

BUREAU DE RECHERCHES GÉOLOGIQUES ET MINIÈRES

SERVICE GÉOLOGIQUE NATIONAL
B.P. 6009 - 45 Orléans (02) - Tél.: (38) 66.06.60

MÉMENTO D'HYDRAULIQUE SOUTERRAINE

par

M. BONNET



Département HYDROGÉOLOGIE
B.P. 6009 - 45 Orléans (02) - Tél.: (3B) 66.06.60

70 SGN 367 HYD

Décembre 1970

SOMMAIRE

I - NOTATIONS ET UNITES

- 1.1. Masse spécifique
- 1.2. Poids spécifique
- 1.3. Viscosité dynamique
- 1.4. Viscosité cinématique
- 1.5. Coefficient de compressibilité
- 1.6. Pressions
- 1.7. Potentiel hydraulique
- 1.8. Porosité
- 1.9. Perméabilité

II - LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE DES MILIEUX POREUX SATURES

- 2.1. Equation de conservation
- 2.2. Equation fondamentale de la dynamique
- 2.3. Equation d'état

III - PRINCIPALES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DES ECOULEMENTS MONOPHASIQUES EN MILIEUX POREUX SATURES

- 3.1. Ecoulements en charge
- 3.2. Ecoulements à surface libre

IV - L'HYDRODYNAMIQUE DES MILIEUX POREUX NON SATURES

V - L'HYDRODYNAMIQUE DES ECOULEMENTS DIPHASIQUES

E R R A T A

(au rapport 70 SGN 367 HYD)

"Memento d'hydraulique souterraine"

par M. BONNET

Page 2 - § 1.2.

. lire :

le kgp/m³ (= 981 000/10⁶ dynes/cm³ = 0.981 dyne/cm³)

. au lieu de :

le kgp/m³ (= 981 000/10⁴ dynes/cm³ = 981 dynes/cm³)

Page 10 - § 1.9.

. lire :

$$K = L T^{-1}$$

$$k = L^2$$

. au lieu de :

$$k = L T^{-1}$$

Page 16 - § 2.2.

. lire :

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \vec{\text{grad}} \phi$$

. au lieu de :

$$\vec{v} = \frac{k}{\mu} \text{grad } \phi$$

Page 17 - § 2.3.

. lire :

... masse spécifique à la pression p

Page 18 - § 3.1.

. lire :

$$\operatorname{div} \rho \cdot \vec{v} = - \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} = - \operatorname{div} \left(\frac{k \rho}{\mu} \operatorname{grad} \phi \right)$$

. au lieu de :

$$\operatorname{div} \rho \cdot \vec{v} = - \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} = - \operatorname{div} \left(\frac{k \rho}{\mu} \operatorname{grad} \varphi \right)$$

Page 19 - § 3.1.1.2.

. lire :

$$(E. 2.3.) \quad \rho = \rho_0 e^{\beta (p-p_0)}$$

. au lieu de :

$$(E. 2.3.) \quad \rho = \rho_0 e^{-\beta (p-p_0)}$$

qui donne, si les variations de p sont assez faibles

$$\vec{\operatorname{grad}} \rho = \rho_0 \beta \vec{\operatorname{grad}} p$$

. lire également :

$$\rho g z \simeq \rho^2 g \simeq 10^3$$

De même considérer l'équation (E. 3.5.)

$$\operatorname{div} \left[k (\vec{\operatorname{grad}} \rho) \right] = \beta \mu \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}$$

. au lieu de

$$\operatorname{div} \left[k (\vec{\operatorname{grad}} p) \right] = \beta \mu \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}$$

Page 20 - § 3.1.1.2.

. lire l'équation (E. 3.8.)

$$\Delta p = \frac{\beta \mu \omega}{k} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{K'} \frac{\partial p}{\partial t}$$

avec $K' = \frac{k}{\mu \beta \omega}$ (appelé diffusivité par les pétroliers)

. au lieu de :

$$\Delta p = \frac{\beta \mu \omega}{k} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t}$$

avec $K = \frac{k}{\mu \beta \omega}$

. lire : $\omega = \omega_0 \left[1 + \alpha (p-p_0) \right]$

d'où, en négligeant les termes du second ordre :

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} = \dots \text{ etc.}$$

Page 22 - § 3.1.1.3.

. lire :

$$\omega = \omega_0 e^{\alpha (p-p_0)}$$

. au lieu de :

$$\omega = \omega_0 e^{-\alpha (p-p_0)}$$

et sur la dernière ligne : figure 2.1.0.

Page 23 - § 3.1.1.3.

. lire :

Enfin l'équation d'état de l'eau s'écrit :

$$(R_4) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \rho \frac{\partial p}{\partial t}$$

. au lieu de :

$$(R_4) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta p_0 \frac{\partial p}{\partial t}$$

Page 24 - § 3.1.1.3.

. lire :

En combinant avec l'équation de DARCY généralisée :

$$\vec{v} = - \frac{\|k\|}{\mu} \vec{\text{grad}} \phi \quad (\text{avec } \phi = p \pm \rho g z)$$

. au lieu de :

$$v = - \frac{\|k\|}{\mu} \vec{\text{grad}} \varphi$$

. lire :

$$(E. 3.16) \quad \text{div} \left(\frac{k}{\mu} \vec{\text{grad}} p \right) = \omega \left(\beta + \frac{\alpha}{\omega} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{milieu hétérogène}$$

. au lieu de :

$$(E. 3.16) \quad \text{div} \left(\frac{k}{\mu} \vec{\text{grad}} p \right) = \omega \rho_o \left(\beta + \frac{\alpha}{\omega} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{milieu hétérogène}$$

Page 29 - § 3.2.2.1.

. lire :

$$S' \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{div} (K \vec{\text{grad}} \varphi) \quad (\text{avec } S' = S/e)$$

. au lieu de :

$$S \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{div} (K \vec{\text{grad}} \varphi)$$

Page 30 - § 3.2.2.2. (2)

. lire

$$(\vec{v} - \vec{q}) \cdot \vec{n} \, ds \, dt = \vec{u} \cdot \vec{n} \, dt \cdot \omega_{eff} \cdot ds$$

. au lieu de :

$$(\vec{v} - \vec{q}) \cdot \vec{n} \, ds \, dt = \vec{u} \cdot \vec{n} \, dt \cdot \omega_e$$

. lire dans les différentes formules :

ω_{eff} au lieu de ω_e ou ω_e

(ω_{eff} porosité efficace)

. lire dans l'équation (E.3.23)

$$\dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Z} - \frac{K+q}{2K} \right)^2 = \left(\frac{K-q}{2K} \right)^2 + \frac{\omega_{eff}}{K} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

. au lieu de :

$$\dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Z} + \frac{K+q}{2K} \right)^2 = \left(\frac{K-q}{2K} \right)^2 + \frac{\omega_e}{K} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

lire ce même signe moins dans l'équation (E. 3.25)

Page 34 - § 3.2.3.1.

lire ω_{eff} à la place des différentes notations ω ou ω_e ou ω_e

(corrections établies par M. BONNET et M. VANDENBEUSCH)

R E S U M E

Ce mémento a pour principale ambition de fixer un langage de base commun à toutes les personnes qui auront au B.R.G.M. à travailler sur des problèmes dont la définition et la résolution implique l'appel à l'hydraulique souterraine.

Il n'a pas de prétention à l'originalité et reprend seulement les notions et formulations les plus classiques de l'hydrodynamique souterraine qui sont à la base de toutes les méthodes pratiques. Mais on espère qu'il aidera les utilisateurs à éviter l'écueil que constitue la dispersion de ces éléments fondamentaux dans de trop nombreux ouvrages (souvent en langue anglaise) et leur exposé selon des points de vue différents et avec des notations également très diverses.

Ainsi ce mémento complète et appuie les rapports méthodologiques déjà publiés par le Département sur les applications de l'hydrodynamique en hydrogéologie (et en particulier le formulaire de l'hydrogéologue de E. BERKALOFF) qui tous excluaient volontairement toute présentation détaillée des notions et équations fondamentales.

A l'inverse, ici, toute référence aux applications pratiques des formules a été évitée.

Dans sa forme actuelle, le mémento comprend les grands chapitres suivants :

1. Notations et unités
2. Les équations fondamentales de la physique des milieux poreux saturés
3. Principales équations aux dérivées partielles des écoulements monophasiques en milieux poreux saturés.

Il devra donc être complété au moins par les chapitres suivants en cours de rédaction :

4. L'hydrodynamique des milieux poreux non saturés
5. L'hydrodynamique des écoulements diphasiques.

D'un autre côté, il est reconnu que ce texte est perfectible selon les observations des utilisateurs et des théoriciens et pourra être modifié.

D'où sa présentation en reliure à feuilles mobiles qui permettra la plus grande souplesse.

AVANT-PROPOS

La diffusion de ce mémento, resté longtemps document provisoire, à l'intention de quelques spécialistes, a été rendu nécessaire par l'accroissement du nombre des ingénieurs qui ont, et auront de plus en plus désormais à utiliser les concepts et appliquer les méthodes de l'hydraulique souterraine dans le cadre des études d'hydrogéologie : interprétation des pompages d'essai, projets d'exploitation, de rabattement de nappe ou d'alimentation artificielle, étude et prévision des variations naturelles de niveau, étude des phénomènes d'intrusion saline, élaboration de modèles, etc...

On sait, en effet, que ces travaux ne peuvent et ne doivent pas être le fait des seuls spécialistes en hydraulique souterraine, mais doivent être conduits en équipe ou même le plus souvent par l'hydrogéologue qui a conduit les investigations de terrain selon une méthodologie qui lui aura certes été le plus souvent transmise par des spécialistes, mais qu'il devra cependant avoir parfaitement assimilée.

Ce texte a donc pour principale ambition de fixer un langage de base commun à toutes les personnes qui auront au B.R.G.M. à travailler sur des problèmes dont la définition et la résolution implique l'appel à l'hydraulique souterraine.

Il n'a pas de prétention à l'originalité et reprend seulement les notions et formulations les plus classiques de l'hydrodynamique souterraine qui sont à la base de toutes les méthodes pratiques. Mais on espère qu'il aidera les utilisateurs à éviter l'écueil que constitue la dispersion de ces éléments fondamentaux dans de trop nombreux ouvrages (souvent en langue anglaise) et leur exposé selon des points de vue différents et avec des notations également très diverses.

Ainsi ce mémento complète et appuie les rapports méthodologiques déjà publiés par le Département sur les applications de l'hydrodynamique en hydrogéologie (et en particulier le formulaire de l'hydrogéologue de E. BERKALOFF) qui tous excluaient volontairement toute présentation détaillée des notions et équations fondamentales.

Il est évident qu'en cas de diversité, une seule option a été retenue et est proposée. Et il est bien entendu qu'il est vivement recommandé que sauf indication expressément énoncée, l'ensemble des ingénieurs du B.R.G.M. s'y rallie dans ses écrits et ses exposés. (Ceci est valable surtout pour les notations et les définitions et les formulations d'équations au moins pour les plus fondamentales.

Nous pensons que le respect de cette discipline facilitera incontestablement les échanges et fortifiera la cohérence et l'unité des productions des ingénieurs du bureau en hydrogéologie.

A l'inverse, ici, toute référence aux applications pratiques des formules a été évitée.

Dans sa forme actuelle le mémento comprend les grands chapitres suivants :

1. Notations et unités
2. Les équations fondamentales de la physique des milieux poreux saturés
3. Principales équations aux dérivées partielles des écoulements monophasiques en milieux poreux saturés.

Il devra donc être complété au moins par les chapitres suivants en cours de rédaction :

4. L'hydrodynamique des milieux poreux non saturés
5. L'hydrodynamique des écoulements diphasiques.

D'un autre côté, il est reconnu que ce texte est perfectible selon les observations des utilisateurs et des théoriciens et pourra être modifié.

D'où sa présentation en reliure à feuilles mobiles qui permettra la plus grande souplesse.

MEMENTO D'HYDRAULIQUE SOUTERRAINE

1. DEFINITIONS, NOTATIONS, UNITES .

1.1. Masse spécifique

Définition : la masse spécifique ("density" des anglo saxons) d'un corps est la masse de l'unité de volume de ce corps (dans des conditions précisées de température et de pression).

Dimensions : $M L^{-3}$

Unités :

En Europe on emploie le plus souvent le g/cm^3 (syst. C.G.S.)

Aux USA la $lb. sec^2/ft^4$ (déduite de l'unité de poids spécifique lb/ft^3)

Pour l'eau. La masse spécifique de l'eau prise à la pression atmosphérique est assez peu variable en fonction de la température. Elle admet un maximum proche de 1 aux environs de 4° .

t	0	4	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ρ	0,9999	1	0,9982	0,9957	0,9922	0,9881	0,9832	0,9778	0,9718	0,9653	0,9585

On a donc tant que la température reste inférieure à 50° :

$$1 - \rho < 10^{-2} \text{ g/cm}^3$$

soit: $\rho \neq 1 \text{ g/cm}^3$

ou en unités américaines : $\rho \neq 1,93 \text{ lb. sec}^2/ft^4$

1.2. Poids spécifique

Définition : c'est le poids de l'unité de volume. Il est relié à la masse spécifique par la relation $\gamma = \rho g$

Dimensions :

$$ML^{-3} \times L T^{-2} = ML^{-2} T^{-2} \text{ ou } ML T^{-2} L^{-3}$$

Unités :

En Europe : la dyne/cm³

1 kgp/m³ (=981 000/10.⁴ dynes/cm³ = 981 dynes/cm³)

Aux USA : la lb./ft³

soit 1 lb./ft³ = $\frac{0,453 \times 981}{28,3}$ dynes/cm³
 = 15,8 dynes/cm³

Pour l'eau et dans les mêmes conditions que pour la masse spécifique

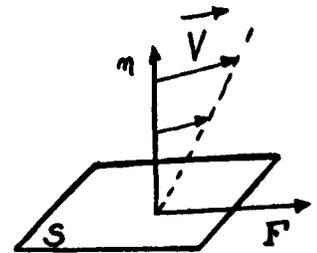
$\gamma \neq 1 \times 981 = 981$ dynes/cm³ = 1 g_p/cm³
 soit $\gamma \neq 62$ lb./ft³

1.3. Viscosité dynamique

Définition : c'est un coefficient de frottement qui est défini par la formule

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{dv}{dn}$$

$\frac{F}{S}$ = Force tangentielle unitaire exercée sur
 une plaque par un écoulement présentant un
 gradient de vitesse selon la direction \vec{n}
 (perpendiculaire à la plaque) égal à $\frac{dv}{dn}$



Notation classique: μ

Dimensions

$MLT^{-2} \cdot L^{-2} \times \cancel{L} \times \cancel{L}^{-1} T = ML^{-1} T^{-1}$

Unités

En Europe système C.G.S. : la poise (dyne. sec/cm²)

Aux USA les pétroliers (Muskat) utilisent la poise

les hydrauliciens la lb. sec/ft² = 480 poises

Pour l'eau . La viscosité varie beaucoup avec la température comme le montre le tableau ci-dessous.

θ	(1)	(2)	θ	(1)	(2)
0	1,797	1,7921	23	937	9258
1	1,739	1,7313	24	916	9142
2	1,683	1,6728	25	895	8937
3	1,628	1,6191	26	0,875	0,8737
4	1,576	1,5674	27	855	8545
5	1,525	1,5188	28	836	8360
6	1,476	1,4728	29	818	8180
7	1,429	1,4284	30	800	8007
8	1,384	1,3860	35	723	7225
9	1,341	1,3462	40	656	6560
10	1,301	1,3077	45	599	5988
11	1,264	1,2713	50	550	5494
12	1,230	1,2363	55	508	5064
13	1,197	1,2028	60	473	4688
14	1,167	1,1709	65	437	4355
15	1,138	1,1404	70	407	4061
16	1,110	1,1111	75	381	3799
17	1,083	1,0828	80	357	3565
18	1,056	1,0559	85	335	3355
19	1,031	1,0299	90	314	3165
20	1,006	1,0050	95	299	2994
21	0,982	0,981	100°		2838
22	959	9579			

(1) J. DUCLAUX (1934) — (2) HODGMAN (1951)

En pratique , on retiendra :

Pour l'eau à 20° $\mu = 1,008 \pm 0,02$ centipoises $\neq 1$

ou $\mu = 2,08 \cdot 10^{-5}$ lb. sec/ft²

On a d'autre part la formule approximative suivante (formule de Helmholtz)

$$\mu = \frac{0,0178}{1 + 0,0337 \theta + 0,000222 \theta^2} \text{ cp}$$

1.4. Viscosité cinématique

Définition et dimensions : c'est le rapport de la viscosité dynamique à la masse spécifique. On la note par la lettre ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = L^2 T^{-1}$$

Unités

Systeme C.G.S. 1e cm²/S
 Aux USA 1e ft²/sec = 925 cm²/S

Pour l'eau à 20°

$$\nu = 1.10^{-2} \text{ cm}^2/\text{S}$$

$$\nu = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{sec} \neq \underline{10^{-5} \text{ ft}^2/\text{sec}}$$

1.5. Coefficient de compressibilité

Définition : le coefficient de compressibilité de l'eau β est défini par

$$\beta = - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{1}{\Delta p}$$

ou $\frac{\Delta v}{v}$ représente la variation relative de volume provoquée par la variation de pression Δp

Dimension : le coefficient de compressibilité est homogène à l'inverse d'une pression soit

$$\beta = (ML^{-1} T^{-2})^{-1} = M^{-1} L T^2$$

Unités :

En Europe C.G.S. : (barye)⁻¹

mais on utilise également des unités non homogènes :

- 1e (kg/cm²)⁻¹
- 1e (m d'eau)⁻¹ = (1/10 kg/cm²)⁻¹
- l'unité de volume/atmosphère ou (atm.)⁻¹

Aux USA

- 1e (p. s.i.)⁻¹ = (square inch/pound)

Pour l'eau

à 20° et au voisinage de la pression atmosphérique, on a :

$$\begin{aligned} \beta &\neq 47.10^{-6} \text{ (kg/cm}^2\text{)}^{-1} = 47.10^{-7} \text{ (m d'eau)}^{-1} \\ &\neq 49.10^{-6} \text{ (atm)}^{-1} \\ &\neq 46.10^{-11} \text{ (baryes)}^{-1} \\ &\neq 3,3.10^{-6} \text{ in}^2\text{/lb} \end{aligned}$$

On retiendra

$$\beta \neq 4,7.10^{-6} \text{ (m d'eau)}^{-1} \text{ à } 20^\circ$$

ou pour les calculs approchés

$$\beta \neq 5.10^{-6} \text{ (m d'eau)}^{-1} \neq 5.10^{-5} \text{ (atm)}^{-1} \neq 5.10^{-10} \text{ (barye)}^{-1}$$

β varie légèrement en fonction de la température comme le montre le tableau ci-dessous.

Condition adiabatique :

Condition isotherme :

θ° C température	β cm ² /dyne à 1 atm	$\beta = \frac{C}{L + P}$	avec :
0	5,01-5,04 x 10 ⁻¹¹		
10	4,78	C	L(dyne/cm ²)
20	4,58	(pour l'eau)	
25	4,57	0,1368	29,96 x 10 ⁸
30	4,46		
30,8	4,35		
34,78	4,41		
35	4,48	0,1368	30,55
40	4,41		
45	4,44	0,1368	30,81
50	4,40		
55	4,44	0,1368	30,78
60	4,43		
65	4,48	0,1368	30,52
75	4,55	0,1368	30,05
85	4,65	0,1368	29,39
90	4,68		
100	4,80		

HODGMAN (1957)

Compressibilité de l'eau en unités de volume, par atmosphère,
d'après AMAGAT (1893)
Pression en atmosphère

Température C°	1-25	25 - 50	100 * 200
0	52,5 x 10 ⁻⁶	51,6 x 10 ⁻⁶	49,2 x 10 ⁻⁶
10	50,0	49,2	46,1
20	49,1	47,6	44,2
50			42,5
100			46,8

1.6. Pressions

Définition : En ce qui concerne les écoulements souterrains, on désigne sous le terme pression (p) la pression qui règne dans le fluide contenu dans les pores du milieu poreux.

En général on mesure ces pressions par référence à la pression atmosphérique prise égale à 0.

Dans ces conditions :

- la pression en un point P du milieu poreux s'exprime en fonction de la hauteur d'eau dans un piézomètre par

$$p = \rho g h_p \quad \text{Fig. 1.6.0.}$$

- dans le cas des nappes à surface libre la pression en un point du milieu poreux est donc positive au-dessous de la surface libre dans la zone saturée, négative au-dessus de la surface libre dans la frange capillaire et la zone non saturée.

Ces pressions "négatives" sont souvent appelées tensions. Leur mesure (évidemment plus délicate que celle des pressions positives) s'effectue à l'aide de tensiomètres.

Si on parle en terme de pression absolue on a :

$$\text{Pression absolue} = \text{Pression atmosphérique} + p$$

Les différentes relations indiquées à la page précédente sont résumées par la figure 1.6.0 pour le cas de la nappe libre hydrostatique.

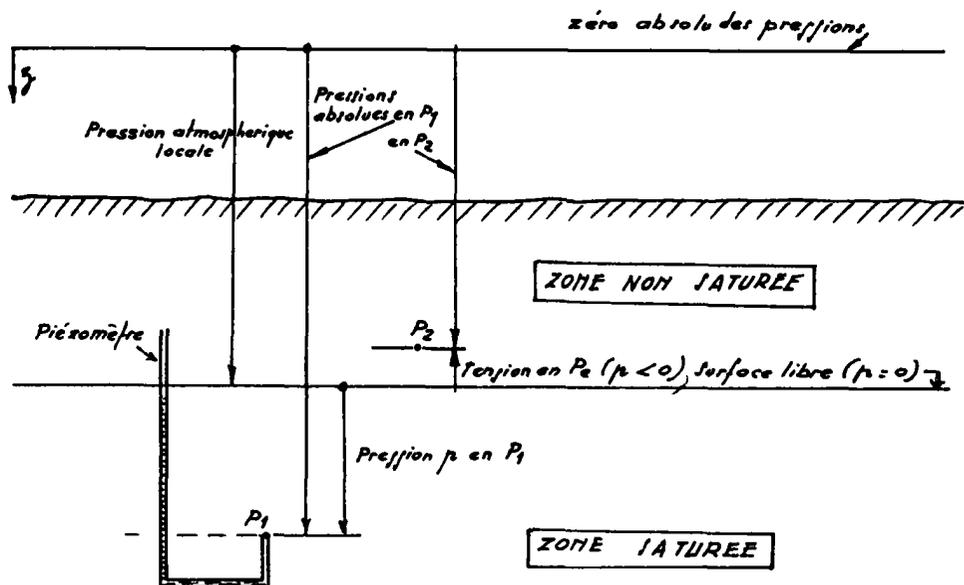


Figure 1.6.0. Mesure des pressions de fluide en milieu poreux

Unités

Rappelons les principales unités et équivalences (dimension $M L^{-1} T^{-2}$)

- unités homogènes

C.G.S. : la barye = 1 dyne/cm²

- unités dérivées

le bar = 10⁶ baryes

(le bar est la seule unité légale en France)

- unités courantes mais non homogènes

FRANCE { le kg/cm²
l'atmosphère = 760 mm de mercure
le mm d'eau

U.S.A. le p. s. i. = pound per square inch
(utilisé surtout par les pétroliers)

On retiendra les principales relations d'équivalence suivantes :

1 kg/cm² = 10 m d'eau = 0,968 atm = 0,981 bar

1 at = 1,033 kg/cm² = 1,013 bar

1 psi = 0,0703 kg/cm²

1.7. Potentiel hydraulique

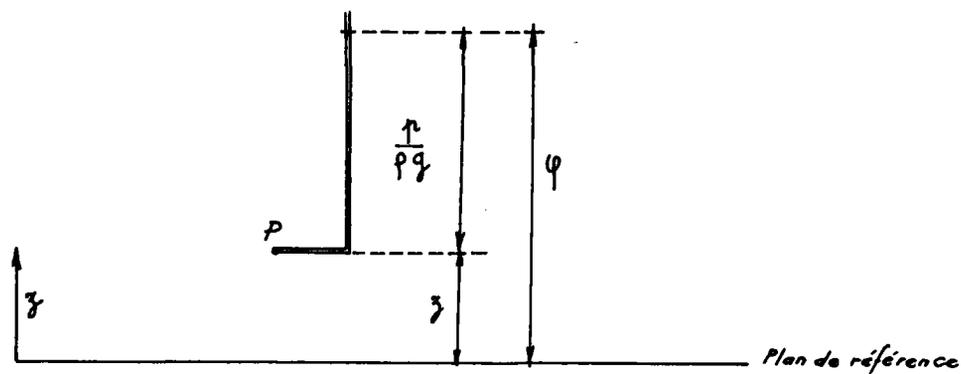
Définition : on appelle potentiel hydraulique pour les milieux poreux ou charge, en un point le terme :

$$\Psi = \frac{p}{\rho g} + z$$

z = cote du point considéré par rapport à un plan horizontal de référence
arbitrairement fixé

p = pression de pore au point considéré

On verra plus loin comment théoriquement s'introduit la notion de potentiel piézométrique. Dans la zone saturée, le potentiel, comme la pression p_0 , se déduit d'une lecture de niveau dans un piézomètre dès lors que l'on a choisi le plan horizontal de référence.



Unités et dimension

Le potentiel a les dimensions d'une longueur, il s'exprime en général en m (ou en pieds USA)

1.8. Porosité

Définition : On trouve dans la littérature de nombreuses définitions faisant intervenir le terme de porosité auquel est adjoint un qualificatif (cf in SCHOELLER pp. 23 à 49).

Du point de vue de la mécanique des fluides, il semble que parmi toutes ces "porosités" deux seulement méritent d'être retenues :

- la porosité sensu stricto ou porosité intrinsèque

c'est pour un certain volume de milieu poreux, (généralement pris petit) le rapport du volume des vides au volume total du milieu poreux soit :

$$\omega = \frac{V_v}{V}$$

ω = porosité

V_v = volume des vides

V_t = volume total

- la porosité efficace, (encore appelée capacité d'absorption ou porosité libre) ou "field capacity" des américains.

C'est le rapport du volume d'eau que peut libérer le milieu poreux sous l'action de seules forces de gravité au volume total V

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}}{V_t}$$

Les porosités sont des nombres sans dimension. En général on les exprime en pour cent (10^{-2}).

Remarque

Porosité sensu stricto ω et porosité efficace ω_{eff} sont numériquement égales à la teneur en eau du sol saturé θ_0 et à la différence entre θ_0 et la teneur en eau résiduelle θ_r mesurées lors d'une expérience de désorption sous l'action de la seule pesanteur (voir schémas ci-dessous).

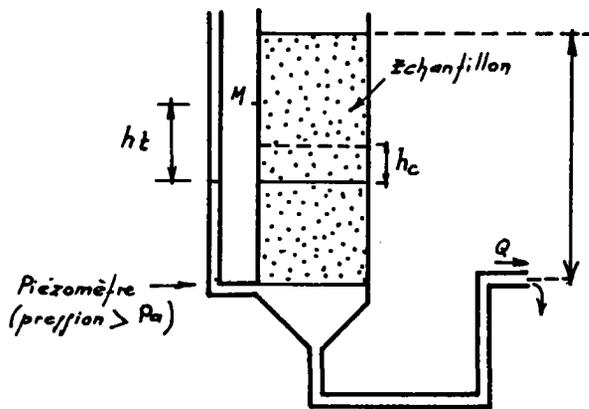


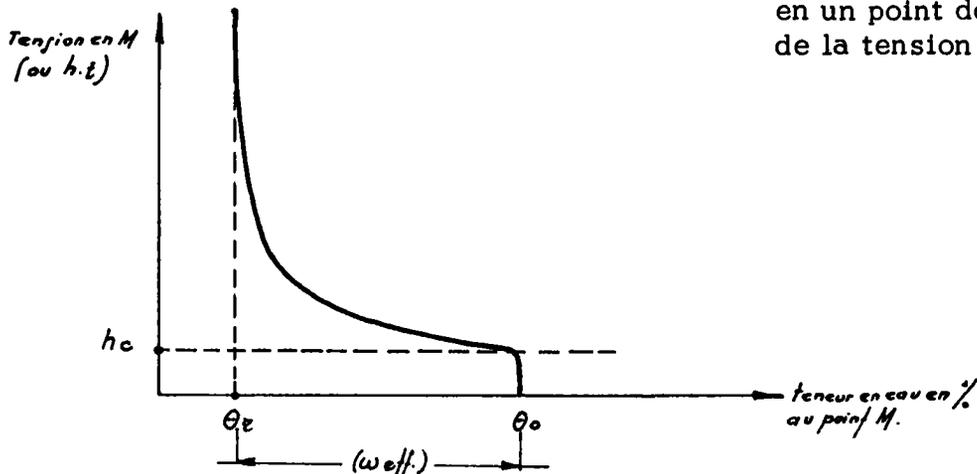
Schéma expérimental

instant 0 = échantillon saturé
teneur en eau θ_0 .

instant final = débit Q = 0
teneur en eau θ_r

Résultat

évolution de la teneur en eau en un point donné en fonction de la tension



1.9. Perméabilité

Définitions : on doit distinguer (même pour les études d'hydraulique) deux notions différentes

- . Le coefficient de perméabilité ou mieux "perméabilité de DARCY": K , qui se définit à partir de la relation expérimentale de DARCY

$$Q = K \frac{\Delta H}{\Delta l} S$$

Q : débit volumique d'un fluide donné dans des conditions de température et de pression fixées ($L^3 T^{-1}$)

H = charge hydraulique (L)

l = longueur (L)

S = section (L^2)

Conditions expérimentales : voir plus loin (paragraphe 2.2., page 13)

K caractérise donc un couple : fluide - milieu poreux

La perméabilité intrinsèque ou perméabilité sensu stricto : k , qui se définit, à partir de considérations d'analyse dimensionnelle, par la formule :

$$K = \frac{k \gamma}{\mu}$$

γ = poids spécifique du fluide en écoulement (= ρg)

μ = viscosité

k caractérise le seul milieu poreux

Dimensions : Aussi bien l'analyse dimensionnelle que les formules ci-dessus permettent de trouver :

$$k = L T^{-1}$$

$$k = L^2$$

Unités

On distingue des unités homogènes et des unités non homogènes mais consacrées par l'usage.

- unités homogènes

- . Coefficient de perméabilité

Le plus employé (et le plus conseillé) est le m/s

. Perméabilité intrinsèque

dans le système C.G.S. on doit employer le cm² (ou perm.)
les anglo-saxons emploient fréquemment le ft²

- unité d'usage

. Perméabilité de DARCY

Les hydrogéologues américains emploient le MEINZER

$$1 \text{ Meinzer} = \frac{1 \text{ gallon/day}}{\text{square foot}} \text{ pour } \frac{\Delta \psi}{\Delta l} = 1 \text{ et une eau à } 15^\circ$$

unité le g p d/f t²

. Perméabilité intrinsèque

Dans l'industrie pétrolière, on emploie le DARCY

$$1 \text{ Darcy} = \frac{\frac{1 \text{ centipoise} \times 1 \text{ cm}^3/\text{s}}{1 \text{ cm}^2}}{1 \text{ atmosphère/cm}}$$

ou son sous-multiple le milli Darcy = 10⁻³ Darcy

Relations entre les unités les plus employées (pour déterminer ces relations, il est recommandé de repasser par le système C.G.S.)

- perméabilité intrinsèque

en se rappelant que :

$$1 \text{ centipoise} = 0,01 \text{ dyne sec/cm}^2$$

$$\text{et } 1 \text{ atmosphère} = 1,013 \cdot 10^6 \text{ dynes/cm}^2$$

on trouve :

$$1 \text{ Darcy} = 0,987 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2 \neq 10^{-8} \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ Darcy} = 1,06 \cdot 10^{-11} \text{ ft}^2$$

- perméabilité de DARCY

De même en notant que :

$$1 \text{ ft} = 30,5 \text{ cm} \quad ; \quad 1 \text{ gallon} = 3,78 \text{ l}$$

on trouve :

$$1 \text{ Meinzer} = 0,134 \text{ ft/day} = 4,72 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}$$

$$1 \text{ m/s} = 2,12 \cdot 10^6 \text{ Meinzer}$$

Equivalences entre k et K

Si l'on prend comme fluide une eau douce à 15° et au voisinage de la pression atmosphérique, on a des relations fixes entre la perméabilité intrinsèque d'un matériau et la perméabilité de DARCY du couple eau-matériau :

Ainsi pour $k = 1$ DARCY, on a :

$$K = \frac{9,87 \cdot 10^{-9} \times 981}{10^{-2}} = 9,7 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$$

soit :

$$1 \text{ DARCY} \approx 9,7 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} \neq 10^{-5} \text{ m/s} \quad (\approx \text{ se dit équivalent à})$$

De même :

$$K = 1 \text{ MEINZER} \approx 4,72 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s} \neq 510^{-2} \text{ DARCY}$$

En pratique nous retiendrons essentiellement :

$1 \text{ DARCY} \neq 10^{-8} \text{ cm}^2 \approx 10^{-5} \text{ m/s}$ <p>(ou perm)</p>
--

Tableau des notations et unités
Relations entre les unités les plus employées

Grandeur ou coefficient	Notation	Dimension	UNITES courantes			Relations entre unités et valeurs à retenir
			C.G.S.	Europe	U.S.A.	
Masse spécifique	ρ	ML^{-3}	g/cm ³		lb. sec ² /ft ⁴	eau = 1 g/cm ³ = 1,93 lb. sec ² /ft ⁴
Poids spécifique ($\gamma = \rho g$)	γ	$ML^{-2} T^{-2}$	dyne/cm ³	kgp/m ³	lb./ft ³	eau = 981 dynes/cm ³ = 1 kgp/cm ³ = 62 lb./ft ³ 1 lb./ft ³ = 15,8 dynes/cm ³
Viscosité dynamique	μ	$ML^{-1} T^{-1}$	poise	centipoise	centipoise et lb. sec/ft ²	eau à 20° \neq 1 cp = 2,08.10 ⁻⁵ lb. sec/ft ² 1 lb sec ft ² = 480 poises
Viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$	ν	$L^2 T^{-1}$	stokes	stokes	ft ² /sec	eau à 20° \neq 1.10 ⁻² stokes = 1,1.10 ⁻⁵ ft ² /sec 1 ft ² /sec = 925 stokes
Coefficient de compressibilité	β	$M^{-1} LT^2$	(barye) ⁻¹	(kg/cm ²) ⁻¹ (atm) ⁻¹ (m d'eau) ⁻¹	(psi) ⁻¹	pour l'eau à 20° \neq (5.10 ⁻⁶ m d'eau) ⁻¹ \neq 5.10 ⁻⁵ (atm) ⁻¹ \neq 5.10 ⁻¹¹ (barye) ⁻¹
Pressions	p	$ML^{-1} T^{-2}$	barye	bar kg/cm ² atm m. d'eau	psi	1 kg/cm ² = 10 m d'eau = 0,968 atm = 0,981 bar 1 at = 1,033 kg/cm ² = 1,013 bar 1 psi = 0,0703 kg/cm ²
Perméabilité intrinsèque	k	L^2	perm	Darcy	ft ²	1 Darcy \neq 10 ⁻⁸ cm ² \approx 10 ⁻⁵ m/s (perm)
Coefficient de Darcy	K	LT^{-1}	cm/s	m/s	Meinzer ou gp d/ft ²	1 Meinzer \approx 5.10 ⁻² Darcy = 4,7 10 ⁻⁵ cm/s

II - LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE DES MILIEUX POREUX SATURES

Les équations du mouvement des fluides dans les milieux poreux dérivent de la combinaison de trois équations fondamentales de la physique des fluides en milieu poreux;

2.1. Equation de continuité

Cette équation traduit le principe de la conservation de la masse fluide. Elle s'obtient dans le cas général en faisant la balance de matériel sur un élément infinitésimal cubique.

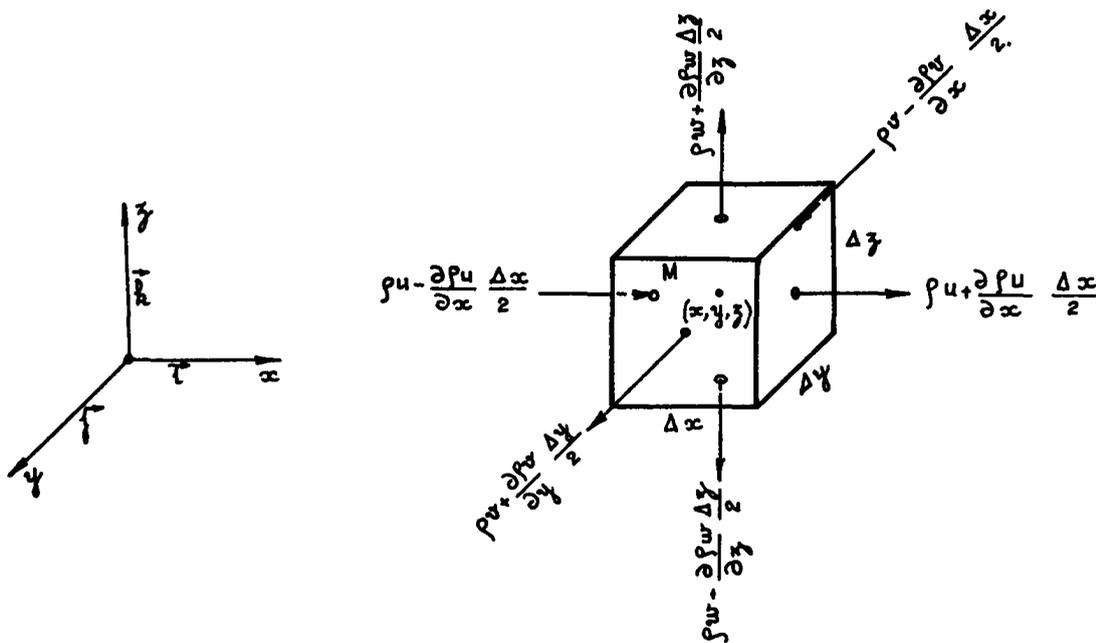


Figure 2.1.0. - Conservation de la masse dans un volume infinitésimal

Pour cet élément le principe s'énonce physiquement ainsi ;

- toute variation du flux massique total algébrique à travers les parois du cube se traduit par une variation égale de la masse emmagasinée dans le cube.

Avec les notations suivantes complétées par la figure 2.1.0.

$\vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$ vitesse du fluide

ρ = masse spécifique du fluide

ω = porosité du milieu poreux

En mécanique des fluides classiques, on démontre :

- pour les fluides visqueux compressibles, cette équation se traduit par :

$$(E. 2.3.) \quad \rho \frac{d \vec{v}}{dt} = - \text{grad } p + \sum \vec{F}_e + \mu \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \mu \text{ grad } \theta$$

(équation de NAVIER STOCKES)

avec :

$$\sum \vec{F}_e = \text{somme des forces extérieures}$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\theta = \text{div } \vec{v} \quad (\text{pour les fluides incompressibles le terme } \frac{1}{3} \mu \text{ grad } \theta = 0)$$

Cette équation régit donc l'écoulement des fluides réels dans le cas général. Dans le cas des écoulements en milieu poreux, c'est elle qui régit l'écoulement microscopique des fluides dans les canalicules du milieu poreux solide (voir remarque 1 précédemment). Malheureusement, on sait que même dans le cas d'écoulements présentant des conditions aux limites simples, l'équation de NAVIER STOCKES est d'un maniement très difficile. A fortiori, elle est pratiquement inapplicable de façon rigoureuse aux écoulements tortueux qui se forment dans le milieu poreux.

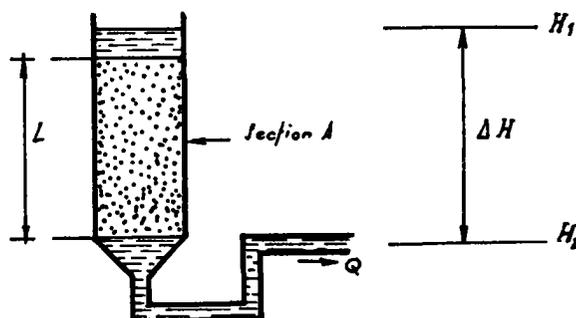
Toutefois, certains auteurs (HUBBERT, N.K. BOSE, DE WIEST) ont essayé de déduire de la loi de NAVIER STOCKES assortie de considérations statistiques et de diverses simplifications portant sur la nature des écoulements dans le milieu poreux, la loi générale régissant les écoulements macroscopiques dans les milieux poreux.

Ces diverses démonstrations sont parfois citées dans les ouvrages fondamentaux (cf. DE WIEST pp. 176-177). Mais d'une part ces "démonstrations" sont critiquables et ne font pas l'unanimité, d'autre part l'aspect macroscopique des écoulements en milieux poreux peut être abordé en première approximation de façon plus simple et plus pratique.

En effet, on connaît expérimentalement la relation qui régit un écoulement macroscopique linéaire dans un milieu poreux : c'est la loi de Darcy qui sous sa forme originelle s'écrit :

$$(E. 2.4.) \quad Q = K A \frac{H_1 - H_2}{L}$$

$$\frac{Q}{A} = \text{ou } V = K \frac{\Delta H}{L}$$



avec :

- Q débit volumique
- A section de l'écoulement
- Q/A = V vitesse macroscopique (ou moyenne)
- h₁ et h₂ charges piézométriques amont et aval
- L longueur de l'écoulement

La relation (E. 2.4.) est strictement expérimentale et "vérifiée" uniquement dans les conditions de l'expérience de DARCY (c'est-à-dire, en particulier, pour une dimension). On peut toutefois admettre qu'elle traduit dans les faits une relation plus générale qui s'énoncerait ainsi :

"la vitesse macroscopique d'un fluide circulant à travers un milieu poreux est directement proportionnelle aux forces agissant sur le fluide".

Si on donne à cette relation la valeur d'un postulat et si on tient compte des relations de dimension, on peut écrire par extension la loi plus générale suivante (ou loi de DARCY généralisée) :

$$(E. 2.5.) \begin{cases} v_x = - \frac{k_x}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - F_x \right) \\ v_y = - \frac{k_y}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - F_y \right) \\ v_z = - \frac{k_z}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - F_z \right) \end{cases}$$

dans laquelle :

v (v_x, v_y, v_z) = vitesse macroscopique

$k = \begin{vmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{vmatrix}$ = tenseur de perméabilité pour un terrain supposé anisotrope (les axes principaux d'anisotropie ayant été pris comme axe de référence voir ci-après).

P = pression de pore

\vec{F} (F_x, F_y, F_z) = résultante des forces de volume

μ = viscosité dynamique du fluide

dans le cas particulier où F dérive d'un potentiel V (F = - grad V), (E. 2.5.) devient

$$\vec{v} = \frac{k}{\mu} \text{ grad } \phi$$

avec $\phi = (p + V)$

Si donc les seules forces de volume qui interviennent sont les forces de pesanteur, on aura :

$$(E. 2.6.) \quad \vec{v} = - \frac{\|k\|}{\mu} \rho g \text{ grad } \psi$$

avec $\psi = \frac{p}{\rho g} \pm z$ $\begin{matrix} \text{signe + si axe } \uparrow z \\ \text{signe - si axe } \downarrow z \end{matrix}$

ψ étant par définition le potentiel hydraulique (encore appelé charge hydraulique*)

C'est en général sous cette forme que l'on a à employer la loi de Darcy. Elle constitue pour les écoulements macroscopiques en milieu poreux l'équivalent de la loi de Navier Stokes pour les écoulements fluides en milieu libre. Elle traduit le principe fondamental de la dynamique.

C'est elle que nous retiendrons comme 2ème loi fondamentale.

2.3. Equation d'état

Pour les fluides, en général, l'équation d'état est une relation de la forme :

$$F(p, \rho, T) = 0$$

Mais en fait les liquides, et l'eau en particulier, en présence de milieux poreux restent toujours dans des conditions quasi-isotherme et l'équation d'état se réduit à une relation entre les termes p et ρ .

$$F(p, \rho, T_0) = 0$$

Cette relation s'écrit pour les liquides :

$$(E. 2.7.) \quad \rho = \rho_0 e^{-\beta_0 (p_0 - p)}$$

masse spécifique à la pression p

masse spécifique à la pression p_0 de référence

coefficient de compressibilité à la pression p_0 de référence

* Ce potentiel ayant les dimensions d'une longueur peut se mesurer pratiquement par une cote d'eau dans un piézomètre ou cote piézométrique que l'on note H. Mais attention, il faut que le piézomètre soit ponctuel ou sinon que l'on soit dans des conditions d'écoulement particulières pour que l'on ait $\psi \equiv H$ (voir plus loin § 3.1.1.4. et 3.2.3. par exemple).

III - PRINCIPALES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DU MOUVEMENT DES LIQUIDES DANS LES MILIEUX POREUX

Toutes ces équations découlent de la combinaison des 3 équations fondamentales appliquées aux divers cas les plus fréquents d'écoulement.

Parmi ces cas, il convient de distinguer deux grands ensembles : les écoulements en charge ou captifs et les écoulements à surface libre ("confined" et "unconfined" flows des auteurs américains).

3.1. Les écoulements en charge

Définition : Ces écoulements ne comptent pas de surface libre parmi leurs conditions aux limites

Equation générale : (ou équation de diffusivité)

La combinaison de l'équation de continuité et de l'équation de Darcy généralisée donne :

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = - \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} = - \operatorname{div} \left(\frac{k\rho}{\mu} \operatorname{grad} \varphi \right)$$

ou encore

$$(E 3,1) \quad \operatorname{div} \left[\frac{*k\rho}{\mu} \operatorname{grad} (p \pm \rho_g z) \right] = \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}$$

3.1.1'. Divers cas particuliers classiques

3.1.1.1. Liquide incompressible - Réservoir incompressible

soit : $\rho = c^{te}$ $\omega = c^{te}$

(E 3,1.) devient

$$\operatorname{div} \left[\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} (p \pm \rho_g z) \right] = 0 = \operatorname{div} \frac{k\rho_g}{\mu} \operatorname{grad} \varphi$$

avec : $\varphi = \frac{p}{\rho_g} \pm z$ charge hydraulique

et l'équation fondamentale de l'écoulement du fluide incompressible s'écrit :

$$(E. 3.2.) \quad \operatorname{div} (K \vec{\operatorname{grad}} \varphi) = 0$$

si le milieu est hétérogène ou

$$(E. 3.3.) \quad \Delta \varphi = 0$$

si le milieu est homogène (K = constante)

* Il reste entendu malgré l'écriture allégée que k est dans le cas général une grandeur tensorielle.

3.1.1.2. Liquide compressible

Si on admet que la viscosité des fluides est pratiquement invariable avec la pression et que les écoulements sont isothermes, (E. 3.1..) devient :

$$\text{div} \left[\rho k (\vec{\text{grad}} p + \vec{\rho}_g z) \right] = \mu \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t}$$

ou en développant $\vec{\text{grad}} \rho_g z$

$$\text{div} \left[\rho k (\vec{\text{grad}} p + \rho_g \vec{g} + \rho_z \vec{\text{grad}} g + g z \vec{\text{grad}} \rho) \right] = \mu \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t}$$

Pour éliminer p, il faut faire intervenir l'équation d'état :

$$(E. 2.3.) \quad \rho = \rho_0 e^{-\beta(p - p_0)}$$

qui donne :

$$\vec{\text{grad}} \rho = -\beta \rho \vec{\text{grad}} p$$

d'où

$$(E. 3.4.) \quad \text{div} k \cdot \left[\left(\frac{1}{\beta} + \rho_g z \right) \vec{\text{grad}} \rho + \rho_g^2 \vec{g} + \rho_z \vec{\text{grad}} g \right] = \mu \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t}$$

Cette équation non linéaire en ρ permet théoriquement l'étude de tout mouvement de fluide compressible.

Pratiquement du point de vue de la physique des fluides usuels et de l'eau en particulier, on a :

$$\beta \approx 5.10^{-10} \text{ (barye)}^{-1}$$

$$\rho_g z = \rho_g^2 \approx 10^3$$

Donc les termes $\rho_g z$ et ρ_g^2 qui représentent l'influence des forces de pesanteur seront presque toujours négligeables devant le terme $\frac{1}{\beta}$ qui représente l'influence des forces de pressions. D'autre part le terme $\vec{\text{grad}} g$ est évidemment toujours négligeable.

(E. 3.4.) se simplifie alors en

$$(E. 3.5.) \quad \text{div} \left[k (\vec{\text{grad}} p) \right] = \beta \mu \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t}$$

Cette équation est difficilement utilisable car la masse spécifique n'est pas une caractéristique physique aisément mesurable . On a intérêt à réintroduire la pression à l'aide de l'équation d'état.

Cette substitution ne conduit à une équation linéaire en p que si on fait l'approximation que l'exponentielle $e^{-(p - p_0)}$ peut être identifiée au premier terme de son développement en série soit :

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta (p - p_0)]$$

il vient alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial u} = \rho_0 \beta \frac{\partial p}{\partial u} \rightarrow \text{grad } \rho = \rho_0 \beta \text{ grad } p \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = \rho_0 \beta \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} \end{cases}$$

et (E. 3.5.) devient

$$(E. 3.6.) \quad \text{div} (k \text{ grad } p) = \frac{\beta M}{\rho_0 \beta} \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t}$$

Si on suppose le squelette solide du milieu poreux incompressible soit $\omega = c^{te}$ on a :

$$(E. 3.7.) \quad \text{div} (k \text{ grad } p) = \beta M \omega \frac{\partial p}{\partial t}$$

Si de plus le milieu est homogène on obtient la fameuse équation de diffusivité en usage chez les pétroliers (HOUBEURT)

$$(E. 3.8.) \quad \Delta p = \frac{\beta M \omega}{k} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\text{avec : } K = \frac{k}{M \beta \omega}$$

Si le squelette solide du milieu poreux est compressible, il faut combiner (E. 3.6.) avec l'équation traduisant les variations de ω en fonction de p. Selon les ouvrages pétroliers, cette équation serait pour la plupart des milieux poreux de la forme.

$$\omega = \omega_0 e^{\alpha (p - p_0)}$$

mais α coefficient de compressibilité du milieu poreux est très petit et on peut écrire comme pour l'équation d'état :

$$\omega = \omega_0 [1 + \alpha (p - p_0)]$$

d'où

$$\frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t} = \rho_0 \omega_0 (\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t}$$

et l'équation du mouvement devient :

$$(E. 3.9.) \operatorname{div} (k \vec{\operatorname{grad}} p) = \mu \omega_0 (\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{milieu hétérogène})$$

ou

$$(E. 3.10.) \Delta p = \frac{\mu}{k} \omega_0 (\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{milieu homogène})$$

(E. 3.10) s'écrit encore en revenant à des notations plus usuelles en hydrologie :

$$(E. 3.11) \Delta p = \frac{\mu \omega_0 (\alpha + \beta) \times \rho g e}{k \rho g e} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$= \frac{S}{T} \frac{\partial p}{\partial t}$$

avec :

$$T = \frac{k \rho g}{\mu} e = Ke = \text{transmissivité}$$

$$S = \rho g e \omega_0 (\alpha + \beta) = \text{coefficient d'emmagasinement}$$

e = épaisseur de la couche de milieu poreux

soit en terme de potentiel hydraulique

$$(E. 3.12) \quad \boxed{\Delta \varphi = \frac{S}{T} \frac{\partial \varphi}{\partial t}}$$

$$(\text{on a en effet } \Delta \varphi = \Delta p \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t})$$

3.1.1.3. Liquide compressible- milieu poreux compressible - autre démonstration classique

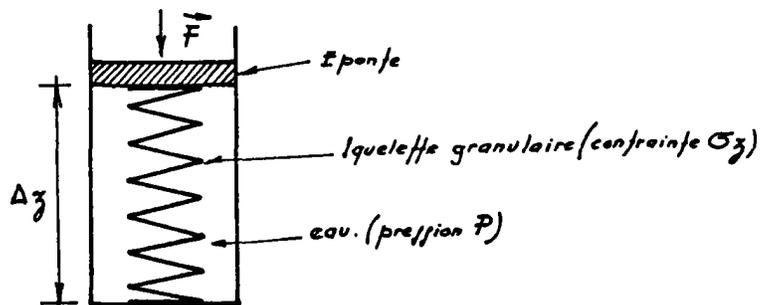
Les équations qui ont été citées dans le paragraphe précédent sont celles qui sont en général employées par les auteurs pétroliers . Ces auteurs d'ailleurs négligent le plus souvent l'influence de la compressibilité du milieu devant celle du fluide. En effet la compressibilité des huiles naturelles est toujours nettement plus forte que la compressibilité du terrain. Au contraire en hydrologie dans le cas des nappes captives en milieu sableux, compressibilité du terrain et compressibilité de l'eau se trouvent souvent être du même ordre.

On a vu que dans la démarche de calcul énoncée précédemment, on a fait intervenir cette compressibilité par l'intermédiaire de la loi reliant la porosité ω à la pression p . Les auteurs pétroliers semblent admettre que cette loi est de la forme

$$\omega = \omega_0 e^{-\alpha(p - p_0)}$$

d'où la forme de l'équation E. 3.10.

Dans les ouvrages d'hydrologie, on fait intervenir le phénomène de compressibilité des terrains dès le stade de l'établissement de l'équation de conservation, suivant en cela une démarche due à JACOB. Celui-ci pose en effet en principe que dans les milieux poreux aquifères stratifiés (dimensions en x et y grandes devant l'épaisseur de la strate) le squelette solide ne subit que des contraintes verticales admettant en cela un schéma classique de la mécanique des sols que l'on peut résumer par le dessin suivant :



au mur de l'éponge on a $|\vec{F}| = |p + \sigma_z|$

et on rappelle que par définition

$$\sigma_z = E \cdot \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{\alpha} d \left(\frac{\Delta z}{\Delta z} \right)$$

E = module de Young (dimension d'une contrainte)

α = coefficient de compressibilité

Ces hypothèses et définitions étant admises, écrivons à nouveau l'équation de conservation de masse avec les notations de la figure 2.1.1.0.

Variation du flux : $\text{div } \rho \vec{v} \Delta x \Delta y \Delta z$
 = (égale)

Variation de la masse d'eau : $\frac{\partial(\Delta M)}{\partial t}$ (avec $\Delta M = \rho \omega \Delta x \Delta y \Delta z$)

Selon JACOB, pour écrire cette variation on doit tenir compte du fait que la couche peut se tasser verticalement au cours du phénomène, c'est-à-dire admettre que z est variable. On a donc :

$$\frac{\partial(\Delta M)}{\partial t} = \left[\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta z + \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} \Delta z + \omega \rho \frac{\partial(\Delta z)}{\partial t} \right] \Delta x \Delta y$$

Il faut donc évaluer les trois termes en $\frac{\partial}{\partial t}$ si possible en fonction d'une variable unique ; prenons p :

- les rappels de mécanique des sols énoncés ci-dessus permettent d'écrire

$$(R_1) \quad \frac{\partial(\Delta z)}{\partial t} = - \alpha \Delta z \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

et

$$(R_2) \quad d p = - d \sigma$$

car on peut admettre que la contrainte appliquée à l'éponte de l'aquifère (\vec{F}) est constante.

- d'autre part le volume solide de sable restant constant au cours du tassement on a :

$$\Delta V \text{ sable} = (1 - \omega) \Delta x \Delta y \Delta z = \text{constante}$$

soit $d(\Delta V \text{ sable}) = \left[(1 - \omega) d(\Delta z) - \Delta z d\omega \right] \Delta x \Delta y = 0$

et $\frac{d\omega}{(1 - \omega)} = \frac{d(\Delta z)}{\Delta z}$

soit en combinant avec R_1

$$(R_3) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{(1 - \omega)}{\Delta z} \frac{\partial(\Delta z)}{\partial t} = - \alpha (1 - \omega) \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Enfin l'équation d'état de l'eau s'écrit

$$(R_4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \rho_0 \frac{\partial p}{\partial t}$$

En combinant (R_1) , (R_2) , (R_3) , (R_4) on obtient :

$$\frac{\partial(\Delta M)}{\partial t} = \left[\omega \beta \rho_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \alpha (1 - \omega) \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \omega \alpha \frac{\partial p}{\rho \partial t} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

soit

$$\frac{\partial(\Delta M)}{\partial t} = (\omega \beta \rho_0 + \alpha \rho) \frac{\partial p}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Et l'équation de conservation s'écrit selon JACOB

$$(E. 3.13) \quad \boxed{\operatorname{div} \rho \vec{v} = -\omega \rho \left(\beta + \frac{\alpha}{\omega} \right) \frac{\partial p}{\partial t}}$$

En combinant avec l'équation de DARCY généralisée :

$$\vec{v} = -\|k\| \operatorname{grad} \varphi \left(= \frac{p}{\rho g} + z \right)$$

et l'équation d'état de l'eau écrite sous la forme

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \beta (p - p_0) \right]$$

On trouve en suivant la même démarche que celle exposée précédemment (E. 3.2. à E. 3.12.) les équations suivantes correspondant aux différentes conditions d'écoulement et qui sont le plus fréquemment utilisées dans les ouvrages d'hydrologie :

Écoulement permanent

$$(E. 3.14) \quad \operatorname{div} (k \operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad \text{milieu hétérogène}$$

$$(E. 3.15) \quad \Delta \varphi = 0 \quad \text{milieu homogène}$$

Écoulement transitoire

$$(E. 3.16) \quad \operatorname{div} \left(\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p \right) = \omega \rho_0 \left(\beta + \frac{\alpha}{\omega} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{milieu hétérogène}$$

ou en fonction de φ

$$(E. 3.17) \quad \operatorname{div} (K \operatorname{grad} \varphi) = \omega \left(\beta + \frac{\alpha}{\omega} \right) \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$(E. 3.18) \quad \Delta \varphi = \frac{\omega}{K} \left(\beta + \frac{\alpha}{\omega} \right) \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{milieu homogène}$$

Remarque

La formulation de JACOB diffère de celle des pétroliers par l'expression du coefficient d'emménagement. Ceci provient du fait qu'à la suite de son analyse du phénomène de compression du milieu poreux l'auteur est amené à admettre comme loi de variation de la porosité une équation qui n'est pas purement exponentielle. En effet, on a vu qu'il admettait :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha (1 - \omega) \frac{\partial p}{\partial t}$$

soit en multipliant par $d t$

$$d\omega = \alpha (1 - \omega) d p$$

et en intégrant entre l'état de référence 0 : (ω_0, p_0)

et l'état 1 : (ω, p)

$$1 - \omega = (1 - \omega_0) e^{-\alpha(p - p_0)}$$

d'où

$$\omega = 1 - (1 - \omega_0) e^{-\alpha(p - p_0)}$$

Il semble qu'une vérification expérimentale devrait permettre de dire laquelle des deux lois qui ainsi s'opposent paraît la plus vraisemblable

3.1.1.4. Le cas particulier de l'écoulement dans une couche - L'hypothèse de bidimensionalité - Introduction de T (transmissivité) et de S (coefficient d'emmagasinement)

Soit une couche aquifère limitée par un toit T et un mur M réputés imperméables.

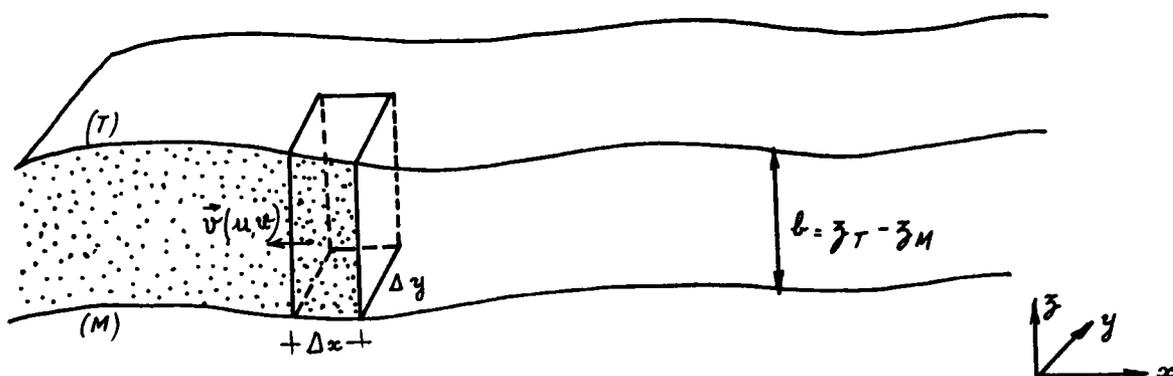


Figure 3.1.1.4. - Schéma des conditions d'écoulement en couche stratiforme

Pour résoudre un problème d'écoulement dans un tel milieu la solution la plus générale consiste à résoudre un système constitué par :

- une des équations générales tridimensionnelles citées précédemment, (selon la nature du milieu homogène ou hétérogène et celle du fluide compressible ou incompressible).
- les équations des conditions aux limites propres au type d'écoulement envisagé

- les équations des conditions aux limites traduisant l'influence des limites géométriques du réservoir soit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (\vec{n} \text{ vecteur normal aux surfaces } M(x, y, z) \text{ et } T(x, y, z) \text{ représentatives du mur et du toit}).$$

En fait cette méthode reposant sur l'hypothèse que l'écoulement est strictement tridimensionnel, ne peut conduire à des solutions analytiques simples.

En revanche, on peut traiter plus simplement les écoulements en couche aquifère si on peut faire l'hypothèse qu'ils sont bidimensionnels horizontaux : un écoulement peut être considéré comme bidimensionnel horizontal si on a

$$v_z = \varepsilon \ll v_x \text{ ou } v_y$$

soit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varepsilon \ll \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ ou } \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial \left(\frac{p}{\rho g} \right)}{\partial z} \pm 1 = \varepsilon \neq 0 \text{ ou encore } (p - p_0) \neq \pm \rho g (z - z_0)$$

la pression est hydrostatique dans le milieu où a lieu l'écoulement

Dans ce cas le potentiel φ est constant en tout point d'une verticale traversant la couche, et numériquement égal à la cote H atteinte par l'eau dans un piézomètre captant tout ou partie de cette verticale.

Selon un usage courant nous proposons pour faciliter les problèmes de typographie de remplacer alors le terme φ par le terme H (encore appelé charge piézométrique).

Toutefois nous conseillons de revenir à φ (potentiel) dès que l'hypothèse de bidimensionnalité est en défaut.

De même pour éviter les confusions on réservera la lettre h pour désigner la hauteur d'une surface libre par rapport à une cote de référence, b désignera son épaisseur.

Dans la pratique, pour les écoulements en nappe captive, les pentes des épontes des couches productrices étant faibles et variant de manière assez progressive et l'épaisseur des couches étant très petite en regard de leur extension latérale, il en résulte que les hypothèses de bidimensionnalité et d'horizontalité de l'écoulement sont en général tout à fait justifiées (sauf peut être au voisinage de certaines zones particulières).

Ces hypothèses étant admises :

1. On peut tracer des cartes piézométriques de la nappe à partir des niveaux relevés dans des piézomètres atteignant la couche aquifère en un point quelconque de sa section verticale.
2. On peut simplifier la formulation du système régissant les écoulements dans la nappe en ramenant à une seule équation le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{équation générale} \\ \text{équation des conditions aux limites le long des épontes} \end{array} \right.$$

En effet, considérons un prisme élémentaire de côtés Δx , Δy avec $b(x,y)$ = épaisseur de la couche au point (x,y) (voir figure 3.1.1.4.)

Pour un tel prisme l'équation de conservation s'écrit :

$$\frac{\partial(b.u)}{\partial x} + \frac{\partial(b.v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho_w b)}{\partial t} = -b \frac{\partial(\omega \rho)}{\partial t}$$

et en combinant avec l'équation de DARCY et l'équation d'état :

$$-\frac{\partial}{\partial x} (Kb \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (Kb \frac{\partial H}{\partial y}) = b \rho g \omega (\alpha + \beta) \frac{\partial H}{\partial t}$$

soit :

$$(E. 3.19) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x,y) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[T(x,y) \frac{\partial H}{\partial y} \right] = S \frac{\partial H}{\partial t}$$

avec : $T(x,y) = Kb$ transmissivité

$S = b \rho g \omega (\alpha + \beta)$ coefficient d'emmagasinement

Ainsi sont introduites les deux notions classiques de transmissivité et coefficient d'emmagasinement d'un aquifère stratiforme.

Rappelons encore qu'elles impliquent bidimensionnalité et horizontalité de l'écoulement.

3.2. Les écoulements à surface libre

3.2.1. Définitions - Hypothèses

1. D'une manière générale, on appelle surface libre toute limite géométrique du domaine d'écoulement non fixée rigidement, c'est-à-dire, dont la forme dépend du champ $\varphi_{(x,y,z,t)}$ à l'intérieur du domaine.
2. En pratique, en ce qui concerne les écoulements en milieu poreux saturé, on considère qu'une telle surface ne peut exister qu'à la séparation entre le domaine saturé et le domaine non saturé du milieu aquifère. Cette surface étant physiquement assez floue, on admettra pour en donner une définition mathématique précise que c'est : le lieu géométrique des points où la pression (de l'eau) est nulle (par rapport à la pression atmosphérique).

On remarquera que la surface libre n'est pas obligatoirement une ligne de courant.

3. De plus dans les théories classiques, on admet :

- que la hauteur capillaire est négligeable
- que la saturation ou la désaturation du terrain est instantanée et intéresse uniquement la porosité efficace. Ce qui revient à attribuer à la courbe succion-teneur en eau du terrain une forme très schématique (voir fig. 3.2.0.).

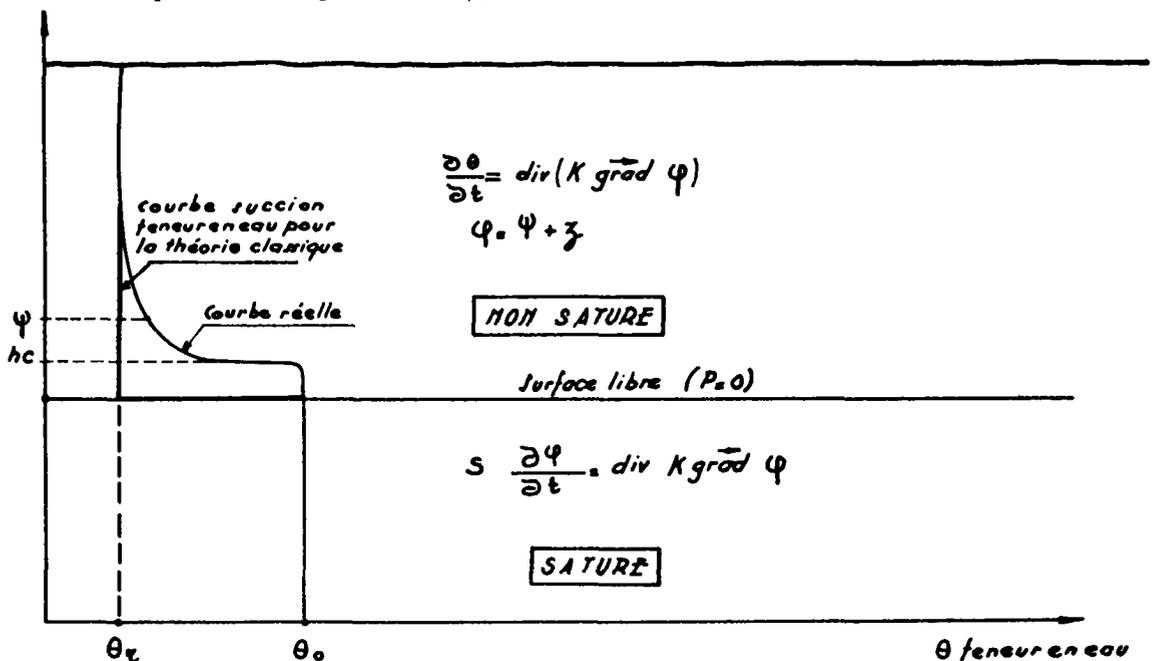


Figure 3.2.0. Relations entre domaine saturé et domaine non saturé - Schéma statique, définition de la surface libre

Dans cette théorie, la surface libre sépare donc nettement deux domaines :

- le domaine saturé où s'appliquent les équations fondamentales énoncées précédemment
- le domaine non saturé où s'appliquent des équations assez différentes qui seront énoncées plus loin.

3.2.2. Les équations fondamentales applicables aux écoulements à surface libre

Le problème des écoulements à surface libre est un problème à deux inconnues :

- . le champ de potentiel $\varphi(x, y, z, t)$
- . la forme de la surface libre $h(x, y, t)$

Sa solution en toute généralité implique la résolution d'un système de deux équations, l'une caractérisant le potentiel, l'autre la surface libre.

3.2.2.1. Equation du potentiel

Elle s'applique en tout point à l'intérieur du domaine saturé et s'écrit évidemment

$$S \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{div} (K \vec{\operatorname{grad}} \varphi)$$

Toutefois, on peut admettre que pour la plupart des écoulements à surface libre qui sont des écoulements superficiels en aquifères assez grossiers et peu épais, le coefficient d'emmagasinement S (au sens où nous l'avons défini en 3.1.1.2. : somme de la compressibilité du terrain et de la compressibilité de l'eau) est négligeable. Et on prend :

$$(E. 3.20) \quad \operatorname{div} (K \vec{\operatorname{grad}} \varphi) = 0$$

3.2.2.2. Equation de la surface libre

Elle s'obtient en combinant les deux propriétés fondamentales de la surface libre :

1. La surface libre reste à tout instant le lieu des points de pression nulle , ce qui implique :

$$P(x, y, z, t) = 0 \quad \frac{dP}{dt} = 0$$

soit :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} = 0$$

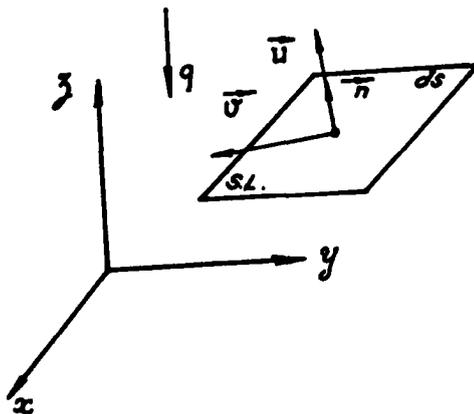
ou encore :

$$(E. 3.21) \quad \frac{dP}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} P = 0$$

avec \vec{u} = vitesse d'avancement de la surface libre
(voir notations figure 3.2.2.2.1.)

2. L'équation de continuité s'applique à la surface libre.

On a donc (figure ci-contre) sur chaque élément ds



$$(\vec{v} - \vec{q}) \cdot \vec{n} ds dt = \vec{u} \cdot \vec{n} dt \omega e$$

soit :

\sum flux à travers la surface =
volume envahi par l'avancée
de la surface libre (en supposant
que celle-ci rencontre instantané-
ment un terrain à sa teneur en eau
résiduelle θr)

On en déduit :

$$(E. 3.22) \quad (\vec{v} - \vec{q}) = \vec{u} \cdot \omega e$$

\vec{v} = vitesse de Darcy au droit de la surface libre

\vec{q} = flux échangé à travers la surface libre

En combinant E. 3.21 et E. 3.22 :

$$\frac{d P}{d t} = \left(\frac{\vec{v} - \vec{q}}{\omega_e} \right) \vec{\text{grad}} P + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

et en se rappelant que :

$$p = \varphi - z \quad \vec{v} = - K \vec{\text{grad}} \varphi$$

on trouve :

$$\omega_e \frac{\partial \varphi}{\partial t} = (K \vec{\text{grad}} \varphi + \vec{q}) \vec{\text{grad}} P$$

soit :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \frac{q}{K} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{q}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\omega_e}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ou encore :

$$(E.3.23) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{K+q}{2K} \right)^2 = \left(\frac{K-q}{2K} \right)^2 + \frac{\omega_e}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

C'est l'équation fondamentale définissant la surface libre. Dans cette équation φ désigne le potentiel en (x, y, h).

Elle admet les formes simplifiées suivantes :

$$(E. 3.24) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\omega_e}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

régime transitoire sans échange avec l'extérieur

$$(E. 3.25) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{K+q}{2K} \right)^2 = \left(\frac{K-q}{2K} \right)^2$$

régime permanent avec échange

$$(E. 3.26) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

régime permanent sans échange

On voit d'après les équations qui précèdent que la condition de surface libre n'est pas linéaire.

3.2.3. Les équations simplifiées

3.2.3.1. L'hypothèse de DUPUIT - Formes simplifiées non linéarisées
(BOUSSINESQ, FORCHEIMER)

Selon l'hypothèse de DUPUIT : dans les écoulements à surface libre, le gradient hydraulique est le même en chaque point d'une verticale, et est égal à la pente de la surface libre.

Soit avec les notations de la figure 3.2.3.1.0.

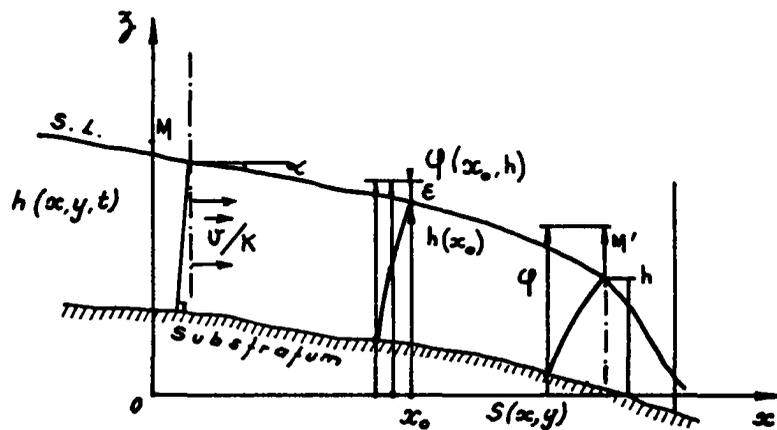


Figure 3.2.3.1.0. Relations entre cote et potentiel - hypothèse de DUPUIT

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varepsilon \\ - \frac{\vec{v}}{K} = \vec{\text{grad}} \varphi = \vec{\text{grad}} h \end{array} \right.$$

soit $\varphi(x_0, y_0, z) = h(x_0, y_0) = C^{\text{te}}$

ou à deux dimensions (x, z)

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{v}{K} = \frac{dh}{dx} \neq \sin \alpha \\ \varphi(x_0, z) = h(x_0) \end{array} \right.$$

On voit d'après la figure 3.2.3.1.0. que l'hypothèse de DUPUIT n'est valable que dans les domaines où les équipotentielles $\varphi(x, y, z)$ sont peu inclinées par rapport à la verticale.

Avec les notations de la figure 3.2.3.1.1., l'équation de conservation pour les écoulements où s'applique l'hypothèse de DUPUIT prend la forme suivante * :

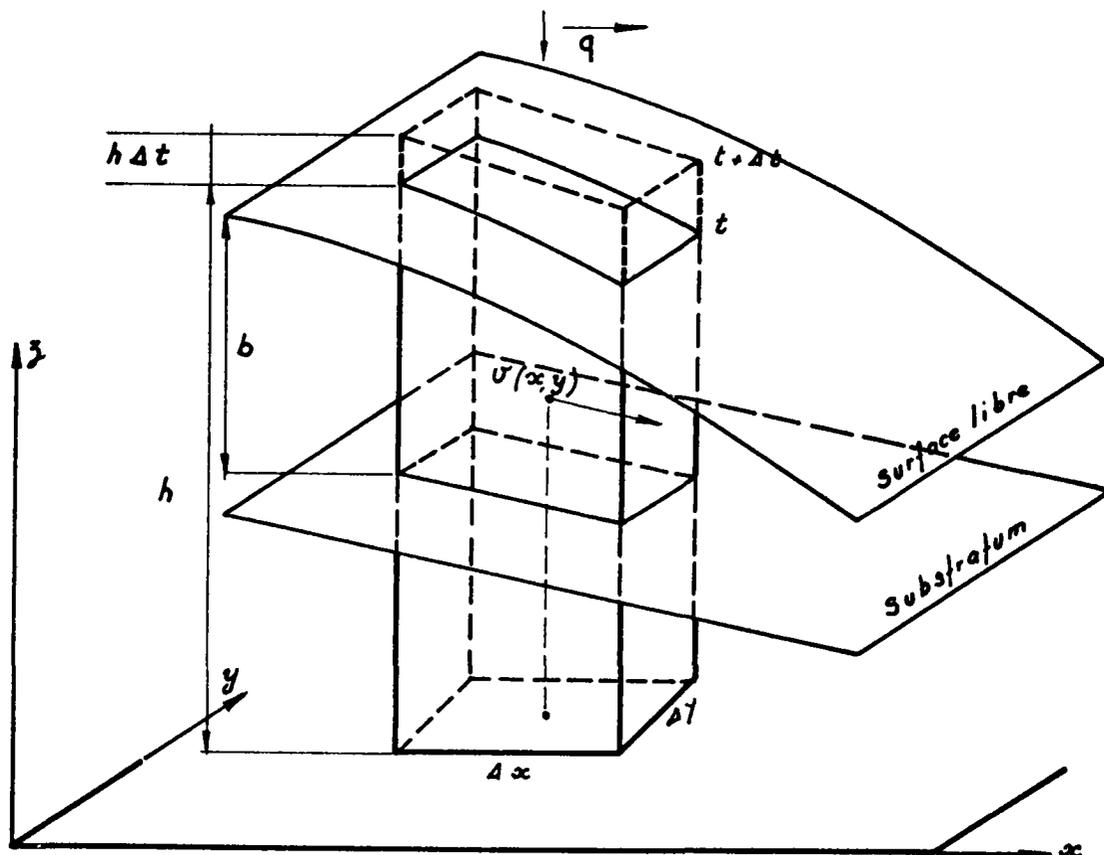


Figure 3.2.1.1. : Equation de conservation avec hypothèse de DUPUIT

$$(E. 3.27) \quad \text{div} (\rho b \vec{v}) + b \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t} + \rho \omega_e \frac{\partial b}{\partial t} = \rho q$$

Des deux termes $b \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t}$ et $\rho \omega_e \frac{\partial b}{\partial t}$ qui représentent respectivement l'emmagasinement de l'eau par compressibilité du fluide et du terrain et l'emmagasinement par saturation ou désaturation du matériau aquifère le premier est toujours négligeable devant le second et on admet :

$$\text{div} (b \vec{v}) = q - \omega_e \frac{\partial b}{\partial t}$$

mais (hypothèse de DUPUIT)

$$\vec{v} = -K \text{grad } h$$

et on a

$$(E. 3.28) \quad \text{div} (K b \text{grad } h) = \omega_e \frac{\partial h}{\partial t} - q$$

* Même principe d'établissement que pour la forme générale donnée § 2.1.

ou encore en notant que :

$$b = h - S$$

$$(E. 3.29) \quad \operatorname{div} (K b \vec{\operatorname{grad}} b) = \operatorname{div} (K b \vec{\operatorname{grad}} h) - \operatorname{div} (K b \vec{\operatorname{grad}} S) \\ = - \operatorname{div} (K b \vec{\operatorname{grad}} S) + \omega_e \frac{\partial h}{\partial t} - q$$

Ce sont les équations de BOUSSINESQ valables pour :

1. hypothèse de DUPUIT vérifiée
2. régime transitoire
3. milieu hétérogène

On en déduit les formes simplifiées suivantes :

Milieu homogène (mais substratum incliné)

$$(E. 3.30) \quad \operatorname{div} (b \vec{\operatorname{grad}} h) = \frac{\omega}{K} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{q}{K}$$

ou encore

$$\operatorname{div} (b \vec{\operatorname{grad}} b) = \frac{\omega}{K} \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{q}{K} - \operatorname{div} (b \vec{\operatorname{grad}} S)$$

Si substratum horizontal

$$(E. 3.31) \quad \operatorname{div} (b \vec{\operatorname{grad}} b) = \operatorname{div} (h \vec{\operatorname{grad}} h) = \frac{\omega_e}{K} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{q}{K}$$

$$\Delta (h^2) = \frac{\partial^2 (h)^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (h)^2}{\partial y^2} = \frac{2 \omega_e}{K} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{2 q}{K}$$

(régime transitoire)

ou encore

$$(E. 3.32) \quad \Delta (h^2) = - \frac{2 q}{K}$$

(régime permanent avec apport)

$$(E. 3.33) \quad \Delta (h^2) = 0$$

(régime permanent sans apport)

Equation de FORCHEIMER

3.2.3.2. Equations linéarisées

Même quand on admet l'hypothèse de DUPUIT, les équations différentielles obtenues ne sont pas linéaires, sauf l'équation de FORCHEIMER (applicable aux seuls écoulements permanents en milieu homogène).

On a donc cherché à en trouver des formes linéarisées qui en sont des approximations valables dans certaines conditions seulement.

Ainsi pour les équations de BOUSSINESQ avec substratum horizontal (E. 3.31 et E. 3.32) on a :

1. Linéarisation au premier ordre

Si l'on admet que h varie peu (selon x et y) c'est-à-dire qu'en tout point on a :

$$b = \bar{b} + s$$

avec \bar{h} = valeur moyenne

$$\text{et } s < \bar{b}$$

on obtient en négligeant dans E. 3.31 les termes du second ordre en s

$$(E. 3.34) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\omega_e}{T} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{q}{T}$$

$$\text{avec } T = K \bar{b}$$

soit encore puisque $h = s + C^{te}$

$$(E. 3.35) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\omega_e}{T} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{q}{T}$$

c'est une équation identique à celle obtenue pour les écoulements bidimensionnels en nappe captive à la signification près du coefficient d'emménagement et en prenant :

$$h \text{ cote de la surface libre } \equiv H \text{ potentiel hydraulique}$$

Notons tout de suite que quand un hydrogéologue baptise carte piézométrique une carte du toit de la surface libre, il fait donc implicitement (et sans le savoir ?) toutes les approximations qui nous ont conduit de E. 3.23 à E. 3.35 !

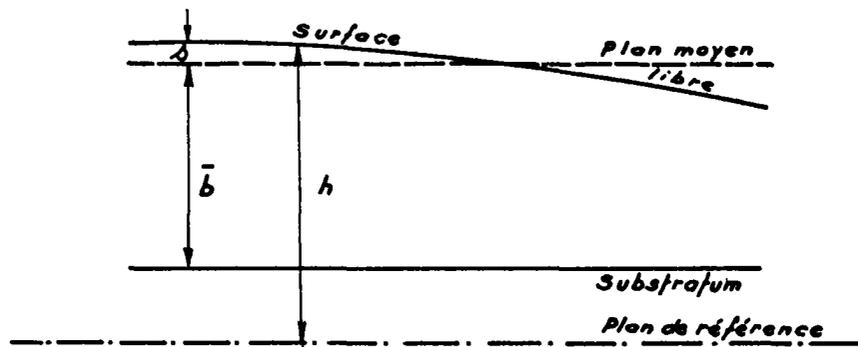


Figure 3.2.3.2.0. Conditions d'application de la linéarisation au premier ordre

2. Linéarisation au 2ème ordre

Dans ce cas on linéarise en posant :

$$(E. 3.36) \quad \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = \frac{\partial h^2}{\partial t} \cdot \frac{\omega_e}{K \bar{h}} - \frac{q}{K \bar{h}}$$

avec :

$$\bar{h} = \sqrt{\bar{h}^2} \quad (\bar{h}^2 = \text{valeur moyenne de } h^2)$$