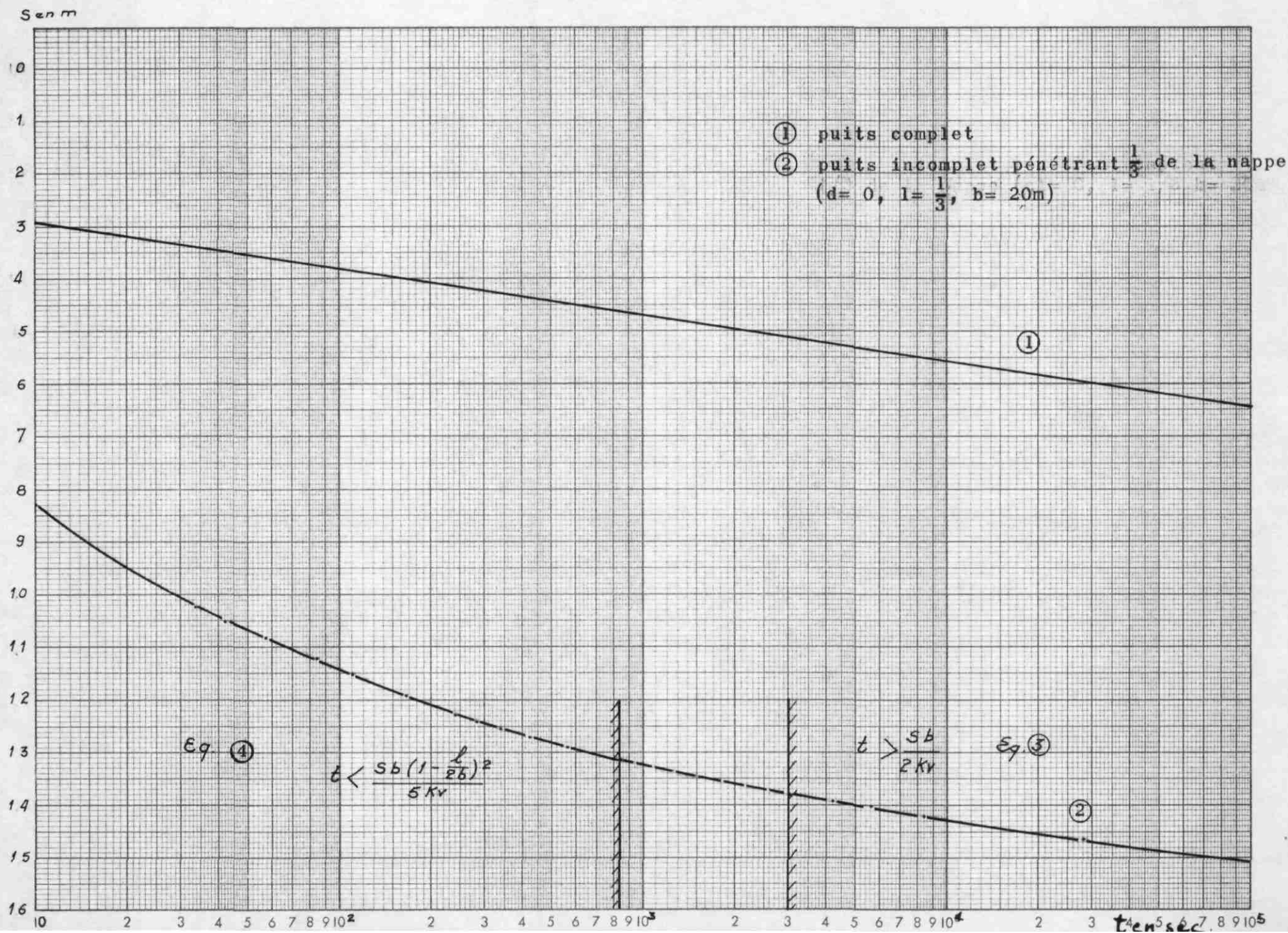
- couche aquifère d'épaisseur $b = 60$ m

$$\begin{aligned} K_h &= 10^{-4} \text{ m/s} & \text{donc } T &= 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \\ K_v &= 10^{-5} \text{ m/s} \\ \text{et } S &= 10^{-3} \end{aligned}$$

- puits de pompage incomplet : $d = 0$, $l = b/3 = 20$ m et $r_p = 0,2$ m
- débit constant $Q = 100 \text{ m}^3/\text{h}$.

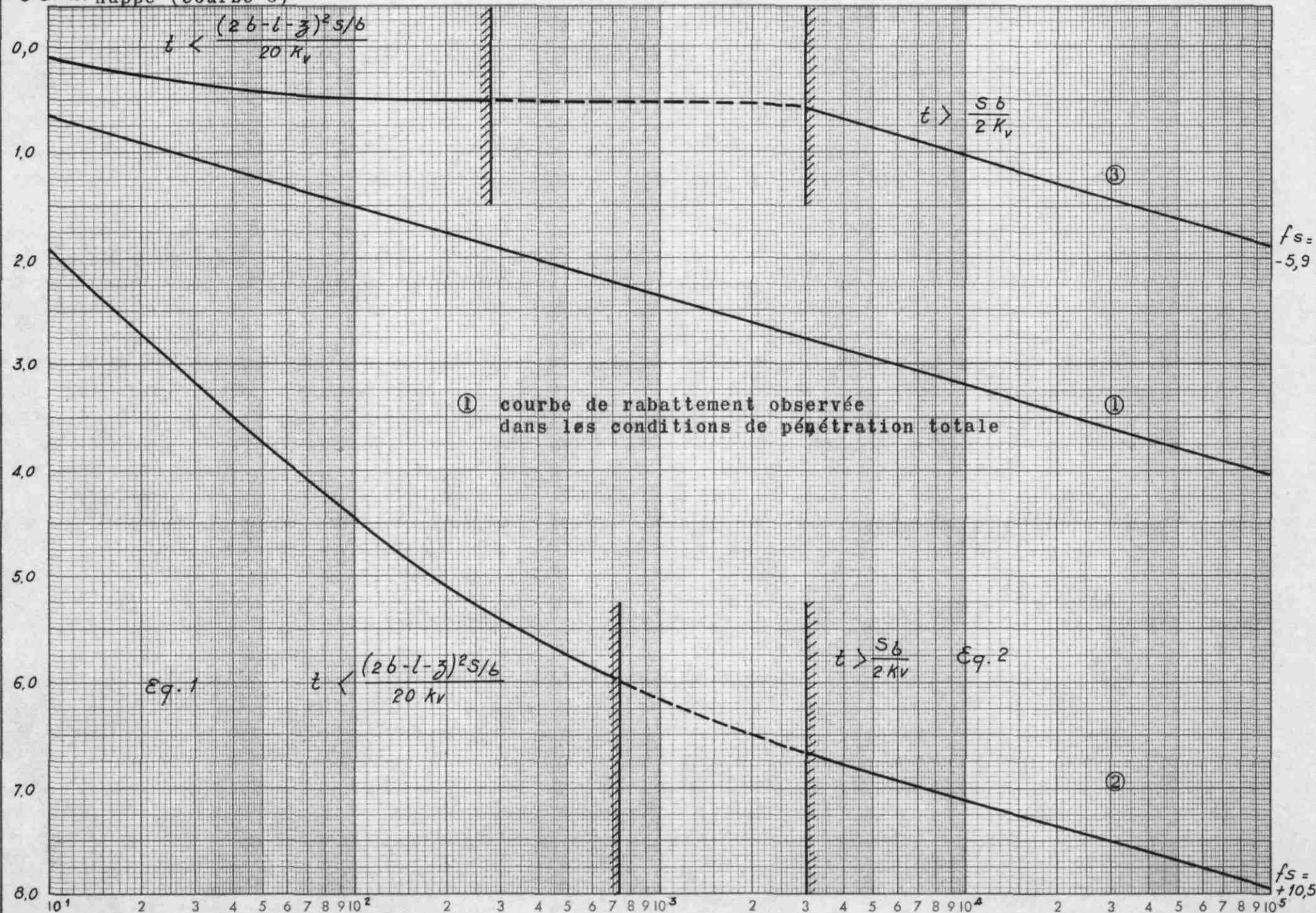
L'examen de ces figures appelle les remarques suivantes :

- Le rabattement observé dans un puits de pompage à pénétration partielle est bien évidemment supérieur à celui observé dans un puits à pénétration complète exploité au même débit (fig. 6). Les pertes de charges supplémentaires dues à la pénétration partielle croissent en fonction du temps jusqu'à leur valeur maximale pour $t \geq \frac{Sb}{2K_v}$.
- Le rabattement observé dans les piézomètres situés à $r < 1,5 b \sqrt{K_h/K_v}$ et non crépinés sur toute l'épaisseur de la nappe est :
 - . plus fort que celui qui aurait été observé dans les conditions de pénétration complète, lorsque le piézomètre et le puits de pompage sont crépinés dans la même zone de l'aquifère (voir courbe 2 de la fig. 7) ;
 - . plus faible que celui qui aurait été observé dans les conditions de pénétration complète, lorsque le piézomètre n'est pas crépiné dans la même zone de l'aquifère que le puits (par exemple le puits capte la partie inférieure de l'aquifère et le piézomètre est crépiné dans la partie supérieure de l'aquifère(ou vice-versa) (voir courbe 3 de la fig. 7).
- Deux piézomètres également éloignés du puits de pompage peuvent indiquer des rabattements différents (voir fig. 7) et il est même possible que, selon la longueur et la position dans l'espace de la partie crépinée du tubage, un piézomètre plus éloigné enregistre un rabattement plus fort.

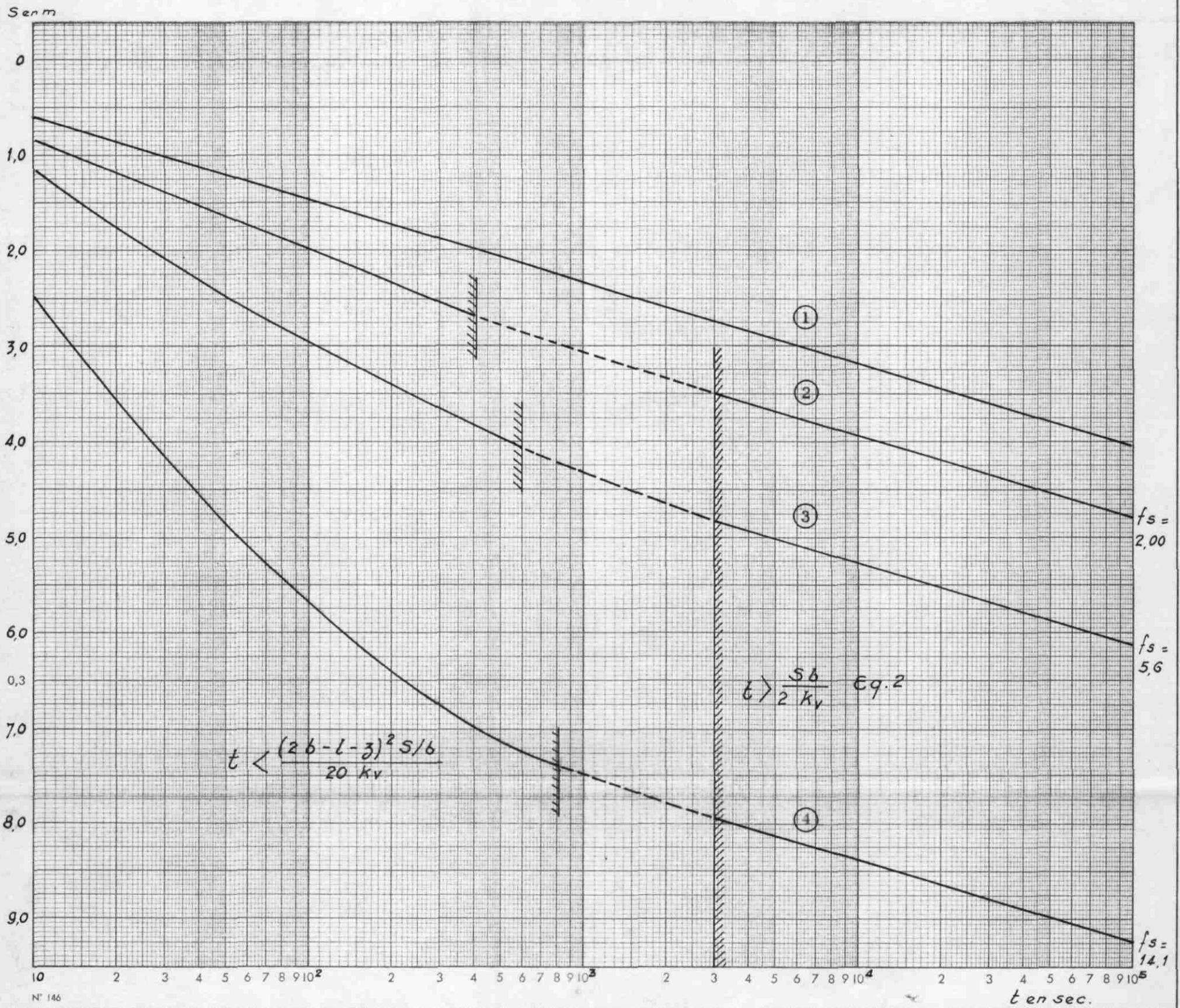


EFFET DE LA PENETRATION PARTIELLE DU PUIS DE L'IMPAGE CAPTANT LE 1/3 INFERIEUR DE LA NAPPE
SUR LE RABATTEMENT DANS DEUX PIEZOMETRES SITUES CHACUN A 5m DU PUIS MAIS CREPINES : l'un dans la
partie inférieure de la nappe comme le puits (courbe 2); l'autre dans la partie supérieure de la
nappe (courbe 3)

S en m. nappe (courbe 3)



EFFET DES DIFFERENTS DEGRES DE PENETRATION DU PUIT DE POMPAGE: 0,25b (courbe 4), 0,50b (courbe 3), 0,75b (courbe 2), 1,00b (courbe 1) SUR LE RABATTEMENT A UNE DISTANCE DONNEE ($r=5m$, $d'=0$, $l'=10m$)



- Quel que soit l'emplacement des piézomètres et la position dans l'espace de leurs tubages crépinés, les courbes $s = f(\log t)$, pour des valeurs du temps relativement élevées ($t > \frac{Sb}{2K_v}$), sont des droites de même pente sur graphique semi-logarithmique. Cette pente est la même que si le puits de pompage traversait complètement la nappe. Elle ne dépend que de la transmissivité de la couche aquifère (voir fig. 7 et 8).
- Lorsque la période d'observation n'est pas assez longue pour que s'établisse la variation en ligne droite sur diagramme semi-logarithmique, les courbes peuvent avoir la même allure générale que celle des courbes correspondant aux cas de pénétration complète et être interprétées à tort par les formules de THEIS et de JACOB. Dans d'autres cas, les effets de la pénétration partielle ressemblent à ceux provoqués par une réalimentation soit par limite à niveau d'eau constant, soit par drainance ou encore aux effets de l'égouttement dans les nappes libres. Des effets comparables sont observés aussi lorsque le puits traverse complètement une nappe en pente ou une nappe d'épaisseur non uniforme.

Suite à ces remarques, deux conclusions peuvent être formulées :

- Il est absolument nécessaire d'avoir des renseignements suffisants concernant le système d'écoulement de l'aquifère étudié par pompage, car on peut interpréter de manière totalement différente les observations faites sur les tendances montrées par les courbes de rabattements et aboutir à des résultats erronés.
- Lors de l'établissement du programme d'un pompage d'essai ayant pour but le calcul des paramètres T et S, dans des conditions de pénétration partielle, il est très recommandé de prévoir une durée de pompage suffisante pour que l'on puisse observer la phase ultime de l'évolution des rabattements qui, seule, conduit à une interprétation facile en coordonnées semi-logarithmiques (droite) et fournit au moins un paramètre sûr : la transmissivité T (car l'anisotropie, dont l'ignorance gêne l'interprétation du début de pompage, même au vu du calcul de T, n'influence pas la pente de la droite finale). Cette durée devrait être supérieure au moins 10 fois à $t = \frac{Sb}{2K_v}$.

B I B L I O G R A P H I E

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

1. HANTUSH M.S.
Drawdown around a partially penetrating well.
A.S.C.E., paper n° 3303, vol. 127, 1962, part I.
2. HANTUSH M.S.
Aquifer tests on partially penetrating wells.
A.S.C.E., paper n° 3304, vol. 127, 1962, part I.
3. HANTUSH M.S.
Puits ne pénétrant que partiellement les nappes artésiennes.
Hydraulique des puits, 1964, traduction : DS 67 A 119, pp. 71-85.
4. KRUSEMAN G.P., RIDDER N.A. de
Partially penetrated aquifers.
Analysis and evaluation of pumping test data, pp. 146-155, 1970.
5. WALTON W.C.
Unsteady state flow in nonleaky artesian aquifer with partially penetrating wells.
Groundwater resource evaluation, pp. 137-143, 1970.
6. WALTON W.C.
Partial penetration.
Selected analytical methods for well and aquifer evaluation, pp. 7-8, 1962.
7. Effect of partial penetration.
in Ground water and wells, Ed. E.E. Johnson inc. St-Paul, Minnesota, USA,
1966, pp. 133-136.
8. JACOB C.E.
Rectification des baisses de niveau causées par le pompage d'un puits pénétrant moins de la totalité de l'épaisseur d'une nappe aquifère.
BENTOLL R.
Hydraulique des eaux souterraines.
Traduction BRGM n° 4657.
9. CHEBOTAREV J.J.
Perfect and imperfect wells.
Water eng., G.B., 1954, 58, n° 695.

10. HAZAN R.
Contribution à l'explication des phénomènes intervenant lors d'un pompage dans un forage n'atteignant pas l'imperméable.
Extrait de "La technique de l'eau", mai 1960.
11. WEN HSIUNG LI, BOCK P., BENTON G.S.
A new formula for flow into partially penetrating wells in aquifers.
Transaction american geophysical union, v. 35, n° 5, 1954.
12. BRILLANT J.
Débit des puits cylindriques pénétrant partiellement la nappe aquifère.
La houille blanche, numéro spécial B, 1962.
13. LAOUI J.
Calcul des débits de puits incomplets.
La houille blanche, août-sept. 1963, n° 5.
14. VIBERT A.
Débit des ouvrages de captage imparfaits ou incomplets.
Techniques et sciences municipales. l'Eau, mai 1970.
15. SHARMA S.N.P.
Les phénomènes d'interaction entre des puits pénétrant partiellement dans une nappe artésienne.
Journal des recherches hydrauliques, vol. 10, 1972, n° 7.
16. GOURIERES D. de
Détermination du débit des puits incomplets de nappes libres foncés en terrain isotrope et anisotrope.
Bull. of the International association of hydrological sciences, XVII, 3, 10/1972.
17. KIRKHAM Don
Exact theory of flow into a partially penetrating well.
Journal of geophysical research, vol. 64, n° 9, 1959.
18. STERNBERG J.M.
Efficiency of partially penetrating wells.
Ground water, vol. 11, n° 3, May - June 1973.
19. HUISMAN L.
Ground water recovery.
Winchester press, New-York, 1972, p. 131.
20. BRONS F., MARTING V.E.
The effect of restricted fluid entry on well productivity.
Journal of petroleum technology, February 1961, pp. 172-174.

Hydraulics of Wells

TABLE IV - Values of the Function $M(\mu, \beta)$

β	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	
u	0	0.1997	0.3974	0.5953	0.7901	0.9624	1.1376	1.3053	1.4653	1.6177	1.7627	2.0319	2.2759	2.4979	2.7009	2.8872
10^{-6}	1	0.1994	0.3969	0.5907	0.7792	0.9613	1.1393	1.3037	1.4635	1.6157	1.7605	2.0292	2.2728	2.4943	2.6968	2.8627
	2	0.1993	0.3967	0.5904	0.7788	0.9608	1.1357	1.3031	1.4628	1.6148	1.7595	2.0281	2.2715	2.4929	2.6951	2.8609
	3	0.1993	0.3966	0.5902	0.7785	0.9605	1.1353	1.3026	1.4622	1.6142	1.7588	2.0272	2.2705	2.4917	2.6938	2.8794
	4	0.1992	0.3965	0.5900	0.7783	0.9602	1.1349	1.3022	1.4617	1.6137	1.7582	2.0265	2.2696	2.4907	2.6927	2.8782
	5	0.1992	0.3964	0.5898	0.7780	0.9599	1.1346	1.3018	1.4613	1.6132	1.7577	2.0259	2.2689	2.4899	2.6918	2.8772
	6	0.1991	0.3963	0.5897	0.7779	0.9596	1.1343	1.3014	1.4609	1.6127	1.7572	2.0253	2.2682	2.4891	2.6909	2.8762
	7	0.1991	0.3962	0.5895	0.7777	0.9594	1.1341	1.3011	1.4605	1.6123	1.7568	2.0248	2.2676	2.4884	2.6901	2.8753
	8	0.1990	0.3961	0.5894	0.7775	0.9592	1.1338	1.3009	1.4602	1.6120	1.7563	2.0243	2.2670	2.4877	2.6894	2.8745
	9	0.1990	0.3960	0.5893	0.7774	0.9590	1.1336	1.3006	1.4599	1.6116	1.7560	2.0238	2.2665	2.4871	2.6887	2.8737
	10^{-5}	1	0.1989	0.3959	0.5892	0.7772	0.9588	1.1334	1.3003	1.4596	1.6113	1.7556	2.0234	2.2660	2.4865	2.6880
2		0.1987	0.3954	0.5883	0.7760	0.9574	1.1318	1.2983	1.4572	1.6086	1.7526	2.0198	2.2618	2.4818	2.6827	2.8671
3		0.1984	0.3949	0.5876	0.7751	0.9562	1.1302	1.2967	1.4554	1.6066	1.7504	2.0171	2.2587	2.4782	2.6786	2.8625
4		0.1982	0.3945	0.5871	0.7744	0.9553	1.1291	1.2953	1.4539	1.6049	1.7485	2.0148	2.2560	2.4751	2.6752	2.8587
5		0.1981	0.3942	0.5866	0.7737	0.9544	1.1281	1.2941	1.4526	1.6034	1.7468	2.0128	2.2536	2.4724	2.6721	2.8553
6		0.1979	0.3939	0.5861	0.7731	0.9537	1.1271	1.2931	1.4513	1.6020	1.7452	2.0110	2.2515	2.4700	2.6694	2.8523
7		0.1978	0.3936	0.5857	0.7725	0.9530	1.1263	1.2921	1.4502	1.6007	1.7438	2.0093	2.2495	2.4677	2.6669	2.8495
8		0.1976	0.3933	0.5853	0.7720	0.9523	1.1255	1.2912	1.4492	1.5996	1.7425	2.0077	2.2477	2.4657	2.6645	2.8469
9		0.1974	0.3931	0.5849	0.7715	0.9517	1.1248	1.2903	1.4482	1.5984	1.7413	2.0062	2.2460	2.4637	2.6623	2.8444
10^{-4}		1	0.1973	0.3929	0.5846	0.7710	0.9511	1.1241	1.2895	1.4473	1.5974	1.7402	2.0049	2.2444	2.4619	2.6603
	2	0.1965	0.3910	0.5818	0.7673	0.9485	1.1185	1.2830	1.4398	1.5900	1.7308	1.9935	2.2313	2.4459	2.6434	2.8234
	3	0.1958	0.3896	0.5796	0.7644	0.9429	1.1142	1.2780	1.4341	1.5825	1.7236	1.9850	2.2212	2.4354	2.6305	2.8091
	4	0.1952	0.3883	0.5778	0.7620	0.9398	1.1106	1.2737	1.4292	1.5771	1.7176	1.9778	2.2128	2.4258	2.6197	2.7970
	5	0.1946	0.3873	0.5762	0.7599	0.9372	1.1074	1.2700	1.4250	1.5723	1.7123	1.9714	2.2053	2.4172	2.6101	2.7884
	6	0.1940	0.3863	0.5748	0.7580	0.9348	1.1045	1.2666	1.4211	1.5680	1.7075	1.9656	2.1986	2.4095	2.6014	2.7768
	7	0.1937	0.3854	0.5740	0.7564	0.9326	1.1018	1.2628	1.4176	1.5640	1.7030	1.9603	2.1926	2.4025	2.5934	2.7679
	8	0.1933	0.3848	0.5732	0.7545	0.9305	1.0994	1.2607	1.4143	1.5603	1.6989	1.9554	2.1856	2.3959	2.5859	2.7587
	9	0.1929	0.3844	0.5720	0.7530	0.9288	1.0970	1.2579	1.4112	1.5568	1.6951	1.9507	2.1812	2.3897	2.5791	2.7519
	10^{-3}	1	0.1925	0.3831	0.5699	0.7515	0.9267	1.0948	1.2554	1.4083	1.5535	1.6914	1.9483	2.1761	2.3838	2.5725
2		0.1896	0.3772	0.5611	0.7397	0.9120	1.0771	1.2347	1.3845	1.5270	1.6819	1.9109	2.1348	2.3367	2.5195	2.6857
3		0.1873	0.3727	0.5543	0.7307	0.9007	1.0636	1.2169	1.3666	1.5066	1.6593	1.8838	2.1032	2.3006	2.4788	2.6406
4		0.1854	0.3689	0.5486	0.7231	0.8912	1.0521	1.2056	1.3513	1.4895	1.6203	1.8610	2.0766	2.2702	2.4447	2.6027
5		0.1837	0.3655	0.5435	0.7163	0.8828	1.0421	1.1938	1.3379	1.4744	1.6035	1.8409	2.0532	2.2434	2.4166	2.5693
6		0.1822	0.3625	0.5390	0.7103	0.8752	1.0330	1.1832	1.3258	1.4608	1.5884	1.8228	2.0320	2.2193	2.3875	2.5393
7		0.1808	0.3597	0.5348	0.7047	0.8682	1.0246	1.1735	1.3147	1.4463	1.5745	1.8061	2.0126	2.1962	2.3628	2.5117
8		0.1795	0.3571	0.5310	0.6995	0.8618	1.0169	1.1645	1.3044	1.4367	1.5616	1.7907	1.9946	2.1756	2.3395	2.4861
9		0.1783	0.3547	0.5273	0.6947	0.8557	1.0096	1.1560	1.2947	1.4258	1.5495	1.7782	1.9777	2.1737	2.3379	2.4620
10^{-2}		1	0.1772	0.3524	0.5239	0.6901	0.8500	1.0027	1.1480	1.2855	1.4155	1.5381	1.7625	1.9617	2.1391	2.2975
	2	0.1680	0.3340	0.4962	0.6533	0.8040	0.9476	1.0836	1.2121	1.3329	1.4484	1.6527	1.8340	1.9935	2.1342	2.2587
	3	0.1610	0.3200	0.4783	0.6253	0.7691	0.9057	1.0349	1.1564	1.2703	1.3770	1.5697	1.7376	1.8839	2.0116	2.1233
	4	0.1551	0.3083	0.4578	0.6020	0.7400	0.8708	0.9942	1.1100	1.2183	1.3193	1.5008	1.6577	1.7932	1.9103	2.0117
	5	0.1500	0.2961	0.4425	0.5817	0.7146	0.8498	0.9598	1.0700	1.1750	1.2659	1.4410	1.5884	1.7147	1.8220	1.9156
	6	0.1455	0.2890	0.4289	0.5649	0.6919	0.8332	0.9336	1.0336	1.1326	1.2243	1.3677	1.5061	1.6450	1.7617	1.8516
	7	0.1413	0.2824	0.4160	0.5470	0.6713	0.7885	0.8994	1.0008	1.0958	1.1837	1.3394	1.4711	1.6021	1.7256	1.7843
	8	0.1375	0.2731	0.4050	0.5317	0.6522	0.7658	0.8720	0.9707	1.0621	1.1464	1.2951	1.4200	1.5488	1.6740	1.7448
	9	0.1339	0.2660	0.3943	0.5176	0.6346	0.7447	0.8474	0.9428	1.0308	1.1118	1.2541	1.3729	1.4716	1.5534	1.6210
	10^{-1}	1	0.1330	0.2593	0.3844	0.5043	0.6181	0.7249	0.8245	0.9187	1.0016	1.0795	1.1519	1.2390	1.4223	1.4911
2		0.1051	0.2084	0.3081	0.4030	0.4920	0.5744	0.6500	0.7186	0.7806	0.8362	0.9297	1.0029	1.0595	1.1026	1.1352
3		8.74(-2)	0.1731	0.2554	0.3331	0.4053	0.4713	0.5309	0.5842	0.6313	0.6727	0.7400	0.7899	0.8261	0.8519	0.8689
4		7.30(-2)	0.1492	0.2153	0.2801	0.3397	0.3935	0.4415	0.4837	0.5203	0.5519	0.6015	0.6363	0.6602	0.6780	0.6893
5		6.32(-2)	0.1248	0.1835	0.2381	0.2878	0.3323	0.3714	0.4052	0.4341	0.4584	0.4955	0.5203	0.5362	0.5462	0.5521
6		5.44(-2)	0.1074	0.1575	0.2039	0.2458	0.2828	0.3149	0.3423	0.3652	0.3842	0.4122	0.4300	0.4408	0.4471	0.4508
7		4.71(-2)	0.092(-2)	0.1306	0.1756	0.2111	0.2421	0.2686	0.2909	0.3093	0.3242	0.3455	0.3583	0.3657	0.3698	0.3719
8		4.10(-2)	8.06(-2)	0.1179	0.1519	0.1822	0.2082	0.2302	0.2484	0.2632	0.2750	0.2913	0.3007	0.3058	0.3084	0.3106
9		3.57(-2)	7.03(-2)	0.1026	0.1319	0.1576	0.1797	0.1980	0.2130	0.2250	0.2343	0.2468	0.2537	0.2572	0.2589	0.2597
I		1	3.13(-2)	6.14(-2)	8.95(-2)	0.1148	0.1369	0.1555	0.1709	0.1833	0.1929	0.2004	0.2101	0.2151	0.2175	0.2188
	2	9.01(-3)	1.75(-2)	2.51(-2)	3.18(-2)	3.67(-2)	4.07(-2)	4.35(-2)	4.55(-2)	4.69(-2)	4.77(-2)	4.85(-2)	4.88(-2)	4.89(-2)	4.89(-2)	4.89(-2)
	3	2.62(-3)	5.44(-3)	7.98(-3)	9.47(-3)	1.08(-2)	1.17(-2)	1.23(-2)	1.28(-2)	1.31(-2)	1.33(-2)	1.34(-2)	1.35(-2)	1.35(-2)	1.35(-2)	1.35(-2)
	4	6.20(-4)	1.78(-3)	2.44(-3)	2.96(-3)	3.31(-3)	3.53(-3)	3.66(-3)	3.72(-3)	3.72(-3)	3.72(-3)	3.72(-3)	3.72(-3)	3.72(-3)	3.72(-3)	3.72(-3)
	5	3.07(-4)	8.80(-4)	1.25(-3)	1.50(-3)	1.65(-3)	1.73(-3)	1.76(-3)	1.78(-3)	1.78(-3)	1.78(-3)	1.78(-3)	1.78(-3)	1.78(-3)	1.78(-3)	1.78(-3)
	6	1.04(-4)	1.95(-4)	2.64(-4)	3.10(-4)	3.43(-4)	3.50(-4)	3.56(-4)	3.59(-4)	3.60(-4)	3.60(-4)	3.60(-4)	3.60(-4)	3.60(-4)	3.60(-4)	3.60(-4)
	7	3.05(-5)	6.61(-5)	8.84(-5)	1.02(-4)	1.10(-4)	1.13(-4)	1.15(-4)	1.15(-4)	1.15(-4)	1.15(-4)	1.15(-4)	1.15(-4)	1.15(-4)	1.15(-4)	1.15(-4)
	8	1.23(-5)	2.26(-5)	2.99(-5)	3.42(-5)	3.63(-5)	3.72(-5)	3.75(-5)	3.75(-5)	3.75(-5)	3.75(-5)	3.75(-5)	3.75(-5)	3.75(-5)	3.75(-5)	3.75(-5)
	9	4.28(-6)	7.79(-6)	1.02(-5)	1.15(-5)	1.21(-5)	1.23(-5)	1.24(-5)	1.24(-5)	1.24(-5)	1.24(-5)	1.24(-5)	1.24(-5)	1.24(-5)	1.24(-5)	1.24(-5)
	10	1.49(-6)	2.70(-6)	3.48(-6)	3.90(-6)	4.07(-6)	4.13(-6)	4.15(-6)	4.16(-6)	4.16(-6)	4.16(-6)	4.16(-6)	4.16(-6)	4.16(-6)	4.16(-6)	4.16(-6)
Values of $M(u, \beta)$ are equal to $W(u)$ for u greater than 10 and all values of β																
The numbers in parentheses are powers of 10 by which the other numbers are multiplied. e.g. $8.74(-2)=0.087$																

3.1	1.0	2.4	1.0	4.3	4.0
-----	-----	-----	-----	-----	-----

TABLE IV (Continued)

u	β	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
0	5.0004	6.3595	6.6668	6.8333	7.1884	7.3789	7.5692	7.7431	7.9030	8.0511	8.1890	8.3180	8.4392	8.5535	8.6615	8.7641	8.8616	8.9546	9.0435	9.1286	9.2103	
10^{-6}	1	9.9738	6.5335	6.8333	6.8773	7.1279	7.3339	7.5197	7.6891	7.8445	7.9861	8.1151	8.2400	8.3577	8.4725	8.5761	8.6741	8.7671	8.8556	8.9400	9.0206	9.0977
	2	9.9645	6.5213	6.8233	6.8823	7.1111	7.3152	7.4992	7.6567	7.8023	7.9350	8.0611	8.1803	8.2935	8.4000	8.4988	8.5906	8.6759	8.7545	8.8279	8.8958	8.9580
	3	9.9573	6.5127	6.8132	6.8708	7.0983	7.3008	7.4834	7.6395	7.7810	7.9119	8.0369	8.1551	8.2673	8.3725	8.4706	8.5613	8.6456	8.7235	8.7958	8.8621	8.9194
	4	9.9513	6.5054	6.8058	6.8612	7.0873	7.2887	7.4701	7.6250	7.7659	7.8950	8.0199	8.1379	8.2481	8.3513	8.4484	8.5393	8.6236	8.7013	8.7728	8.8381	8.8985
	5	9.9460	6.5000	6.8003	6.8547	7.0797	7.2791	7.4594	7.6232	7.7731	7.9011	8.0249	8.1419	8.2511	8.3525	8.4472	8.5361	8.6193	8.6968	8.7681	8.8334	8.8938
	6	9.9413	6.4953	6.7956	6.8490	7.0731	7.2725	7.4528	7.6166	7.7665	7.8945	8.0183	8.1353	8.2445	8.3469	8.4426	8.5315	8.6147	8.6912	8.7625	8.8278	8.8882
	7	9.9367	6.4907	6.7910	6.8444	7.0685	7.2679	7.4482	7.6120	7.7619	7.8899	8.0137	8.1307	8.2399	8.3423	8.4380	8.5269	8.6091	8.6856	8.7569	8.8222	8.8826
	8	9.9326	6.4860	6.7863	6.8397	7.0638	7.2632	7.4435	7.6073	7.7572	7.8852	8.0090	8.1260	8.2352	8.3376	8.4333	8.5222	8.6044	8.6809	8.7522	8.8175	8.8779
10^{-5}	1	9.9281	6.4813	6.7816	6.8350	7.0591	7.2585	7.4388	7.5977	7.7478	7.8758	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	2	9.9235	6.4766	6.7769	6.8303	7.0544	7.2538	7.4341	7.5979	7.7478	7.8758	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	3	9.9189	6.4719	6.7722	6.8256	7.0497	7.2491	7.4294	7.5932	7.7431	7.8711	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	4	9.9143	6.4672	6.7675	6.8209	7.0450	7.2444	7.4247	7.5885	7.7384	7.8664	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	5	9.9097	6.4625	6.7628	6.8162	7.0403	7.2397	7.4199	7.5837	7.7336	7.8616	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	6	9.9051	6.4578	6.7581	6.8115	7.0356	7.2350	7.4152	7.5790	7.7289	7.8569	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	7	9.9005	6.4531	6.7534	6.8068	7.0307	7.2301	7.4103	7.5741	7.7240	7.8520	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	8	9.8959	6.4484	6.7487	6.8021	7.0258	7.2252	7.4054	7.5692	7.7191	7.8471	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
10^{-4}	1	9.8913	6.4437	6.7440	6.7974	7.0195	7.2189	7.3991	7.5629	7.7128	7.8408	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	2	9.8867	6.4390	6.7393	6.7927	7.0146	7.2140	7.3942	7.5580	7.7079	7.8359	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	3	9.8821	6.4343	6.7346	6.7880	7.0097	7.2091	7.3893	7.5531	7.7030	7.8310	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	4	9.8775	6.4296	6.7299	6.7833	7.0048	7.2042	7.3844	7.5482	7.6981	7.8261	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	5	9.8729	6.4249	6.7252	6.7786	7.0000	7.1994	7.3796	7.5434	7.6933	7.8213	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	6	9.8683	6.4202	6.7205	6.7739	6.9951	7.1945	7.3747	7.5385	7.6884	7.8164	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	7	9.8637	6.4155	6.7158	6.7692	6.9902	7.1896	7.3698	7.5336	7.6835	7.8115	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	8	9.8591	6.4108	6.7111	6.7645	6.9853	7.1847	7.3649	7.5287	7.6786	7.8066	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
10^{-3}	1	9.8545	6.4061	6.7064	6.7598	6.9804	7.1798	7.3600	7.5238	7.6737	7.8017	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	2	9.8499	6.4014	6.7017	6.7551	6.9755	7.1749	7.3551	7.5189	7.6688	7.7968	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	3	9.8453	6.3967	6.6970	6.7504	6.9708	7.1702	7.3504	7.5142	7.6641	7.7921	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	4	9.8407	6.3920	6.6923	6.7457	6.9661	7.1655	7.3457	7.5095	7.6594	7.7874	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	5	9.8361	6.3873	6.6876	6.7410	6.9614	7.1608	7.3410	7.5048	7.6547	7.7827	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	6	9.8315	6.3826	6.6829	6.7363	6.9567	7.1561	7.3363	7.5001	7.6500	7.7780	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	7	9.8269	6.3779	6.6782	6.7316	6.9520	7.1514	7.3316	7.4954	7.6453	7.7733	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	8	9.8223	6.3732	6.6735	6.7269	6.9473	7.1467	7.3269	7.4907	7.6406	7.7686	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
10^{-2}	1	9.8177	6.3685	6.6688	6.7222	6.9426	7.1419	7.3221	7.4859	7.6358	7.7638	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	2	9.8131	6.3638	6.6641	6.7175	6.9379	7.1372	7.3174	7.4812	7.6311	7.7591	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	3	9.8085	6.3591	6.6594	6.7128	6.9332	7.1325	7.3127	7.4765	7.6264	7.7544	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	4	9.8039	6.3544	6.6547	6.7081	6.9285	7.1278	7.3080	7.4718	7.6217	7.7497	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	5	9.8000	6.3500	6.6503	6.7034	6.9238	7.1231	7.3033	7.4671	7.6170	7.7450	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	6	9.7954	6.3453	6.6456	6.6986	6.9191	7.1184	7.2986	7.4624	7.6123	7.7403	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	7	9.7908	6.3406	6.6409	6.6939	6.9144	7.1137	7.2939	7.4577	7.6076	7.7356	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	8	9.7862	6.3359	6.6362	6.6892	6.9097	7.1090	7.2892	7.4530	7.6029	7.7309	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
10^{-1}	1	9.7816	6.3312	6.6315	6.6845	6.9050	7.1043	7.2845	7.4483	7.5982	7.7262	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	2	9.7770	6.3265	6.6268	6.6798	6.9003	7.0996	7.2798	7.4436	7.5935	7.7215	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	3	9.7724	6.3218	6.6221	6.6751	6.8956	7.0949	7.2751	7.4389	7.5888	7.7168	8.0000	8.1170	8.2262	8.3286	8.4243	8.5132	8.5954	8.6719	8.7432	8.8085	8.8689
	4	9.7678	6.3171	6.6174	6.6704	6.8909	7.0902															

ANNEXE 2

CALCUL AUTOMATIQUE DE LA FONCTION E :

le programme PENEPART

par

M. CANCEILL et P. PEAUDECERF

1. Fonction

Le programme PENEPART calcule les valeurs de la fonction E définie au § 1.1.1., et trace sur un appareil à dessiner BENSON 121 le graphique bi-logarithmique des courbes E(u') pour différentes valeurs du coefficient d'anisotropie a.

2. Organisation

Le programme procède à la lecture des données, à la mise en page et au tracé du cadre dans une première phase.

Dans une deuxième phase, la valeur de E est calculée et tracée pour chaque valeur de u' à partir des quatre valeurs $M(u, \beta_1)$, $M(u, \beta_2)$, $M(u, \beta_3)$, $M(u, \beta_4)$, comme défini au § 1.1.1. Cette deuxième phase est renouvelée autant de fois qu'on étudie des valeurs du coefficient d'anisotropie.

3. Calcul de M(u, β)

Il est exécuté par un sous-programme appelé MUBETA. La fonction M définie par

$$M(u, \beta) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} \operatorname{erf}(\beta\sqrt{y}) dy ,$$

où erf est la fonction "erreur" : $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx ,$

est assez délicate à calculer numériquement dès que u est voisin de zéro ; il existe heureusement un certain nombre de valeurs de u et de β pour lesquelles de bonnes approximations sont fournies par des expressions analytiques plus simples.

Ces approximations sont les suivantes :

$$- \text{ si } u \geq \frac{5}{\beta^2}, \quad M(u, \beta) \approx E_1(u)$$

(rappelons que la fonction exponentielle intégrale est définie par :

$$E_1(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy).$$

$$- \text{ si } u \leq \frac{.05}{\beta^2}, \quad M(u, \beta) \approx 2 \left[\text{Arg sh } \beta - \beta \operatorname{erf} \sqrt{u} \right]$$

- si, en outre, $\frac{.05}{\beta^2} \leq .01$, (c'est-à-dire si : $u \leq \frac{.05}{\beta^2} \leq .01$), l'expression précédente se simplifie en :

$$M(u, \beta) \approx 2 \left[\text{Arg sh } \beta - 2\beta \sqrt{\frac{u}{\pi}} \right].$$

Le programme MUBETA fait appel à ces approximations chaque fois que c'est possible.

Lorsque ce n'est pas possible, on utilise un sous-programme de quadrature numérique par la méthode des trapèzes (avec accélération de la convergence par le procédé de ROMBERG), en double précision. Cet algorithme est le seul qui fournisse une précision acceptable (de l'ordre de 10^{-3}) : des méthodes de GAUSS - LAGUERRE généralisées, toutes indiquées en théorie, ont fourni des résultats gravement erronés ; bien que des recherches soient en cours à ce sujet, leur aboutissement est incertain. La méthode des trapèzes est donc la seule praticable pour l'instant, mais le coût de sa mise en oeuvre est très élevé dès que u est faible (de l'ordre de $2 \cdot 10^{-5}$).

Il est donc fondamental, avant la mise en oeuvre du programme, d'examiner les valeurs relatives de u et de β :

- si $\beta < \sqrt{\frac{.05}{2 \cdot 10^{-5}}}$, soit $\beta \leq 50$, c'est que, pour $u \leq 2 \cdot 10^{-5}$, on aura $u \leq \frac{.05}{\beta^2}$, et donc l'approximation $M(u, \beta) = 2 \left[\text{Arg sh } \beta - \beta \operatorname{erf} \sqrt{u} \right]$ est valide, ce qui évite le coûteux calcul par la méthode des trapèzes.

- si, au contraire, $\beta \geq 50$, il faut éviter de calculer $M(u, \beta)$ pour des valeurs de u inférieures à $2 \cdot 10^{-5}$, ce qui conduirait à un "bouclage" de plusieurs heures en ordinateur.

Il faut donc $u \geq 2 \cdot 10^{-5}$, soit $u' = \frac{1}{u} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^{-5}} = 5 \cdot 10^4$. Ces bornes de variation de u' étant fixées, en puissances de 10, par les deux paramètres IALFA et IOMEGA, comme on le verra au paragraphe suivant, il faut avoir :

$$\boxed{\text{IOMEGA} \leq 4}$$

- Par sécurité, une sortie automatique du programme est prévue au delà d'un temps de calcul donné ; comme les valeurs de β sont proportionnelles à a , il est recommandé de placer les valeurs de a pour lesquelles on veut faire le calcul en ordre croissant : ainsi une éventuelle interruption du calcul pour dépassement de temps, due aux valeurs élevées de β (et donc de a), ne compromettra pas l'édition des résultats pour les valeurs faibles de β .

4. Les données

Il faut spécifier au programme PENEPART un certain nombre de paramètres caractéristiques de l'expérience ainsi que des paramètres d'édition.

Ces paramètres doivent être perforés sur trois cartes données, dans le format suivant :

carte 1

Nom	YMIN	YMAX	DIMØDY	NINTY	DIMØDX
colonnes	1 - 14	15 - 28	29 - 34	35 - 38	39 - 44
format	F14.7	F14.7	F6.2	I4	F6.2

carte 2

Nom	LGREP	DCREP	RDIST	ZPIEZO	NBANIS	IALFA	IOMEGA
colonnes	1 - 8	9 - 16	17 - 24	25 - 32	33 - 36	37 - 40	41 - 44
format	F8.2	F8.2	F8.2	F8.2	I4	I4	I4

carte 3

Nom	ANISO(1)	ANISO(2)		ANISO(NBANIS)	
colonnes	1 - 8	9 - 16		- -	
format	F8.2	F8.2		F8.2	

Signification de ces paramètres :

a) paramètres physiques :

LGREP : profondeur de pénétration (c'est le paramètre "l" de la p. II)

DCREP : profondeur de la partie non crépinée (c'est le paramètre "d" de la p. II)

RDIST : distance du point considéré au puits (c'est le paramètre "r" de la p. II)

ZPIEZO : coordonnée verticale (c'est le paramètre "z" de la p. II)
 NBANIS : nombre de coefficients d'anisotropie à prendre en compte
 (maximum 10)
 ANISO : valeurs du coefficient d'anisotropie "a" à prendre en compte
 successivement.

b) paramètres de mise en page :

YMIN, YMAX : valeurs minimales et maximales attendues de la fonction E
 DIMODY : dimension souhaitée, en cm, du module courant pour l'axe des
 ordonnées
 NINTY : nombre de modules pour l'axe des ordonnées
 DIMODX : dimension souhaitée, en cm, du module courant pour l'axe des
 abscisses
 IALFA, IOMEGA : puissances de 10 minimales et maximales entre lesquelles on
 veut faire varier u.

rappel (cf. § 3) :

- éviter les cas où IOMEGA > 4
- placer les différentes valeurs de ANISO en ordre croissant.

5. Résultats

5.1. Généralités

Les valeurs de $M(u, \beta)$ calculées par le sous-programme MUBETA, ainsi que les valeurs de E calculées dans le programme PENEPART, sont imprimées au fur et à mesure, tandis que la courbe donnant les valeurs de E en fonction de $u' = 1/u$ est dessinée au traceur.

Pour chaque calcul de $M(u, \beta)$, on imprime aussi un code indiquant la formule utilisée (cf. § 2). Les significations de ce code sont les suivantes :

- code formule = 1 : cas où $M(u, \beta)$ est calculée par :

$$M(u, \beta) = 2 \left[\text{Arg sh } \beta - \beta \operatorname{erf} \sqrt{u} \right]$$

- code formule = 2 : cas où $M(u, \beta)$ est calculée par :

$$M(u, \beta) = 2 \left[\text{Arg sh } \beta - 2\beta \sqrt{\frac{u}{\pi}} \right]$$

- code formule = 3 : cas où $M(u, \beta)$ est calculée par :

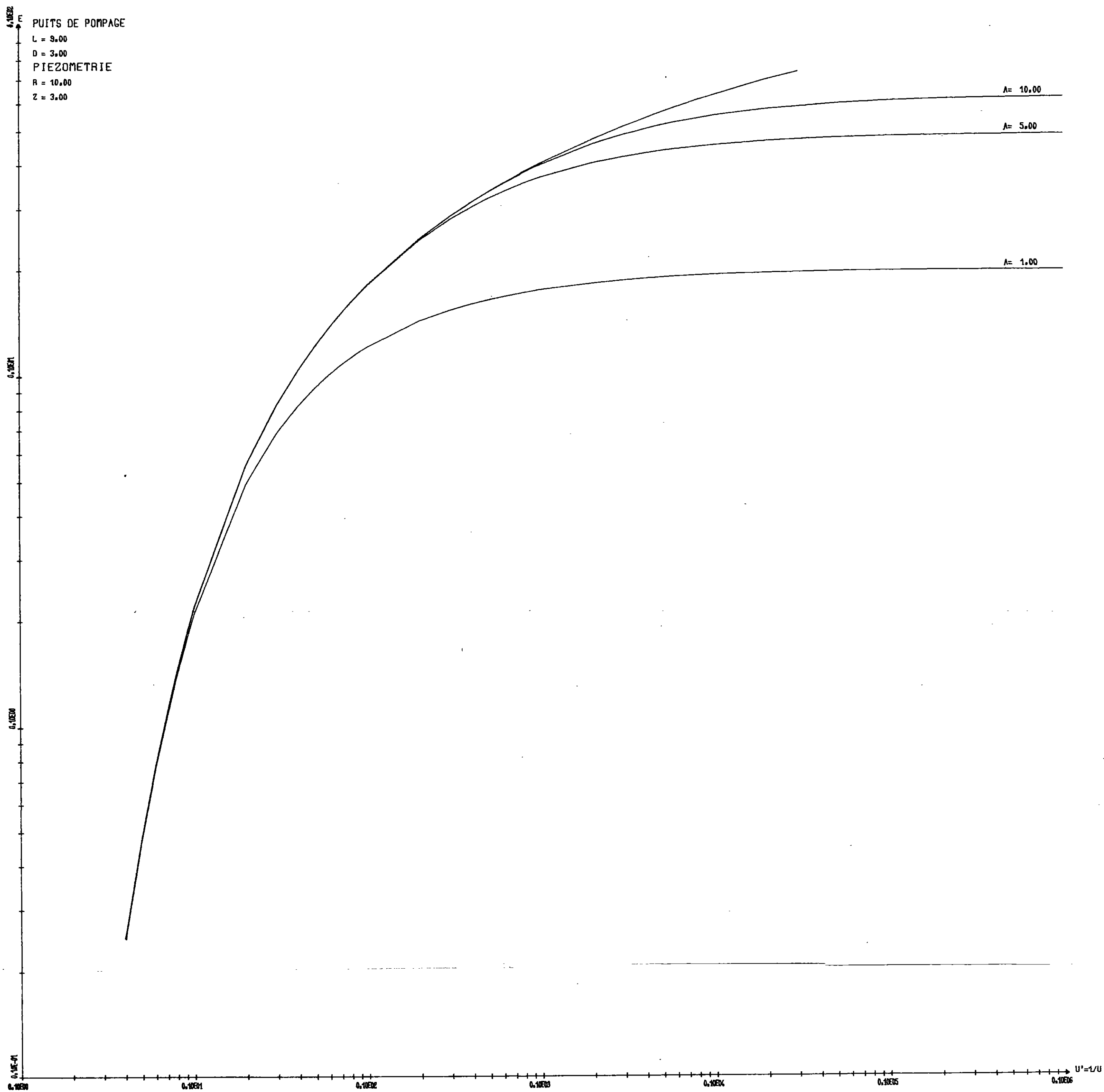
$$M(u, \beta) = E_1(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy$$

- code formule ≥ 4 : cas où $M(u, \beta)$ est calculée par la méthode des trapèzes ;
 - . si code = 4, calcul correct
 - . si code = 5, calcul incorrect (formule non convergente à la suite d'oscillations imputables aux erreurs d'arrondi)
 - . si code = 6, calcul incorrect (fonction trop irrégulière pour arriver, dans le nombre de pas choisi, à réduire l'erreur de troncature à moins de 10^{-3}).

5.2. Fac-similé des résultats

5.2.1. Graphique :

N.B. Dans l'exemple ci-après, la quatrième courbe a été interrompue pour dépassement du temps limite de 1 h.



5.2.2. Listages :

```

*****
*      PUIS DE POMPAGE      *
*      L = 9.00             *
*      D = 3.00             *
*      PIEZOMETRIE          *
*      F = 10.00            *
*      Z = 3.00             *
*      ANISOTROPIE          *
*      NOMBRE DE VALEURS DE A = 4 *
*      A( 1) = 1.00         *
*      A( 2) = 5.00         *
*      A( 3) = 10.00        *
*      A( 4) = 50.00        *
*****
SIGNIFICATION DU CODE FORMULE
SI = 1, M(U,BETA) = 2*(AFGSH(BETA) - BETA*EPF(SCFT(U)))
SI = 2, M(U,BETA) = 2*(AFGSH(BETA) - 2*BETA*SQRT(U/PI))
SI = 3, M(U,BETA) = E1(L)
SI = 4, QUADRATURE NUMERIQUE CORRECTE
SI = 5, QUADRATURE NUMERIQUE, ERREURS D'ARRONDI
SI = 6, QUADRATURE NUMERIQUE, ERREURS DE TRONCATURE

COEFFICIENT D'ANISOTROPIE A = 1.00
CODE FORMULE = 3      BETA = 1.20      U = 5.0000010      M(U,BETA) = 0.0011462
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 5.0000010      M(U,BETA) = 0.0009864
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 5.0000010      M(U,BETA) = 0.0009864
                        BETA = 0.      U = 5.0000010      M(U,BETA) = 0.
                        U = 5.0000010      1/U = 0.2000E 00      E(U) = C.1148E-02
CODE FORMULE = 4      BETA = 1.20      U = 3.3333340      M(U,BETA) = 0.0084516
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 3.3333340      M(U,BETA) = 0.0077011
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 3.3333340      M(U,BETA) = 0.0077011
                        BETA = 0.      U = 3.3333340      M(U,BETA) = 0.
                        U = 3.3333340      1/U = 0.3000E 00      E(U) = C.8452E-02
CODE FORMULE = 4      BETA = 1.20      U = 2.5000000      M(U,BETA) = 0.0247162
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 2.5000000      M(U,BETA) = 0.0215292
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 2.5000000      M(U,BETA) = 0.0215292
                        BETA = 0.      U = 2.5000000      M(U,BETA) = 0.
                        U = 2.5000000      1/U = 0.4000E 00      E(U) = C.2472E-01
CODE FORMULE = 4      BETA = 1.20      U = 2.0000000      M(U,BETA) = 0.0484223
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 2.0000000      M(U,BETA) = 0.0405567
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 2.0000000      M(U,BETA) = 0.0405567
                        BETA = 0.      U = 2.0000000      M(U,BETA) = 0.
                        U = 2.0000000      1/U = 0.5000E 00      E(U) = C.4842E-01
CODE FORMULE = 4      BETA = 1.20      U = 1.6666670      M(U,BETA) = 0.0771588
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 1.6666670      M(U,BETA) = 0.0625452
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 1.6666670      M(U,BETA) = 0.0625452
                        BETA = 0.      U = 1.6666670      M(U,BETA) = 0.
                        U = 1.6666670      1/U = 0.6000E 00      E(U) = C.7720E-01
CODE FORMULE = 4      BETA = 1.20      U = 1.4285717      M(U,BETA) = 0.1050051
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 1.4285717      M(U,BETA) = 0.0858749
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 1.4285717      M(U,BETA) = 0.0858749
                        BETA = 0.      U = 1.4285717      M(U,BETA) = 0.
                        U = 1.4285717      1/U = 0.7000E 00      E(U) =
CODE FORMULE = 4      BETA = 1.20      U = 1.2500000      M(U,BETA) =
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 1.2500000      M(U,BETA) =
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 1.2500000      M(U,BETA) =
                        BETA = 0.      U = 1.2500000      M(U,BETA) =
                        U = 1.2500000      1/U = 0.8000E
CODE FORMULE = 4      BETA = 1.20      U = 1.1111107
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 1.1111107
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 1.1111107
                        BETA = 0.      U = 1.1111107
                        U = 1.1111107      1/U =
CODE FORMULE = 4      BETA = 1.20      U = 1.0000000
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 1.0000000
CODE FORMULE = 4      BETA = 0.60      U = 1.0000000
                        BETA = 0.      U = 1.0000000

```

6. Performances

6.1. Temps

Le temps d'exécution est très dépendant des valeurs relatives de u et de β , comme on l'a déjà signalé (cf. supra, § 3). Selon, donc, les valeurs relatives de a , l , d , z et r , on pourra avoir des temps de calcul de l'ordre de 20 s ou de l'ordre de 2 h !

Dans l'exemple dont les résultats sont reproduits § 5, on a tenté de calculer E pour 4 valeurs du coefficient d'anisotropie ; les temps de calcul ont été respectivement :

pour $a = 1$	25 s
pour $a = 5$	302 s, soit un temps cumulé de 327 s
pour $a = 10$	722 s, soit un temps cumulé de 1049 s
pour $a = 50$,	le calcul n'a pu être achevé en moins de 3600 secondes.

6.2. Encombrement mémoire

De l'ordre de 60 K. octets.

6.3. Compatibilité

Dans l'état actuel des choses, PENEPART ne peut être exécuté que sur l'IBM 370-135 du B.R.G.M.

7. Listage du programme-source en FORTRAN IV

CCS FORTRAN IV 360N-FO-475 3-8	MAINPGM	DATE 04/12/74	TIME 19.16.02
C			QATP 10
C			QATP 20
C			QATP 30
C	SUBROUTINE QATR	EXTRAIT DE LA BIBLIOTHEQUE S.S.P.	
C	MODIFIEE PAR CANCEILL LE 26/2/74 POUR INCLURE UN ARGUMENT DE PLUS		
C	DANS LA FONCTION- PASSAGE EN DOUBLE PRECISION EN JUILLET 1974		
C			QATP 50
C	PURPOSE		QATP 60
C	TO COMPUTE AN APPROXIMATION FOR INTEGRAL(FCT(X), SUMMED		QATP 70
C	OVER X FROM XL TO XU).		QATP 80
C			QATP 90
C	USAGE		QATP 100
C	CALL QATR (XL,XU,EPS,NDIM,FCT,Y,IEP,AUX)		QATP 110
C	PARAMETER FCT REQUIRES AN EXTERNAL STATEMENT.		QATP 120
C			QATP 130
C	DESCRIPTION OF PARAMETERS		QATP 140
C	XL - THE LOWER BOUND OF THE INTERVAL.		QATP 150
C	XU - THE UPPER BOUND OF THE INTERVAL.		QATP 160
C	EPS - THE UPPER BOUND OF THE ABSOLUTE ERROR.		QATP 170
C	NDIM - THE DIMENSION OF THE AUXILIARY STORAGE ARRAY AUX.		QATP 180
C	NDIM-1 IS THE MAXIMAL NUMBER OF BISECTIONS OF		QATP 190
C	THE INTERVAL (XL,XU).		QATP 200
C	FCT - THE NAME OF THE EXTERNAL FUNCTION SUBPROGRAM USED.		QATP 210
C	Y - THE RESULTING APPROXIMATION FOR THE INTEGRAL VALUE.		QATP 220
C	IEP - A RESULTING ERROR PARAMETER.		QATP 230
C	AUX - AN AUXILIARY STORAGE ARRAY WITH DIMENSION NDIM.		QATP 240
C			QATP 250
C	REMARKS		QATP 260
C	ERROR PARAMETER IEP IS CODED IN THE FOLLOWING FORM		QATP 270
C	IER=0 - IT WAS POSSIBLE TO REACH THE REQUIRED ACCURACY.		QATP 280
C	NO ERROR.		QATP 290
C	IER=1 - IT IS IMPOSSIBLE TO REACH THE REQUIRED ACCURACY		QATP 300
C	BECAUSE OF ROUNDING ERRORS.		QATP 310
C	IER=2 - IT WAS IMPOSSIBLE TO CHECK ACCURACY BECAUSE NDIM		QATP 320
C	IS LESS THAN 5, OR THE REQUIRED ACCURACY COULD NOT		QATP 330
C	BE REACHED WITHIN NDIM-1 STEPS. NDIM SHOULD BE		QATP 340
C	INCREASED.		QATP 350
C			QATP 360
C	SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED		QATP 370
C	THE EXTERNAL FUNCTION SUBPROGRAM FCT(X) MUST BE CODED BY		QATP 380
C	THE USER. ITS ARGUMENT X SHOULD NOT BE DESTROYED.		QATP 390
C			QATP 400
C	METHOD		QATP 410
C	EVALUATION OF Y IS DONE BY MEANS OF TRAPEZOIDAL RULE IN		QATP 420
C	CONNECTION WITH ROMBERG'S PRINCIPLE. ON RETURN Y CONTAINS		QATP 430
C	THE BEST POSSIBLE APPROXIMATION OF THE INTEGRAL VALUE AND		QATP 440
C	VECTOR AUX THE UPWARD DIAGONAL OF ROMBERG SCHEME.		QATP 450
C	COMPONENTS AUX(I) (I=1,2,...,IEND) WITH IEND LESS THAN OR		QATP 460
C	EQUAL TO NDIM) BECOME APPROXIMATIONS TO INTEGRAL VALUE WITH		QATP 470
C	DECREASING ACCURACY BY MULTIPLICATION WITH (XU-XL).		QATP 480
C	FOR REFERENCE, SEE		QATP 490
C	(1) FILIPPI, DAS VERFAHREN VON ROMBERG-STIEFEL-BAUER ALS		QATP 500
C	SPEZIALFALL DES ALLGEMEINEN PRINZIPI VON RICHARDSON,		QATP 510
C	MATHEMATIK-TECHNIK-WIRTSCHAFT, VOL.11, ISS.2 (1984),		QATP 520
C	PP.49-54.		QATP 530
C	(2) BALER, ALGORITHM 60, CACM, VOL.4, ISS.6 (1961), PP.255.		QATP 540
C			QATP 550
C			QATP 560
C			QATP 570
C			QATP 600
C			QATP 590

0001		SUBROUTINE QADRC(XL,XL,EPS, FCT,Y,IER, BETA,*I	
0002		DOUBLE PRECISION FCT, Y,SM,DELT1,CELT2,E,H,HH,HC,XL,XU,X,P,Q	
0003		DOUBLE PRECISION AUX(1000)	
	C		QATP 620
	C	PREPARATIONS OF ROMBERG-LOOP	QATP 630
0004		NDIM=1000	
0005		AUX(1)=.5*(FCT(XL,BETA)+FCT(XU,BETA))	
0006		H=XU-XL	QATP 650
0007		IF(NDIM-1)8,E,I	QATP 660
0008	1	IF(H)2,10,2	QATP 670
	C		QATP 680
	C	NDIM IS GREATER THAN 1 AND H IS NOT EQUAL TO 0.	QATP 690
0009	2	HH=H	QATP 700
0010		F=EPS/DABS(H)	
0011		DELT2=C.	QATP 720
0012		P=1.	QATP 730
0013		JJ=1	QATP 740
0014		DO 7 I=2,NDIM	QATP 750
0015		Y=AUX(I)	QATP 760
0016		DELT1=DELT2	QATP 770
0017		FD=HH	QATP 780
0018		HH=.5*HH	QATP 790
0019		P=.5*P	QATP 800
0020		X=XL+HH	QATP 810
0021		SM=0.	QATP 820
0022		DO 3 J=1,JJ	QATP 830
0023		SM=SM+FCT(X,BETA)	
0024	3	X=X+HH	QATP 850
0025		AUX(I)=.5*AUX(I-1)+P*SM	QATP 860
	C	A NEW APPROXIMATION OF INTEGRAL VALUE IS COMPUTED BY MEANS OF	QATP 870
	C	TRAPEZOIDAL RULE.	QATP 880
	C		QATP 890
	C	START OF ROMBERGS EXTRAPOLATION METHOD.	QATP 900
0026		Q=1.	QATP 910
0027		J1=I-1	QATP 920
0028		DO 4 J=1,J1	QATP 930
0029		II=I-J	QATP 940
0030		Q=Q+Q	QATP 950
0031		Q=Q+Q	QATP 960
0032	4	ALX(II)=AUX(II+1)+(ALX(II+1)-AUX(II))/(Q-1.)	QATP 970
	C	END OF ROMBERG-STEP	QATP 980
	C		QATP 990
0033		DELT2=DABS(Y-AUX(1))	
0034		IF(I-5)7,5,5	QATP1010
0035	5	CALL CPUTME(IZONE)	
0036		IF(IZONE.GE.3600) RETURN 1	
0037		IF(DELT2-E)16,10,6	QATP 1020
0038	6	IF(DELT2-DELT1)7,11,11	QATP 1030
0039	7	JJ=JJ+JJ	QATP 1040
0040	8	IER=2	QATP 1050
0041	9	Y=H*AUX(1)	QATP 1060
0042		RETURN	QATP 1070
0043	10	IER=0	QATP 1080
0044		GO TO 5	QATP 1090
0045	11	IER=1	QATP 1100
0046		Y=H*Y	QATP 1110
0047		RETURN	QATP 1120
0048		END	QATP 1130

C

PENEPART.

```

0001 REAL M(4),LCCREP
0002 DIMENSION ANISU(10), C(4),TITR1(7),TITR2(4),TITRXY(3)
0003 DIMENSION IBLF(100),RES(4)
0004 DATA LEC,IMP/1,3/
0005 DATA TITR1/'PLIT','S DE',' POM','FACE','PIEZ','CMET','RIE'/'
0006 DATA TITR2/'L = ','D = ','P = ','Z = '/'
0007 DATA TITRXY/'E ','U'/'=1','/U'/'
0008 DATA CCURBE/'A= '/'
0009 CALL CPUOC
0010 IFLAG=C
0011 READ(LEC,1005)YMIN,YMAX,DIMODY,NINTY,DIMCDX
0012 READ(LEC,1010)LCCREP,DCREP,RDIST,ZPIEZC,NBANIS,IALFA,IOMEGA
0013 READ(LEC,1020)(ANISCI(I),I=1,NBANIS)
0014 NBMODU=IOMEGA-IALFA
0015 NINTX=NBMODU
0016 DIMX=DIMODU*NINTX
0017 XMIN=IALFA
0018 XMAX=IOMEGA
0019 DIMY=DIMODY*NINTY
0020 YMIN=ALOG10(YMIN)
0021 YMAX=ALOG10(YMAX)
0022 NBLCC=1
0023 CALL IBENATIBUF,100,15,100,70)
0024 ECHX=DIMX/(XMAX-XMIN)
0025 ECHY=DIMY/(YMAX-YMIN)
0026 CALL PNUNA(5.,5.,NBLCC,0.,0.)
0027 CALL ECHL(ECHX,ECHY,-XMIN*ECHX,-YMIN*ECHY)
0028 DEPA=XMIN
0029 DECA=XMIN-C.5/ECHX
0030 DEPA=YMIN
0031 DECA=YMIN-C.4/ECHY
0032 X1=XMIN
0033 X=0.
0034 DX=(XMAX-XMIN)/NINTX
0035 35 IFADX=X1*X*DX
0036 GRADX=10.**GRADX*1.01
0037 CALL NCHBSIDEXA,DECA,0,GRADX,-2,0,10,0,20,1.,0.)
0038 GRADX=GRADX/1.01
0039 X=X+1.
0040 IF(IFIX(X)-NINTX)40,40,50
0041 40 CALL TRASIDEXA,DEPA,0)
0042 XREP=GRADX
0043 DO 45 I=1,10
0044 CALL BNSCHSIALOG10(XREP),DEPA,1,13,0.10,0.20,1.,0.)
0045 45 XREP=XREP+GRADX
0046 DEPA=DEPA+DX
0047 DECA=DECA+DX
0048 GO TO 35
0049 50 CONTINUE
0050 CALL BNSCHSIALOG10(XREP),DEPA,1,13,0.15,0.20,0.,-1.)
0051 CALL PCARA(DIMX+0.3,0.,0.,TITRXY(2),7,0.15,0.20,1.,0.)
0052 DEPA=XMIN
0053 DECA=XMIN-C.2/ECHX
0054 DEPA=YMIN
0055 DECA=YMIN
0056 Y1=YMIN
0057 DY=(YMAX-YMIN)/NINTY
0058 Y=0.
0059 55 GRADY=Y1*Y*DY
0060 GRADY=10.**GRADY*1.01
0061 CALL NCHBSIDEXA,DECA,0,GRADY,-2,0,10,0,20,0.,1.)
0062 GRADY=GRADY/1.01
0063 Y=Y+1.
0064 IF(IFIX(Y)-NINTY)60,60,70
0065 60 CALL TRASIDEXA,DEPA,0)
0066 YREP=GRADY
0067 DO 65 I=1,10
0068 CALL BNSCHSIDEXA,ALOG10(YREP),1,13,0.10,0.20,0.,1.)
0069 65 YREP=YREP+GRADY
0070 DEPA=DEPA+DY
0071 DECA=DECA+DY
0072 GO TO 55
0073 70 CONTINUE
0074 CALL BNSCHSIALOG10(XREP),DEPA,1,13,0.15,0.20,1.,0.)
0075 CALL PCARA(0.,DIMY+0.2,0.,TITRXY(1),0.15,0.20,1.,0.)
0076 CALL PCARA(C.5,DIMY,C,TITR1,16,0.20,0.25,1.,0.)
0077 CALL PCARA(C.5,DIMY-C.5,0.,TITR2,4,0.15,0.20,1.,0.)
0078 CALL NCHBILC,0.,2,LCCREP,2,0.15,0.20,1.,0.)

```

U=1/02

PUITS

```

0079      CALL PCAFA(0.5,DIMY-1.,0,TITR242I,4,0.15,0.20,1.,0.)      D =
0080      CALL NOMBA(C.,0.,2,DCREP,2,0.15,0.20,1.,0.)
0081      CALL PCAFA(0.5,DIMY-1.5,0,TITR1(5),11,0.25,0.25,1.,0.)      PIEZO
0082      CALL PCAFA(0.5,DIMY-2.,0,TITF2(3),4,0.15,0.20,1.,0.)      P =
0083      CALL NOMBA(C.,0.,2,PDIST,2,0.15,0.20,1.,0.)
0084      CALL PCAFA(0.5,DIMY-2.5,0,TITR2(4),4,0.15,0.20,1.,0.)      Z =
0085      CALL NOMBA(C.,0.,2,ZPIEZ0,2,0.15,0.20,1.,0.)      Z =
0086      RES(1)=(LGCREP+ZPIEZC)/RDIST
0087      RES(2)=(DCREP+ZPIEZC)/RDIST
0088      RES(3)=(LGCREP-ZPIEZC)/RDIST
0089      RES(4)=(DCREP-ZPIEZC)/RDIST
0090      PRINT 1503
0091      PRINT 1501
0092      PRINT 1502,LGCREP,DCREP,RDIST,ZPIEZC,MEANIS,(1,ANISO(1),I=1,NBANIS
11
0093      PRINT 1501
0094      PRINT 1500
0095      DO 500 JANIS=1,NBANIS
0096      AA=ANISO(JANIS)
0097      PRINT 1504,AA
0098      DO 400 NOMOD=1,NBMOD
0099      IA=IALFA+NOMOD-1
0100      UP=IC.*IA
0101      DO 300 IL=1,5
0102      250 UP=UP+10.*IA
0103      U=1./LP
0104      DO 200 K=1,4
0105      BB=AA*RES(K)
0106      IF(BB.GT.C.) GO TO 100
0107      IF(BB.LT.0.) GO TO 90
0108      M(K)=0.
0109      WRITE(IMP,14CC)U
0110      GO TO 200
0111      90 BB=-BB
0112      SIGNE=-1.
0113      GO TO 105
0114      100 SIGNE=1.
0115      105 CONTINUE
0116      CALL MLBETAT(BB,U,F,M(1),6600)
0117      M(K)=F*M*SIGNE
0118      200 CONTINUE
0119      F=M(1)-M(2)+M(3)-M(4)
0120      WRITE(IMP,13CC)U,UP,F
0121      265 IF(ALOG10(E).LT.YMIN.CR.ALLOG10(E).GT.YMAX) GO TO 300
0122      CALL TRASIALOGIC(UP),ALOG10(E),IFLAG)
0123      IFLAG=1
0124      300 CONTINUE
0125      400 CONTINUE
0126      CALL PCAFA(-2.,-1.2,CEURBE,3,0.15,0.20,1.,0.)
0127      CALL NOMBA(1,0.,2,AA,2,0.15,0.20,1.,0.)
0128      IFLAG=0
0129      CALL CPUTME(IZONE)
0130      PRINT 1600,IZONE
0131      500 CONTINUE
0132      1600 NREL3C=999
0133      CALL PNUMA(DIMX,0.,NBLOC,0.,0.)
0134      CALL CPULST
0135      STOP
0136      1005 FORMAT(2F14.7,F6.2,14,F6.2)
0137      1010 FORMAT(4F8.2,3I4)
0138      1020 FORMAT(1CFE.2)
0139      1300 FORMAT(1HC,35X,'L = ',F12.7,5X,'1/U = ',E15.4,5X,'E(U) = ',E15.4)
0140      1400 FORMAT(28X,'BETA = 0.',14X,'U = ',F12.7,10X,'M(U,BETA) = 0.')
0141      1500 FORMAT(' SIGNIFICATION DU CODE FORMULE'/10X,'SI = 1, M(U,BETA) = 2
1* (AFGSH(BETA) - BETA*PRF(SCRT(U)))/10X,'SI = 2, M(U,BETA) = 2* (AP
2GSH(BETA) - 2*BETA*SQRT(U/PI))/10X,'SI = 3, M(U,BETA) = E1(U)/10
3X,'SI = 4, QUADRATURE NUMERIQUE CORRECTE'/10X,'SI = 5, QUADRATURE
4NUMERIQUE EFFRAYS D'ARCONDI'/10X,'SI = 6, QUADRATURE NUMERIQUE,
5EFFRAYS DE TRONCATURE')
0142      1501 FORMAT(1H,5C(1H*))
0143      1502 FORMAT(2H *,10X,16HPILS DE POMPAGE,22X,1H*/2H *,15X,4H = ,F6.2,2
13X,1H*/2H *,15X,4H = ,F6.2,23X,1H*/2H *,10X,11HPIEZOMETRIE,27X,1H
2*/2H *,15X,4H = ,F6.2,23X,1H*/2H *,15X,4H = ,F6.2,25X,1H*/2H *,1
30X,11HANISOTROPIE,27X,1H*/2H *,15X,25HNOMBRE DE VALEURS DE A = ,12
4,6X,1H*/(2H *,15X,2HAF,12,4H) = ,F6.2,17X,1H*)
0144      1503 FORMAT(1H1)
0145      1504 FORMAT(' COEFFICIENT D'ANISOTROPIE A = ',F8.2)
0146      1600 FORMAT(20X,' TEMPS CALCUL = ',14)
0147      END

```

CCS FORTRAN IV 360N-FO-475 3-8 CEXPI DATE 04/12/74 TIME 19.15.51

```

0001      FUNCTION CEXPI(L)
C  CALCUL EXPONENTIELLE INTEGRALE D'APRES ABRAMOWITZ, P231, FORMULES
C  5.1.53, 5.1.54, ET 5.1.55 - ECPIT PAF M. CANCEIL - ACUT 1974-
0002      IF(U-10.)1,2,2
0003      1 IF(U-1.)3,3,4
0004      3 CEXPI = -ALOG(U) - .57721566 + U*(.99999193 + U*(-.24991055 + U*(.0551556
16 + U*(-.00576004 + U*.00107857))))
0005      RETURN
0006      4 CEXPI = (.250621 + U*(2.334733 + U))/(U*EXP(U)*(1.681534 + U*(3.330657 +
IU)))
0007      RETURN
0008      2 CEXPI = (1.15198 + U*(4.03640 + U))/(U*EXP(U)*(4.19160 + U*(5.03637 + U)))
0009      RETURN
0010      END

```

CCS FORTRAN IV 360N-FO-475 3-R MLBETA DATE 04/12/74 TIME 19.15.38

```

0001      SUBROUTINE MLBETA (BETA,U,FM,*)
0002      DOUBLE PRECISION FCT,DBL,XU,DFM
0003      EXTERNAL FCT
0004      XU=7.
0005      C=.05/(BETA*BETA)
0006      IF(U-C) 15,15,30
0007      15 IF(C -.01)20,20,25
0008      20 FM=2.*ALOG(BETA*SQRT(BETA*BETA+1.))-4.*BETA*SQRT(U)*.5641896
0009      IKOD=2
0010      GO TO 60
0011      25 FM=2.*ALOG(BETA+SQRT(BETA*BETA+1.))-2.*BETA*FRF(SQRT(U))
0012      IKOD=1
0013      GO TO 60
0014      30 IF(U-100.)40,35,35
0015      35 FM=CEMPI(L)
0016      IKOD=3
0017      GO TO 60
0018      40 DBL=DBL+1
0019      DFM=DBL*(FM)
0020      CALL QADRC(L,XU,L,F=3,FCT,DFM,IER,BETA,LIQU)
0021      FM=SGL(DFM)
0022      IKOD=4+IER
0023      60 PRINT 1000,IKOD,BETA,U,FM
0024      1000 FORMAT(1X,'CODE FORMULE = ',I2,10X,'BETA = ',F6.2,10X,' U = ',F12.
17,10X,' ML(BETA) = ',F12.7)
0025      RETURN
0026      100 RETURN 1
0027      END

```

CCS FORTRAN IV 360N-FO-475 3-8 FCT DATE 03/12/74 TIME 08.39.24

```

0001      DOUBLE PRECISION FUNCTION FCT(Y,BETA)
0002      DOUBLE PRECISION Y
0003      FCT=DEXP(-Y)*DERF(BETA*DSQRT(Y))/Y
0004      RETURN
0005      END

```

TABLES DE LA FONCTION $w(u, \omega, \gamma)$

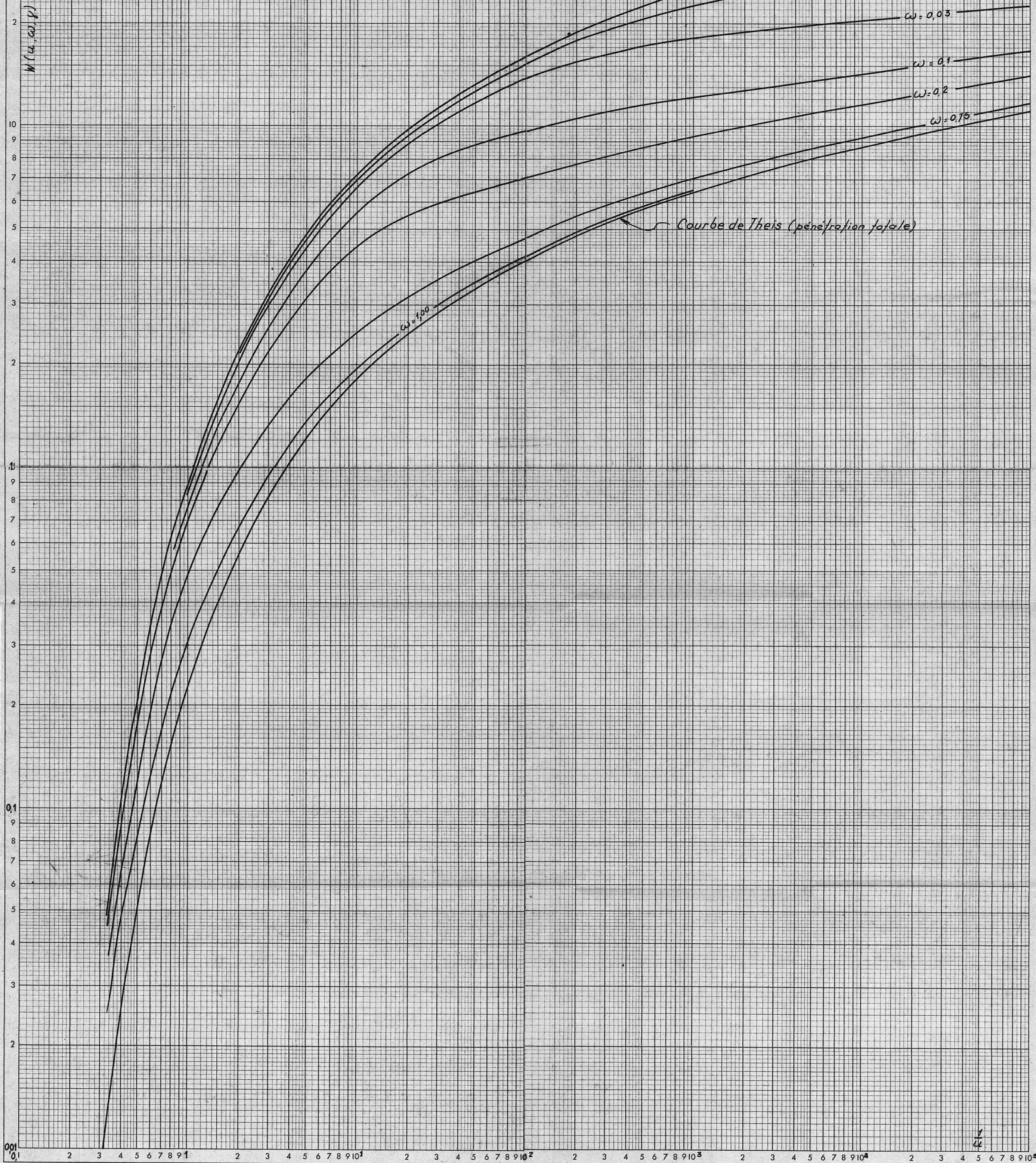
$\gamma = 0.75$							
u	$\omega = 0.1$	0.01	0.001				
10^{-6}	13.8767	15.2580	16.7637				
10^{-5}	11.5741	12.9554	14.2530				
10^{-4}	9.2716	10.6478	11.3995				
10^{-3}	6.9699	8.1392	8.3991				
10^{-2}	4.6712	5.2967	5.3635				
10^{-1}	2.2597	2.4103	2.4193				
1	0.2823	0.2898	0.2898				
2	0.0634	0.0643	0.0645				
3	0.0167	0.0169	0.0169				
$\gamma = 0.50$							
u	$\omega = 0.5$	0.2	0.1	0.03	0.01	0.001	
10^{-6}	13.5665	14.4689	15.4989	17.6358	19.7506	24.2954	
10^{-5}	11.2639	12.1663	13.1963	15.3332	17.4498	21.1506	
10^{-4}	8.9614	9.8638	10.8938	13.0307	15.1224	17.0340	
10^{-3}	6.6597	7.5621	8.5921	10.6994	11.9812	12.5845	
10^{-2}	4.3661	5.2685	6.2757	7.4555	7.8851	8.0462	
10^{-1}	2.1511	2.8822	3.2620	3.5305	3.6050	3.6304	
1	0.3384	0.3986	0.4185	0.4319	0.4349	0.4353	
2	0.0808	0.0910	0.0942	0.0964	0.0966	0.0968	
3	0.0223	0.0247	0.0252	0.0254	0.0254	0.0255	
$\gamma = 0.25$							
u	$\omega = 1.00$	0.75	0.20	0.10	0.03	0.01	0.001
10^{-6}	13.3385	13.9367	16.2123	18.9845	25.1707	31.4176	44.9718
10^{-5}	11.0359	11.6341	13.9097	16.6837	22.8681	29.1150	40.7960
10^{-4}	8.6334	9.3316	11.6072	14.3794	20.5656	26.7666	33.5338
10^{-3}	6.4317	7.0299	9.3055	12.0777	18.2045	22.6026	24.9428
10^{-2}	4.1381	4.7363	7.0119	9.7382	13.8971	15.3684	15.9702
10^{-1}	1.9231	2.5213	4.4451	5.7545	6.8298	7.1101	7.1913
1	0.2981	0.4959	0.7160	0.7856	0.8493	0.8549	0.8531
2	0.0806	0.1271	0.1675	0.1794	0.1900	0.1875	0.1893
3	0.0245	0.0366	0.0454	0.0472	0.0501	0.0481	0.0481

COURBES TYPES DE LA FONCTION

$W(u, \omega, \gamma)$ pour $\gamma = 0,25$

$$T = \frac{0,08}{s} Q W(u, \omega, \gamma)$$

$$S = \frac{4 T r}{r^2 \frac{1}{u}}$$



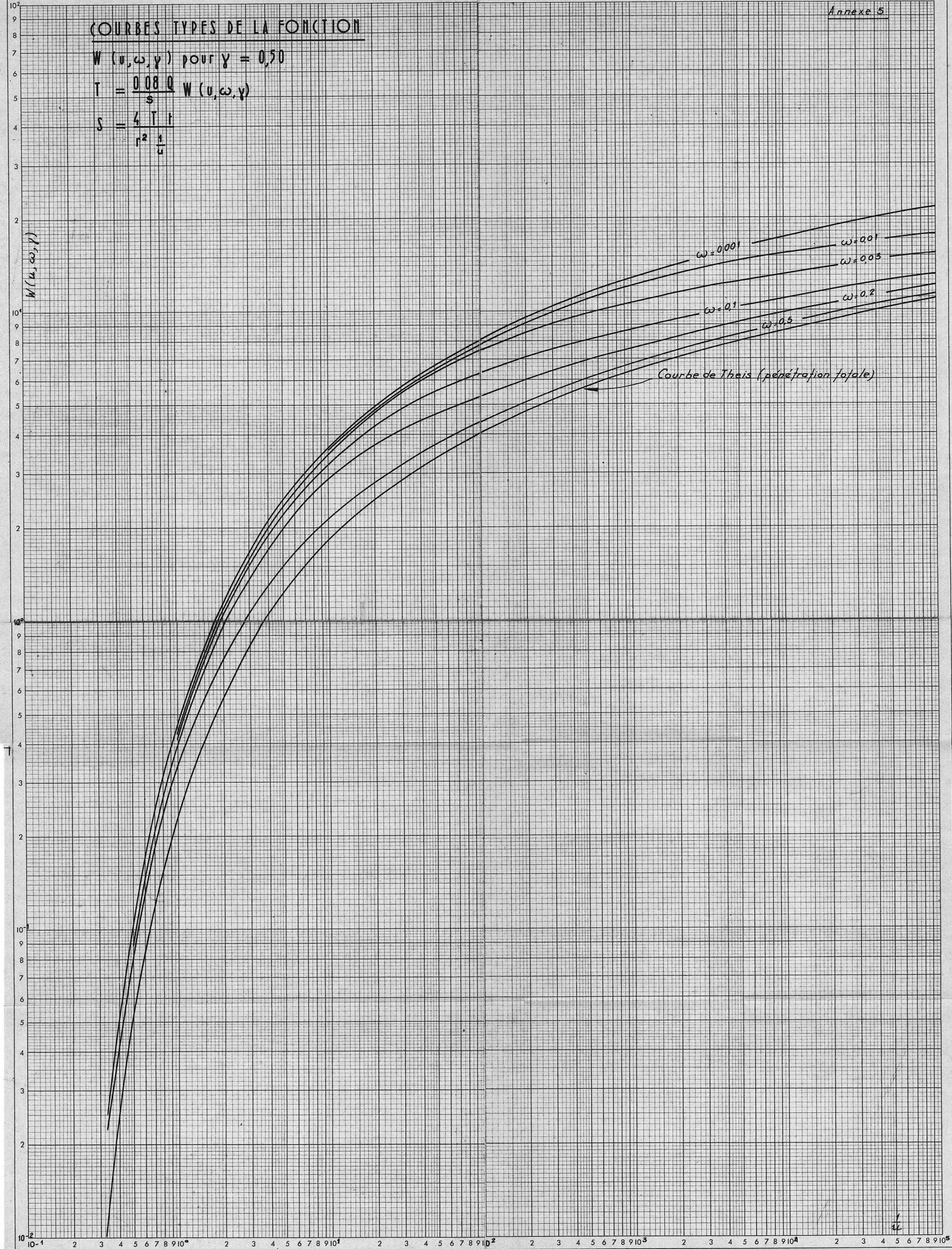
COURBES TYPES DE LA FONCTION

$W(u, \omega, \gamma)$ pour $\gamma = 0,50$

$$T = \frac{0.08 Q}{s} W(u, \omega, \gamma)$$

$$s = \frac{4 T t}{r^2 \frac{1}{u}}$$

$W(u, \omega, \gamma)$



COURBES TYPES DE LA FONCTION

$W(u, \omega, \gamma)$ pour $\gamma = 0,75$

$$T = \frac{0,08 Q}{W(u, \omega, \gamma)}$$

$$S = \frac{4 T T}{r^2 \frac{1}{u}}$$

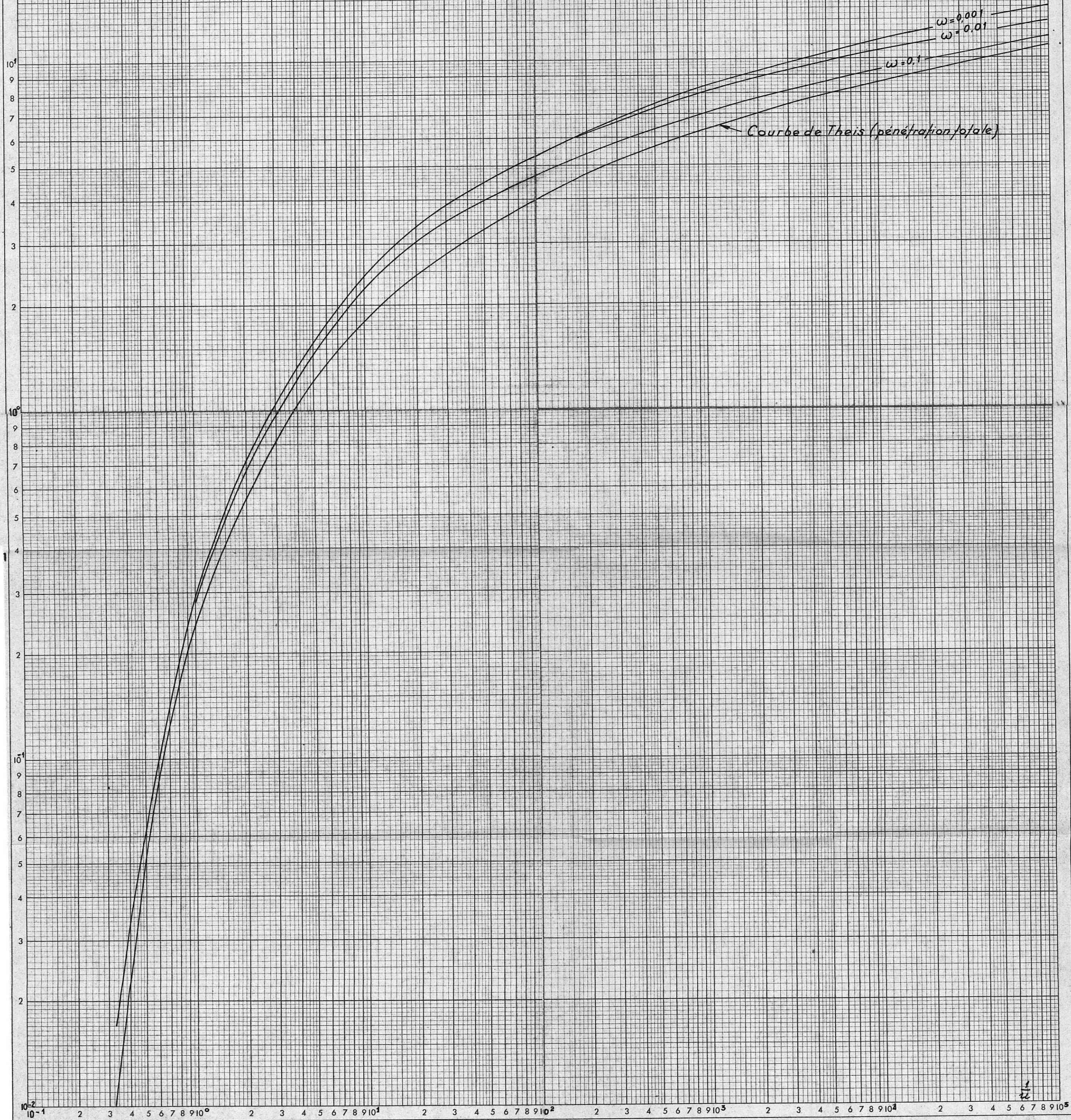


TABLE VALEURS des FONCTIONS de e^x , $K_0(x)$, $-Ei(-x)$, and $Ei(-x)e^x$

x	e^x	$K_0(x)$	$e^x K_0(x)$	$-Ei(-x)$	$-Ei(-x)e^x$	x	e^x	$K_0(x)$	$e^x K_0(x)$	$-Ei(-x)$	$-Ei(-x)e^x$	x	e^x	$K_0(x)$	$e^x K_0(x)$	$-Ei(-x)$	$-Ei(-x)e^x$
0.010	1.0101	4.7212	4.7687	4.0379	4.0787	0.10	1.1052	2.4271	2.6823	1.8229	2.0147	1.0	2.7183	0.4210	1.1445	.2194	.5964
11	1.0111	4.6260	4.6771	3.9436	3.9874	11	1.1163	2.3333	2.6046	1.7371	1.9391	1.1	3.0042	.3656	1.0983	.1860	.5588
12	1.0121	4.5390	4.5938	3.8576	3.9044	12	1.1275	2.2479	2.5345	1.6595	1.8711	1.2	3.3201	.3185	1.0575	.1584	.5259
13	1.0131	4.4590	4.5173	3.7785	3.8282	13	1.1388	2.1695	2.4707	1.5889	1.8094	1.3	3.6693	.2782	1.0210	.1355	.4972
14	1.0141	4.3849	4.4467	3.7054	3.7578	14	1.1503	2.0972	2.4123	1.5241	1.7532	1.4	4.0552	.2437	0.9881	.1162	.4712
15	1.0151	4.3159	4.3812	3.6374	3.6925	15	1.1618	2.0300	2.3585	1.4645	1.7015	1.5	4.4817	.2138	.9582	.1000	.4482
16	1.0161	4.2514	4.3200	3.5739	3.6317	16	1.1735	1.9674	2.3088	1.4092	1.6537	1.6	4.9530	.1880	.9309	.0863	.4275
17	1.0171	4.1908	4.2627	3.5143	3.5746	17	1.1853	1.9088	2.2625	1.3578	1.6094	1.7	5.4739	.1655	.9059	.0747	.4086
18	1.0182	4.1337	4.2088	3.4581	3.5209	18	1.1972	1.8537	2.2193	1.3098	1.5681	1.8	6.0496	.1459	.8828	.0647	.3915
19	1.0192	4.0797	4.1580	3.4050	3.4705	19	1.2093	1.8018	2.1788	1.2649	1.5295	1.9	6.6859	.1288	.8614	.0562	.3758
0.020	1.0202	4.0285	4.1098	3.3547	3.4225	0.20	1.2214	1.7527	2.1408	1.2227	1.4934	2.0	7.3891	.1139	.8416	.0489	.3613
21	1.0212	3.9797	4.0642	3.3069	3.3771	21	1.2337	1.7062	2.1049	1.1829	1.4593	2.1	8.1662	.1008	.8230	.0426	.3480
22	1.0222	3.9332	4.0207	3.2614	3.3340	22	1.2461	1.6620	2.0710	1.1454	1.4273	2.2	9.0250	.0893	.8057	.0372	.3356
23	1.0233	3.8888	3.9793	3.2179	3.2927	23	1.2586	1.6199	2.0389	1.1099	1.3969	2.3	9.9742	.0791	.7894	.0325	.3242
24	1.0243	3.8463	3.9398	3.1763	3.2535	24	1.2713	1.5798	2.0084	1.0762	1.3681	2.4	11.0232	.0702	.7740	.0284	.3135
25	1.0253	3.8056	3.9019	3.1365	3.2159	25	1.2840	1.5415	1.9793	1.0443	1.3409	2.5	12.1825	.0623	.7596	.0249	.3035
26	1.0263	3.7664	3.8656	3.0983	3.1799	26	1.2969	1.5048	1.9517	1.0139	1.3149	2.6	13.4637	.0554	.7459	.0219	.2942
27	1.0274	3.7287	3.8307	3.0615	3.1452	27	1.3100	1.4697	1.9253	.9849	1.2902	2.7	14.8797	.0493	.7329	.0192	.2854
28	1.0284	3.6924	3.7972	3.0261	3.1119	28	1.3231	1.4360	1.9003	.9573	1.2666	2.8	16.4446	.0438	.7206	.0169	.2773
29	1.0294	3.6574	3.7650	2.9920	3.0800	29	1.3364	1.4036	1.8758	.9309	1.2441	2.9	18.1742	.0390	.7089	.0148	.2693
0.030	1.0305	3.6235	3.7339	2.9591	3.0494	0.30	1.3499	1.3725	1.8526	.9057	1.2226	3.0	20.0855	.0347	.6978	.0131	.2621
31	1.0315	3.5908	3.7039	2.9273	3.0196	31	1.3634	1.3425	1.8304	.8815	1.2018	3.1	22.1980	.0310	.6871	.0115	.2551
32	1.0325	3.5591	3.6749	2.8965	2.9908	32	1.3771	1.3136	1.8089	.8583	1.1820	3.2	24.5325	.0276	.6770	.0101	.2485
33	1.0336	3.5284	3.6468	2.8668	2.9631	33	1.3910	1.2857	1.7883	.8361	1.1630	3.3	27.1126	.0246	.6673	.0089	.2424
34	1.0346	3.4986	3.6196	2.8379	2.9362	34	1.4050	1.2587	1.7685	.8147	1.1446	3.4	29.9641	.0220	.6580	.0079	.2365
35	1.0356	3.4697	3.5933	2.8099	2.9101	35	1.4191	1.2327	1.7493	.7942	1.1270	3.5	33.1155	.0196	.6490	.0070	.2308
36	1.0367	3.4416	3.5678	2.7827	2.8848	36	1.4333	1.2075	1.7308	.7745	1.1101	3.6	36.5982	.0175	.6405	.0062	.2254
37	1.0377	3.4143	3.5430	2.7563	2.8603	37	1.4477	1.1832	1.7129	.7554	1.0936	3.7	40.4473	.0156	.6322	.0055	.2204
38	1.0387	3.3877	3.5189	2.7306	2.8364	38	1.4623	1.1596	1.6956	.7371	1.0779	3.8	44.7012	.0140	.6243	.0048	.2155
39	1.0398	3.3618	3.4955	2.7056	2.8133	39	1.4770	1.1367	1.6789	.7194	1.0626	3.9	49.4025	.0125	.6166	.0043	.2108
0.040	1.0408	3.3365	3.4727	2.6813	2.7907	0.40	1.4918	1.1145	1.6627	.7024	1.0478	4.0	54.5982	.0112	.6093	.0038	.2063
41	1.0419	3.3119	3.4505	2.6576	2.7688	41	1.5068	1.0930	1.6470	.6859	1.0335	4.1	60.3403	.0100	.6022	.0033	.2021
42	1.0429	3.2879	3.4289	2.6344	2.7474	42	1.5220	1.0721	1.6317	.6700	1.0197	4.2	66.6863	.0089	.5953	.0030	.1980
43	1.0439	3.2645	3.4079	2.6119	2.7267	43	1.5373	1.0518	1.6169	.6546	1.0063	4.3	73.6998	.0080	.5887	.0026	.1941
44	1.0450	3.2415	3.3874	2.5899	2.7064	44	1.5527	1.0321	1.6025	.6397	.9933	4.4	81.4509	.0071	.5823	.0023	.1903
45	1.0460	3.2192	3.3673	2.5684	2.6866	45	1.5683	1.0129	1.5886	.6253	.9807	4.5	90.0171	.0064	.5761	.0021	.1866
46	1.0471	3.1973	3.3478	2.5474	2.6672	46	1.5841	0.9943	1.5750	.6114	.9685	4.6	99.4843	.0057	.5701	.0018	.1832
47	1.0481	3.1758	3.3287	2.5268	2.6483	47	1.6000	.9761	1.5617	.5979	.9566	4.7	109.9472	.0051	.5643	.0016	.1798
48	1.0492	3.1549	3.3100	2.5068	2.6300	48	1.6161	.9584	1.5489	.5848	.9451	4.8	121.5104	.0046	.5586	.0014	.1766
49	1.0502	3.1343	3.2918	2.4871	2.6120	49	1.6323	.9412	1.5363	.5721	.9338	4.9	134.2898	.0041	.5531	.0013	.1734
0.050	1.0513	3.1142	3.2739	2.4679	2.5945	0.50	1.6487	.9244	1.5241	.5598	.9229	5.0	148.4132	.0037	.5478	.0011	.1704
51	1.0523	3.0945	3.2564	2.4491	2.5773	51	1.6653	.9081	1.5122	.5478	.9123						
52	1.0534	3.0752	3.2393	2.4306	2.5604	52	1.6820	.8921	1.5006	.5362	.9019						
53	1.0544	3.0562	3.2226	2.4126	2.5440	53	1.6989	.8766	1.4892	.5250	.8919						
54	1.0555	3.0376	3.2062	2.3948	2.5278	54	1.7160	.8614	1.4781	.5140	.8820						
55	1.0565	3.0194	3.1901	2.3775	2.5120	55	1.7333	.8466	1.4673	.5034	.8725						
56	1.0576	3.0015	3.1744	2.3604	2.4964	56	1.7507	.8321	1.4567	.4930	.8631						
57	1.0587	2.9839	3.1589	2.3437	2.4811	57	1.7683	.8180	1.4464	.4830	.8541						
58	1.0597	2.9666	3.1437	2.3273	2.4663	58	1.7860	.8042	1.4363	.4732	.8451						
59	1.0608	2.9496	3.1288	2.3111	2.4516	59	1.8040	.7907	1.4264	.4637	.8365						
0.060	1.0618	2.9329	3.1142	2.2953	2.4371	0.60	1.8221	.7775	1.4167	.4544	.8280						
61	1.0629	2.9165	3.0999	2.2797	2.4230	61	1.8404	.7646	1.4073	.4454	.8179						
62	1.0640	2.9003	3.0858	2.2645	2.4092	62	1.8589	.7520	1.3980	.4366	.8116						
63	1.0650	2.8844	3.0719	2.2494	2.3956	63	1.8776	.7397	1.3889	.4280	.8036						
64	1.0661	2.8688	3.0584	2.2346	2.3822	64	1.8965	.7277	1.3800	.4197	.7960						
65	1.0672	2.8534	3.0450	2.2201	2.3691	65	1.9155	.7159	1.3713	.4115	.7882						
66	1.0682	2.8382	3.0319	2.2058	2.3562	66	1.9348	.7043	1.3627	.4036	.7809						
67	1.0693	2.8233	3.0189	2.1917	2.3434	67	1.9542	.6930	1.3543	.3959	.7737						
68	1.0704	2.8086	3.0062	2.1779	2.3310	68	1.9739	.6820	1.3461	.3883	.7665						
69	1.0714	2.7941	2.9937	2.1643	2.3188	69	1.9937	.6711	1.3380	.3810	.7596						
0.070	1.0725	2.7798	2.9814	2.1508	2.3067	0.70	2.0138	.6605	1.3301	.3738	.7528						
71	1.0736	2.7657	2.9693	2.1376	2.2949	71	2.0340	.6501	1.3223	.3668	.7461						
72	1.0747	2.7519	2.9573	2.1246	2.2832	72	2.0544	.6399	1.3147	.3599	.7394						
73	1.0757	2.7382	2.9455	2.1118	2.2717	73	2.0751	.6300	1.3072	.3532	.7329						
74	1.0767	2.7247	2.9340	2.0991	2.2603	74	2.0959	.6202	1.2998	.3467	.7266						
75	1.0779	2.7114	2.9226	2.0867	2.2492	75	2.1170	.6106	1.2928	.3403	.7204						
76	1.0790	2.6983	2.9113	2.0744	2.2383	76	2.1383	.6012	1.2855	.3341	.7144						
77	1.0800	2.6853	2.9002	2.0623	2.2273	77	2.1598	.5920	1.2785	.3280	.7084						
78	1.0811	2.6726	2.8894	2.0503	2.2165	78	2.1815	.5829	1.2716	.3221	.7027						
79	1.0822	2.6599	2.8786	2.0386	2.2062	79	2.2034	.5740	1.2649	.3163	.6969						
0.080	1.0833	2.6475	2.8680	2.0269	2.1957	0.80	2.2255	.5653	1.2582	.3106	.6912						
81	1.0844	2.6352	2.8575	2.													

ANNEXE 8

EXEMPLE DE CALCUL DES PARAMETRES HYDRODYNAMIQUES

Données du problème

La nappe est captive et son épaisseur b est de 60 m. Le puits est incomplet et crépiné sur les 15 mètres supérieurs de l'aquifère. Le pompage a duré 10 h au débit Q constant de $100 \text{ m}^3/\text{h}$. Les rabattements ont été observés dans un piézomètre situé à 6 m du puits et crépiné comme le puits sur les 15 mètres supérieurs de l'aquifère.

Calculer les paramètres T et S de la nappe en supposant $K_h \approx 10 K_v$.

Interprétation

Les rabattements observés dans le piézomètre ont été reportés en coordonnées semi-logarithmiques (voir fig. 1) et bilogarithmiques (voir fig. 2).

Le système géométrique d'écoulement (piézomètre pénétrant l'aquifère de la même façon que le puits) permet l'application de la méthode des courbes types de la fonction $W(u, \omega, \gamma)$ exposée au § 3. On peut aussi appliquer la méthode de la courbe type de la fonction E exposée au § 1.1.1. pour le début du pompage, et la méthode semi-logarithmique exposée au § 1.1.2. pour la partie finale rectiligne de la courbe.

1. Méthode des courbes types de la fonction $W(u, \omega, \gamma)$

$$\text{Dans le cas présent} \quad \frac{r}{b} = \frac{6}{60} = 0,1 \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{K_v}{K_h}} = 0,316$$

$$\text{d'où} \quad \omega = \frac{r}{b} \sqrt{\frac{K_v}{K_h}} = 0,03 \quad \text{et} \quad \gamma = 0,25 .$$

La courbe observée sera donc superposée sur la courbe type de $\omega = 0,03$ de l'annexe 7. Cette superposition donne les coordonnées suivantes d'un point :

$$\begin{array}{lll} s = 3,9 \text{ m} & \text{pour } W(u, \omega, \gamma) = 10 &) \\ \text{et } t = 150 \text{ sec} & \text{pour } \frac{1}{u} = 10^2 &) \end{array}$$

$$\text{d'où } T = \frac{0,08 Q}{s} \quad W(u, \omega, \gamma) = \frac{0,08 \cdot 100 \cdot 10}{3,9} \approx 20 \text{ m}^2/\text{h} \approx 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{et } S = \frac{4Tt}{r^2 \frac{1}{u}} = \frac{4 \cdot 5,6 \cdot 10^{-3} \cdot 150}{36 \cdot 10^2} = 0,94 \cdot 10^{-3}$$

Remarque :

En supposant le milieu isotrope, la courbe observée devrait être superposée sur la courbe type de $\omega = 0,1$. Cette superposition est moins bonne et donne les résultats suivants :

$$\begin{array}{lll} s = 6 \text{ m} & \text{pour } W(u, \omega, \gamma) = 10 &) \\ t = 280 \text{ sec} & \text{pour } \frac{1}{u} = 10^2 &) \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{l} T = 13 \text{ m}^2/\text{h} \approx 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} \\ S = 1,1 \cdot 10^{-3} \end{array}$$

2. Méthode semi-logarithmique pour $t > \frac{Sb}{2K_v}$

La partie finale de la courbe $s = f(\log t)$ est rectiligne ; sa pente $i = 0,85 \text{ m}$ permet de calculer rapidement la transmissivité :

$$T = \frac{0,183 Q}{i} = 22 \text{ m}^2/\text{h} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} .$$

La comparaison de cette valeur à celles calculées précédemment indique que le choix du coefficient d'anisotropie a été bon.

Vérifions maintenant la condition d'application de cette méthode :

$$T = K_h \cdot b = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{d'où } K_h \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \quad \text{et } K_v \approx 0,1 K_h \approx 1 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$\text{donc } \frac{Sb^*}{2K_v} = \frac{9 \cdot 10^{-4} \cdot 60}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-5}} = 2700 \text{ sec} .$$

* valeur calculée par la méthode des courbes types de la fonction $W(u, \omega, \gamma)$.

En effet, la courbe devient rectiligne lorsque $t > 2700$ sec.

Calcul de S

Ce calcul nécessite la connaissance de la fonction :

$$f_s = \frac{4b}{\pi(1-d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_0 \left(\frac{n\pi r}{b} \sqrt{\frac{K_v}{K_h}} \right) \left(\sin \frac{n\pi l}{b} - \sin \frac{n\pi d}{b} \right) \cos \frac{n\pi z}{b} .$$

Dans le cas présent :

$b = 60$ m, $l = 15$ m, $d = 0$, $r = 6$ m, $\sqrt{\frac{K_v}{K_h}} = 0,316$, et $z = 0,5(l'+d') = 7,5$
avec $l' = l = 15$ m et $d' = d = 0$.

D'où

$$\begin{aligned} f_s &= 5,1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_0 (0,09 n) \sin \left(\frac{n \cdot 3,14 \cdot 15}{60} - \sin \frac{n \cdot 3,14 \cdot 0}{60} \right) \cos \frac{n \cdot 3,14 \cdot 7,5}{60} \\ &= 5,1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_0 (0,09 n) (\sin 0,785 n) \cos 0,393 n \end{aligned}$$

et en changeant les radians en degrés

$$f_s = 5,1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_0 (0,09 n) \times \sin (45^\circ n) \times \cos (22,5^\circ n) .$$

Calculons maintenant la somme Σ en nous servant des tables de la fonction $K_0(X)$ et des tables trigonométriques :

pour $n = 1$

$$\Sigma = 1 \times K_0 (0,09) \times \sin 45^\circ \times \cos 22,5^\circ = 1 \times 2,5 \times 0,71 \times 0,92 = + 1,63$$

pour $n = 2$

$$\Sigma = 0,5 \times K_0 (0,18) \times \sin 90^\circ \times \cos 45^\circ = 0,5 \times 1,85 \times 1 \times 0,71 = + 0,66$$

pour $n = 3$

$$\Sigma = 0,33 K_0 (0,27) \times \sin 135^\circ \times \cos 67,5^\circ = 0,33 \times 1,47 \times 0,71 \times 0,38 = +0,13$$

pour $n = 4$

$$\Sigma = 0,25 K_0 (0,36) \times \sin 180^\circ \times \cos 90^\circ = 0$$

pour $n = 5$

$$\begin{aligned} \sum &= 0,2 K_0 (0,45) \times \sin 225^\circ \times \cos 112,5^\circ = 0,2 \times 1,01 \times (-0,71) \times (-0,38) \\ &= +0,054 \end{aligned}$$

pour $n = 6$

$$\begin{aligned} \sum &= 0,167 K_0 (0,54) \times \sin 270^\circ \times \cos 135^\circ = 0,167 \times 0,86 \times (-1) \times (-0,71) \\ &= +0,010 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \sum_{n=1}^{n=6} = 2,50$$

$$\text{et } f_s \approx 5,1 \times 2,50 = 12,7 .$$

$$S = \frac{2,25 \times T \times t_p}{r^2} \times e^{fs}$$

avec $t_p = 1,1 \cdot 10^{-5}$ sec d'après la fig. 1

$$\text{et } e^{fs} = e^{12,7} = 3,16 \cdot 10^5$$

$$S = \frac{2,25 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 3,16 \cdot 10^5}{36} = 1,2 \cdot 10^{-3}$$

Le calcul de S peut se faire aussi d'une autre manière qui consiste, à translater la partie finale de la courbe observée d'une valeur égale à $\frac{0,08Q}{T} \times f_s$ vers le haut du graphique lorsque la fonction f_s est positive (voir la courbe en tireté de la fig. 1) ou vers le bas lorsque la fonction f_s est négative et à relever sur le graphique la valeur t_0 , à l'intersection de la courbe translatée avec l'axe des rabattements nuls et à appliquer l'expression de JACOB

$$S = \frac{2,25 \times T \times t_0}{r^2}$$

$$\text{Dans le cas présent : } \frac{0,08 Q}{T} \times f_s = 4,7 \text{ m ; } t_0 = 3 \text{ sec}$$

$$\text{et } S = \frac{2,25 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 3}{36} = 1,1 \cdot 10^{-3} .$$

3. Méthode de la courbe type de la fonction E

Dans le cas présent :

$$\beta_1 = \frac{a(1+z)}{r} = \frac{3,16(15+7,5)}{6} = 11,8 \approx 12$$

$$\beta_2 = \frac{a(d+z)}{r} = \frac{3,16(0+7,5)}{6} = 3,94 \approx 4$$

$$\beta_3 = \frac{a(1-z)}{r} = \frac{3,16(15-7,5)}{6} = 3,94 \approx 4$$

$$\beta_4 = \frac{a(d-z)}{r} = \frac{3,16(0-7,5)}{6} = -3,94 \approx -4$$

$$\text{et } E = M(u, 12) - M(u, 4) + M(u, 4) + M(u, 4) = M(u, 12) + M(u, 4) .$$

On calculera cette fonction en utilisant les tables de la fonction $M(u, \beta)$ de l'annexe 1.

$\frac{1}{u}$	$M(u, 4)$	$M(u, 12)$	E
$2,5 \cdot 10^1$	2,52	2,68	5,20
$5,0 \cdot 10^1$	2,96	3,35	6,31
$1 \cdot 10^2$	3,30	4,00	7,30
$1,66 \cdot 10^2$	3,50	4,44	7,94
$2,5 \cdot 10^2$	3,62	4,74	8,36
$5 \cdot 10^2$	3,78	5,18	8,96
$1 \cdot 10^3$	3,90	5,51	9,41
$1,66 \cdot 10^3$	3,96	5,70	9,66
$2,5 \cdot 10^3$	4,00	5,82	9,82
$5 \cdot 10^3$	4,06	5,98	10,04
$1 \cdot 10^4$	4,10	6,09	10,19

La courbe type de E en fonction de $u' = \frac{1}{u}$ sera maintenant construite (voir fig. 3).

La superposition de la courbe observée (fig. 2) sur cette courbe type aboutit aux coordonnées suivantes d'un point :

$$\left. \begin{array}{ll} s = 7,3 & \text{pour } E = 10 \\ t = 15 \text{ sec} & \text{pour } u' = 10 \end{array} \right\}$$

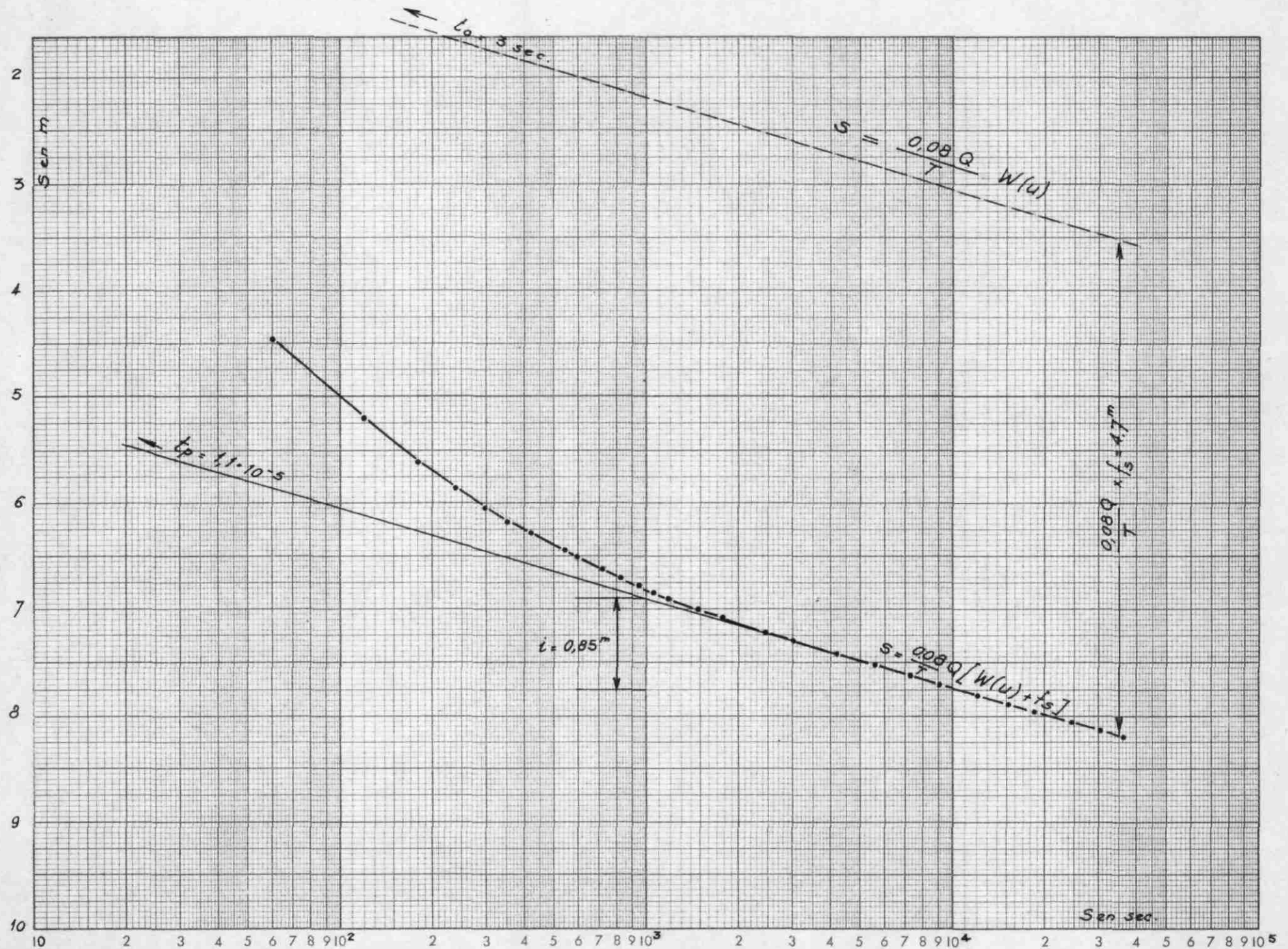
$$\text{d'où } K_h = \frac{0,04 Q}{s(1-d)} E = \frac{0,04 \cdot 100 \cdot 10}{7,3 \cdot 15} = 0,36 \text{ m/s} \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

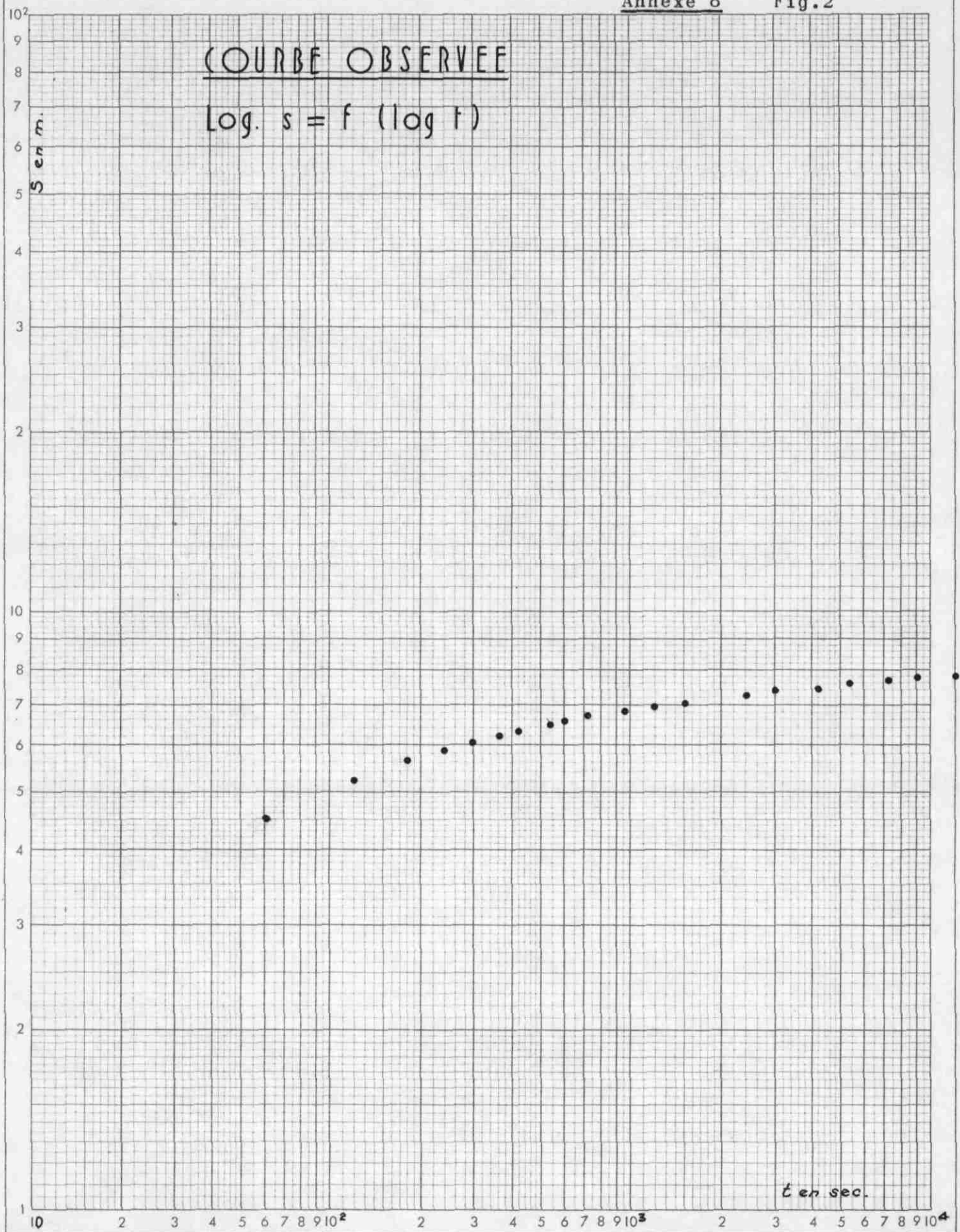
$$\text{et } S/b = \frac{4K_h t}{r^2 u'} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot 15}{36 \cdot 10} = 1,67 \cdot 10^{-5}$$

et puisque $b = 60 \text{ m}$

$$T = K_h \cdot b = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

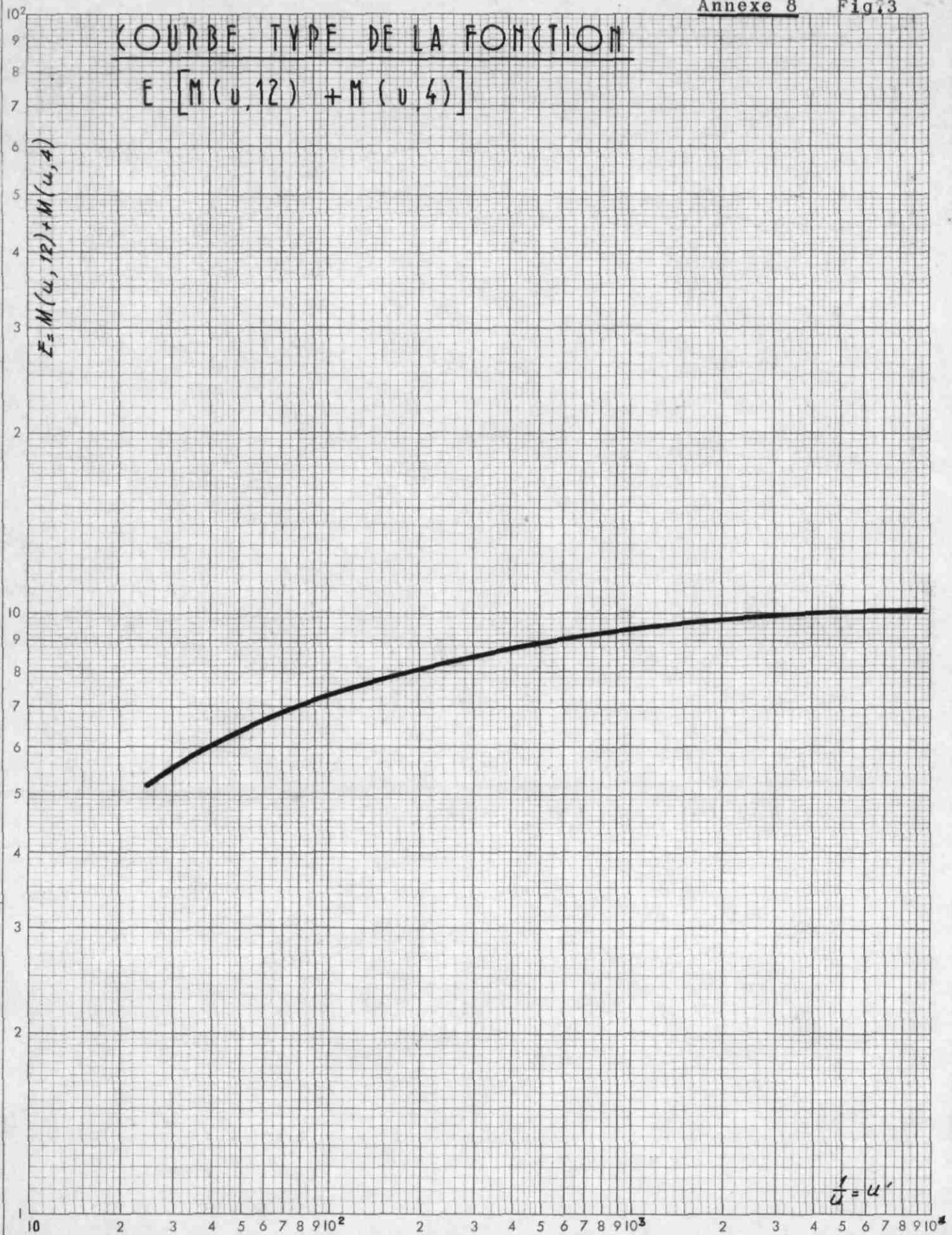
$$\text{et } S = S/b \cdot b = 1 \cdot 10^{-3} .$$





COURBE TYPE DE LA FONCTION

$$E[M(u, 12) + M(u, 4)]$$



ANNEXE 9

EVALUATION RAPIDE DE L'EFFET DE LA PÉNÉTRATION PARTIELLE SUR LES RABATTEMENTS AU Puits DE POMPAGE

Pour les périodes relativement longues $t > \frac{bS}{2K_v}$, on a vu au § 2 que l'effet de la pénétration partielle dans l'équation^v du rabattement pouvait être réduit à un terme indépendant du temps (équation 3). L'évaluation de ce terme constant permettra donc, ajouté à la loi de variation de THEIS, de calculer les rabattements dans un puits à pénétration partielle. Selon l'expression de BRONS et MARTING (référence 20), tout se passe comme s'il s'agissait d'une perte de charge singulière au puits. Ces auteurs et après eux Y.M. STERNBERG (référence 18) ont évalué d'une manière approximative cet effet de pénétration partielle au puits de pompage en fonction du degré de pénétration du puits, du rayon du puits et de l'épaisseur de l'aquifère.

Ils ont vérifié que ces valeurs sont confirmées par des méthodes de calcul plus rigoureuses lorsque le temps de pompage est suffisamment long ($u < 10^{-4}$) et les ont rassemblées sous forme de tableaux et de graphiques qui sont directement utilisables, pour évaluer les rabattements dans les puits incomplets en régime d'exploitation. Le puits peut comporter plusieurs parties crépinées séparées par des tubages.

Au bout d'un temps t le rabattement ne sera donc pas seulement

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad \text{ou} \quad \frac{0,183 Q}{T} \log \frac{2,25 Tt}{r_p^2 S}$$

mais $s = \frac{Q}{4\pi T} [W(u) + F_1]$

qui peut aussi s'écrire :

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) + \Delta s_p \quad \text{ou} \quad \frac{0,183 Q}{T} \log \frac{2,25 Tt}{r_p^2 S} + \Delta s_p$$

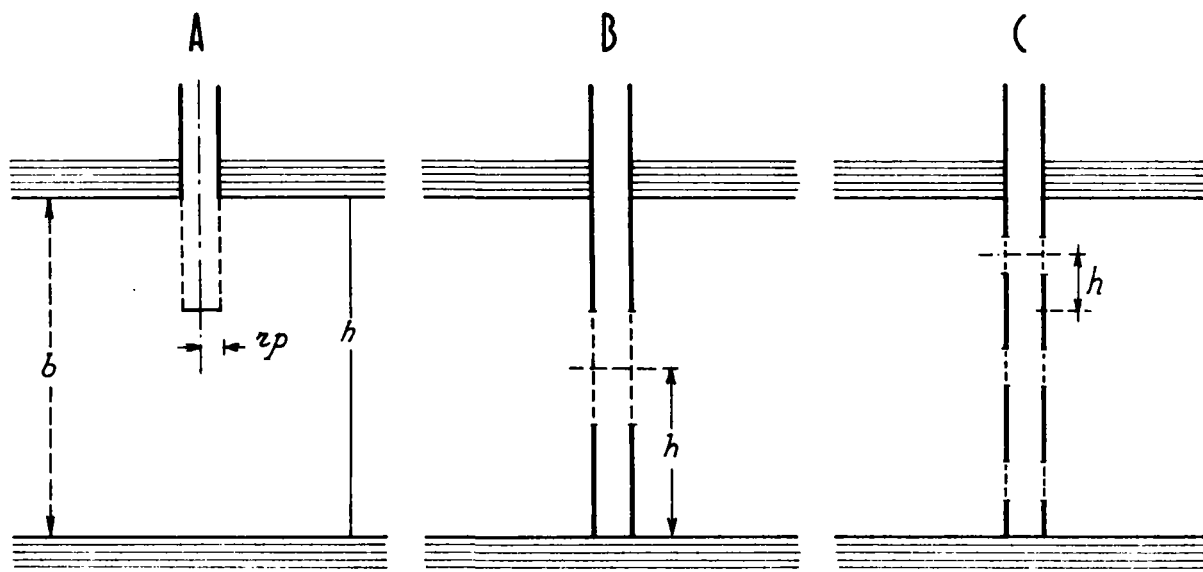
où $\Delta s_p = \frac{Q}{4\pi T} F_1$ est la perte de charge supplémentaire, introduite par l'effet de pénétration partielle du puits.

Valeurs de F_1 en fonction des paramètres du puits et de l'aquifère

F_1 est exprimé en fonction de

γ , " degré de pénétration", égal au rapport de la longueur de la partie crépinée sur l'épaisseur b de l'aquifère ;

$\frac{h}{r_p}$, où r_p est le rayon du puits et h une épaisseur caractéristique dont on saisira la signification sur les figures suivantes :



Dans le cas A, $h = b$. En B, $h = \frac{b}{2}$; les écoulements à la partie supérieure et inférieure sont symétriques par rapport au plan horizontal médian (à $\frac{b}{2}$) et l'on retrouve la même configuration que le cas A. De même, le cas de la crépine multiple (C) est la juxtaposition des cas précédents. Sur les trois figures A, B et C, $\gamma = 1/3$.

En fonction de ces paramètres, valeurs de F_1 :

h/r_p	γ				
	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
1	1,2718	0,8948	0,4428	0,1876	0,0492
2	2,4768	1,7174	0,8394	0,3564	0,0948
5	5,7500	3,8420	1,8240	0,7786	0,2146
10	10,3178	6,5898	3,0292	1,3004	0,3734
20	17,2812	10,4260	4,6202	1,9964	0,6004
50	30,0120	16,7678	7,1124	3,096	0,9864
100	41,4026	22,0680	9,1338	3,9924	1,3142
200	53,4874	27,5234	11,1936	4,9070	1,6544
300	60,5990	30,7390	12,4022	5,4438	1,8544
500	69,8300	34,8318	13,9358	6,1256	2,1102
700	75,8694	37,5204	14,9446	6,5738	2,2782
1 000	82,2796	40,3720	16,0142	7,0492	2,4564
10 000	123,7154	58,7906	22,9214	10,1192	3,6076

Remarques importantes :

- 1 - On notera la simplicité d'emploi de cette méthode de détermination de l'effet de la pénétration partielle.
- 2 - Le calcul présent suppose l'isotropie des perméabilités. Dans les cas réels où l'anisotropie serait notable, la valeur de ces pertes de charges additionnelles pourrait être fort différente. Cette remarque limite le domaine d'application de la méthode et lui enlève de fait un peu de son intérêt.
- 3 - Il ne faudra pas manquer d'ajouter aux pertes de charges ainsi calculées les pertes de charges singulières, linéaires ou non, qui se manifestent au voisinage du puits. Elles sont constantes dans le temps et l'on peut les évaluer par des essais appropriés (cf. l'Aide-mémoire, rapport n° 72 SGN 273 AME, 3ème partie, p. 44).

