BUREAU DE RECHERCHES GEOLOGIQUES ET MINIERES
74, rue de la Fédération - 75-Paris (15ème) - Tél. 783 94-00

DIRECTION DU SERVICE GEOLOGIQUE ET DES LABORATOIRES
Boîte postale 818 - 45-Orléans-La Source - Tél. 87-06-60 à 64

Département d'Hydrogéologie

ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE POMPAGES EN NAPPES ALLUVIALES SUR LE RÉGIME D'ÉTIAGE DU RÉSEAU SUPERFICIEL

par

R.F. LELIEVRE
(GEOHYDRAULIQUE)

GEOHYDRAULIQUE
14, rue de Londres - Paris-9°
Rapport n° 230

69 SGL 073 HYD

Janvier 1969

SOMMAIRE

	pages
INTRODUCTION	1
1 - NOTIONS FONDAMENTALES	3
1.1 - Le complexe hydrodynamique où prennent naissance les phénomènes d'échange entre nappes alluviales et réseau superficiel	3
1.2 - Phénomènes d'échange entre nappes aquifères et réseau superficiel	4
2 - ANALYSE QUANTITATIVE des PHENOMENES d'ECHANGE entre un SYSTEME AQUIFERE et le RESEAU SUPERFICIEL	9
2.1 - Exposé du problème	9
2.2 - Recherche de grandeurs caractéristiques d'un cas réel	9
2.3 - Nouvel exposé du problème	14
2.4 - Fondements théoriques du problème	15
2.5 - Configurations usuelles de nappes alluviales	15
2.6 - Paramètres caractéristiques d'une configuration donnée	22
2.7 - Conclusions	22
3 - DETERMINATION de $\frac{Q\perp}{Qo}$ et de $\frac{V\perp}{Vo}$ pour DIVERS EXEMPLES de CONFIGURATION	23
3.1 - Configuration (RPF, NCU, C ∞) et extensions	23
3.2 - Configuration (RI ∞, NCU, C ∞)	35
3.3 - Configuration (RP ∞, NCU, C$/\!/$)	37
3.4 - Configuration (RP ∞, NCU, C θ)	45
3.5 - Configuration (RP ∞, NCH, C ∞)	54
3.6 - Configuration (RP ∞, NCV)	55

3.7 - Configuration comprenant une nappe à surface libre à substratum incliné (NLJ) 59
3.8 - Configurations dans lesquelles le "coteau" est remplacé par une seconde "rivière" 70

4 - SUJETIONS, PRECISION et LIMITES d'UTILISATION de la METHODE ANALYTIQUE 75

4.1 - Connaissances préalables minimales de la zone considérée 75
4.2 - Précision des résultats déduits de la méthode analytique précédente 76
4.3 - Erreurs systématiques résultant de la dispersion aléatoire des valeurs du coefficient de diffusivité autour de la valeur moyenne choisie pour la configuration (RP∞, NCU ou NLO, C∞) 79

5 - EXEMPLE CONCRET d'APPLICATION de la METHODE ANALYTIQUE EXPOSEE PRECEDEMMENT 84

5.1 - Données du problème 84
5.2 - Application de la méthode 86

6 - UTILISATION des RESULTATS PRECEDENTS en VUE de CONTROLES, d'ACTIONS ou de PREVISIONS 92

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 96

ANNEXE

°

RESUME

Tout prélèvement par pompage effectué dans une nappe en relation avec le réseau superficiel introduit nécessairement un préjudice pour ce dernier ; la sauvegarde des débits d'étiage du réseau superficiel impose donc que ce préjudice puisse être déterminé.

Les phénomènes d'échange entre nappe et cours d'eau sont, dans la nature, relativement complexes ; toutefois, pour des configurations simples, l'évolution des débits de transfert peut être directement déterminée par des calculs analytiques : un catalogue de ces configurations a été constitué qui permet un calcul simple et rapide du préjudice subi en période estivale par le réseau superficiel sous l'influence de pompages riverains.

A l'aide d'exemples concrets, les sujétions, précisions et limites d'utilisation de la méthode sont décrites et l'on montre comment elle permet d'étayer des contrôles, des actions ou des prévisions.

La présente étude effectuée dans le cadre des recherches méthodologiques entreprises par le département d'hydrogéologie (programme propre "Etudes générales d'hydrogéologie") a été réalisée par la Société GEOHYDRAULIQUE.

INTRODUCTION

En été, un bassin fluvial donné alimente généralement son réseau hydrographique superficiel par restitution progressive des eaux emmagasinées en période hivernale ; parmi les divers agents qui contribuent à l'accumulation des précipitations, les roches perméables occupent une place prépondérante: en raison de leur grande capacité de stockage et de la lenteur des phénomènes qui s'y développent, les aquifères jouent le rôle de "régulateurs à grande constante de temps".

D'un autre côté, les débits écoulés en période d'étiage par le réseau superficiel présentent une grande importance économique sous le triple aspect :

- de l'alimentation en eau des communautés riveraines ;
- de la dilution et de l'évacuation des agents polluants ;
- de la navigation.

Dans la mesure du possible, ces débits doivent être sauvegardés ou du moins maintenus au-dessus d'un minimum convenu, et réservés à des fins prioritaires.

Or, tout prélèvement effectué dans une nappe d'eau souterraine en relation avec le réseau superficiel introduit nécessairement un préjudice pour ce dernier, soit sous forme de "manque à gagner" dans la mesure ou les volumes prélevés lui étaient initialement destinés, soit sous forme de "pertes par réalimentation" si tout ou partie des volumes prélevés sont effectivement dérivés du réseau superficiel. En particulier, des pompages estivaux intensifs en nappe alluviale risquent d'influencer fortement le réseau superficiel et d'en réduire sensiblement les débits d'étiage.

.../...

Toute estimation des préjudices causés au réseau superficiel en période d'étiage par des pompages riverains doit donc nécessairement procéder d'une étude approfondie des mécanismes d'échange entre, nappes alluviales et réseau superficiel ; ces phénomènes d'échange sont, dans la nature, relativement complexes en raison de l'hétérogénéité des nappes et de la variété de leurs connexions avec les cours d'eau.

Les nappes alluviales sont bien celles les plus fréquemment et directement en relation avec les cours d'eau aussi ont-elles été spécialement considérées ici. Mais il est bien entendu que la portée de la présente étude ne se limite pas à ce type d'aquifère, et qu'elle vaut plus généralement pour tout aquifère riverain de cours d'eau.

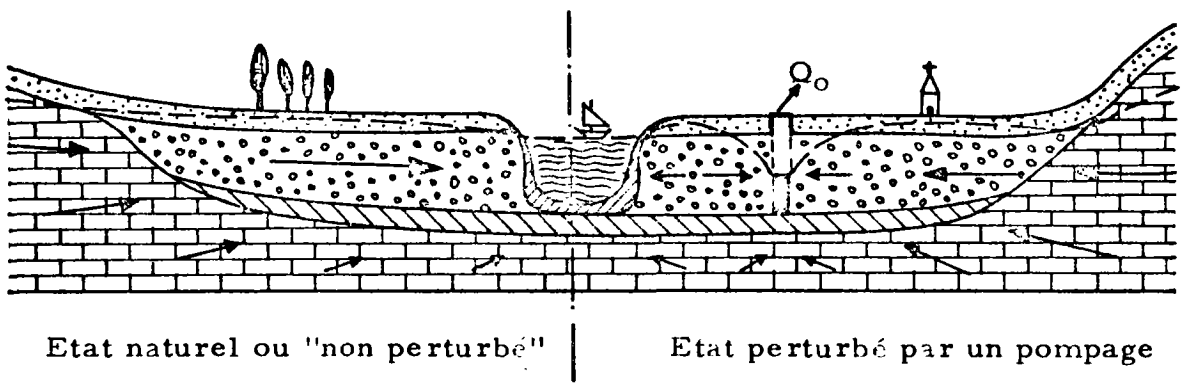
Dans la première partie de la présente étude, nous nous sommes attachés à montrer que la connaissance du préjudice subi par un cours d'eau en période de basses eaux résultait directement de celle de l'évolution dans le temps des débits de transfert entre nappes et rivières.

Dans les cas généraux complexes, cette évolution des débits de transfert nécessite pour être déterminée l'intervention de techniques élaborées de simulation. Lorsque les configurations réelles sont suffisamment simples pour se prêter à certaines schématisations, l'évolution des débits de transfert peut être directement déterminée par des calculs analytiques.

Dans la seconde partie de notre exposé, nous avons appliqué la méthode précédente d'évaluation des préjudices à certaines configurations idéalisées justiciables de calculs analytiques à caractère universel. Puis, en nous aidant d'exemples concrets, nous avons décrit les sujétions, précision et limites d'utilisation des calculs analytiques et nous avons montré comment ils pouvaient permettre d'étayer des contrôles, des actions ou des prévisions.

1 - NOTIONS FONDAMENTALES

1.1 - Le COMPLEXE HYDRODYNAMIQUE OU PRENNENT NAISSANCE les PHENOMENES d'ECHANGE ENTRE NAPPES ALLUVIALES et RESEAU SUPERFICIEL.



Exemple de configuration de nappe alluviale

Soit un système aquifère en relation avec un ou plusieurs cours d'eau ; ce système est physiquement défini :

- du point de vue morphologique par la géométrie du milieu aquifère :
  . disposition et extension des couches aquifères,
  . position des limites : rivières, coteaux, sources, etc.

- du point de vue hydrodynamique par des paramètres caractéristiques :
  . de chacune des couches aquifères,
  . des contacts entre couches aquifères,

. des contacts avec l'extérieur du domaine aquifère.

En l'absence d'intervention humaine dans le système aquifère, les écoulements souterrains sont régis par un certain nombre de conditions aux limites constituées généralement par des débits imposés (apports latéraux, infiltration des précipitations à la surface du domaine, etc.) ou par des potentiels - ou charges hydrauliques - imposés (niveaux des cours d'eau, cotes d'exhaure des sources, etc.).

L'intervention humaine dans le système aquifère, qui revêt le plus souvent la forme de pompages par puits ou forages, perturbe les écoulements naturels. Les états non perturbés constituent les conditions initiales du phénomène à étudier.

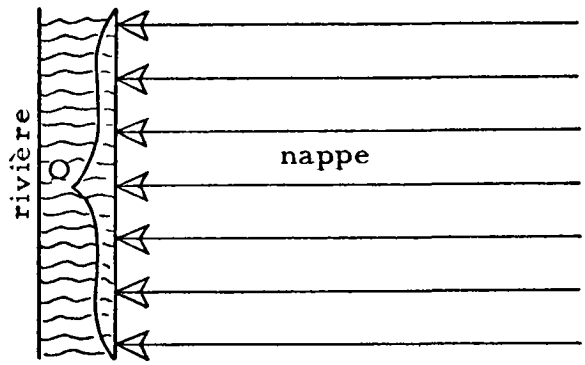
1.2 - PHENOMENES d'ECHANGE ENTRE NAPPES AQUIFERES et RESEAU SUPERFICIEL.

"L'eau va toujours à la rivière"
(Sentence populaire)

Dans les conditions naturelles usuelles, le réseau superficiel draine en période d'étiage les nappes qu'il traverse ; si donc nous nous intéressons aux échanges entre nappes et réseau superficiel, soit en état naturel, soit en état perturbé, nous concevons intuitivement que seul importe l'aspect transitoire des phénomènes puisque tout prélèvement effectué dans une nappe constitue tôt ou tard un préjudice pour le réseau superficiel.

Ce préjudice peut revêtir deux formes que nous allons expliciter :

Supposons pour simplifier qu'une nappe d'extension infinie s'écoule d'une manière uniforme et déverse un débit continu Q dans une portion donnée de rivière.

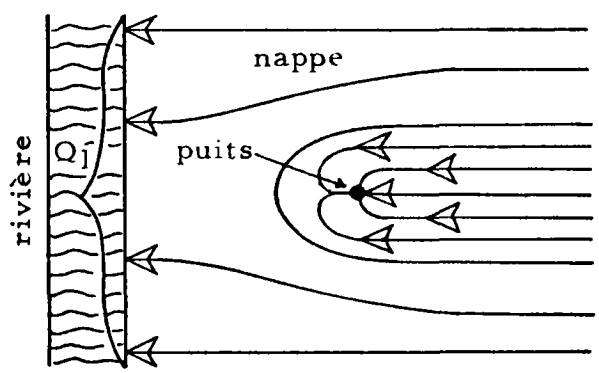


Etat non perturbé

et supposons qu'un pompage à débit constant soit mis en route à quelque distance de la rive.

- Notion de "manque à gagner" de la rivière :

Le faisceau des lignes de courant peut présenter à un instant donné l'allure suivante :

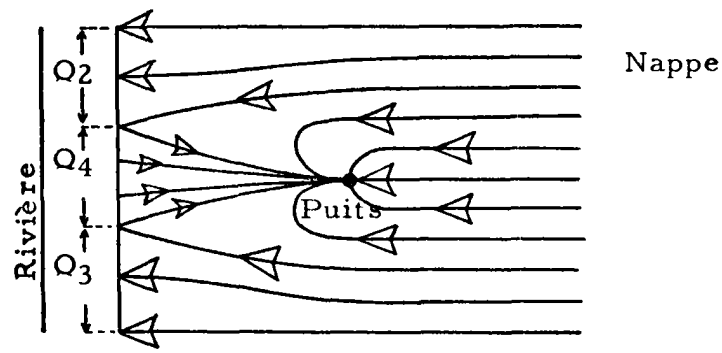


Etat perturbé A

Nous constatons qu'une partie des lignes de courant qui se dirigeaient initialement vers la rivière atteint maintenant le puits ; le débit Q_1 déversé dans la rivière est donc inférieur au débit initial et le "manque à gagner" de la rivière est représenté par la quantité $(Q - Q_1)$.

- Notion de "réalimention"

Dans des conditions différentes (soit à un instant postérieur, soit pour un débit de pompage supérieur, soit pour un puits situé plus près de la rivière) le faisceau des lignes de courant peut présenter l'allure suivante :



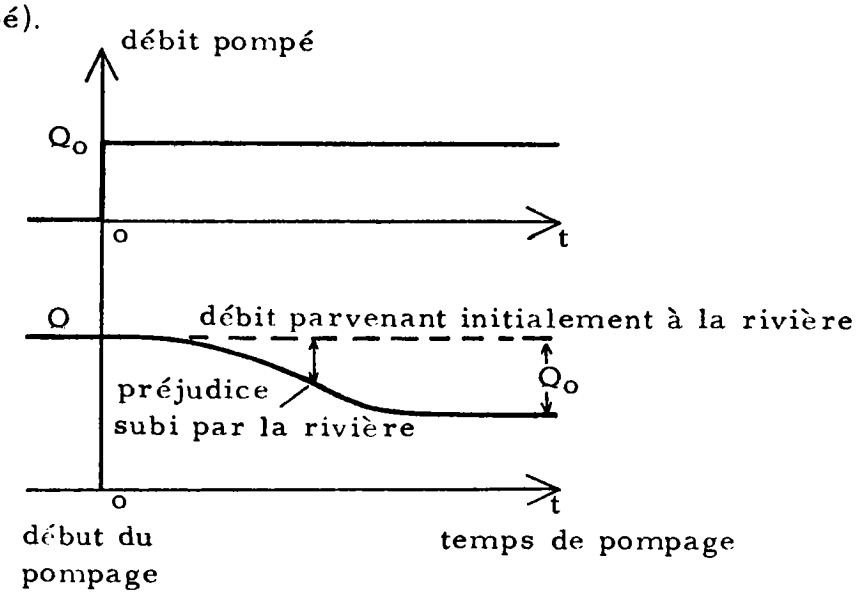
Etat perturbé B

Nous constatons que non seulement une partie des lignes de courant est dérivée vers le puits, causant à la rivière un "manque à gagner" $[Q - (Q_2 + Q_3)]$ mais qu'encore des lignes de courant de sens inverse sont apparues, dirigées de la rivière vers le puits et créant une perte pour la rivère "par réalimentation de la nappe" égale à (Q_4). Le préjudice total subi par la rivière est égal dans ces conditions à $[Q - (Q_2 + Q_3) + Q_4]$; en d'autres termes, le préjudice subi par la rivière à un instant quelconque est la somme du "manque à gagner" et des pertes par "réalimentation".

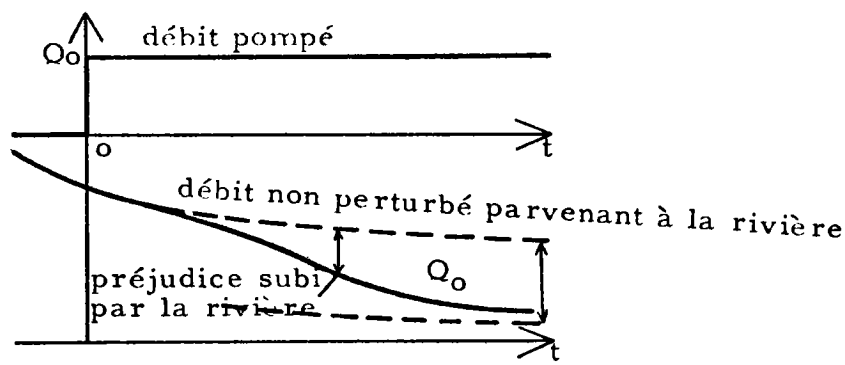
- Evolution transitoire des phénomènes

Si nous reportons sur deux graphiques concommitants l'évolution au cours du temps du débit pompé dans le puits et du débit parvenant à la rivière, nous constatons que, pour un débit pompé constant,

le débit parvenant à la rivière décroit progressivement ; (au bout d'un temps très grand, le préjudice causé à la rivière est évidemment égal au débit pompé).



Nous avons supposé, dans notre raisonnement, que l'état non perturbé était un état permanent ; s'il en est différemment, les deux graphiques se présentent sous la forme suivante :



Par application du théorême de superposition des états transitoires, nous montrerons que dans tous les cas usuels le préjudice causé à une rivière par des pompages effectués dans une nappe initialement en mouvement est le même que celui causé à la rivière par les mêmes pompages, la nappe étant initialement au repos et la rivière réalimentant la nappe.

Il devient alors inutile de conserver plus longtemps ces notions de "manque à gagner" ou de "pertes par réalimentation" ; nous leur substituerons la notion de "préjudice" matérialisant l'influence de pompages en nappe alluviale sur les débits d'échange initiaux entre nappes et réseau superficiel.

2 - ANALYSE QUANTITATIVE des PHENOMENES d'ECHANGE entre un SYSTEME AQUIFERE et le RESEAU SUPERFICIEL

2.1 - EXPOSE du PROBLEME.

Soit un système aquifère limité par un contour au long duquel sont imposées des conditions variables dans le temps, et soit, à l'intérieur du domaine ainsi délimité, un certain nombre de puits ou forages soumis à des pompages différents mis en route ou arrêtés à des instant quelconques.

Nous nous proposons de déterminer l'influence de ces pompages durant la période d'étiage sur les échanges entre ce système aquifère et le réseau superficiel.

2.2 - RECHERCHE de GRANDEURS CARACTERISTIQUES d'un CAS REEL.

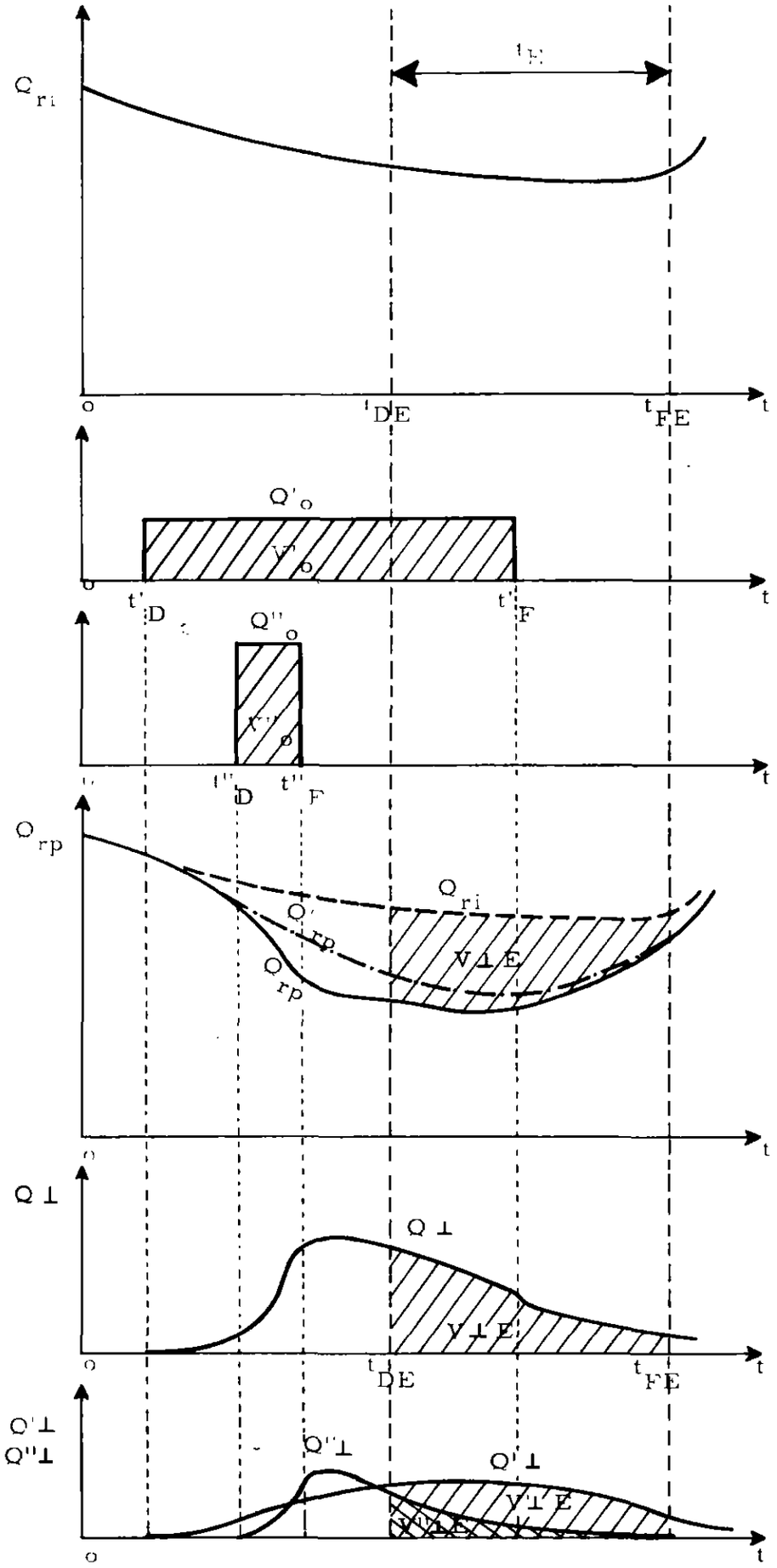
2.21 - Premières applications du théorème de superposition.[⊠]

Nous raisonnerons, pour commencer, sur les graphiques de la page suivante.

Soit une nappe alluviale en relation avec une rivière de longueur finie ; en l'absence de pompage, les échanges entre nappe et rivière sont concrétisés par un débit d'échange "non perturbé" Qr_I se déversant par exemple dans la rivière ($Qr_i > 0$).

[⊠] Justifications théoriques

Le lecteur voudra bien se reporter aux considérations théoriques et à la bibliographie situés en annexe.



Q_{ri} débit non perturbé se déversant dans une longueur finie de rivière

t_{DE} date de début d'étiage

t_{FE} date de fin d'étiage

t_E durée de la période d'étiage

Q'_O débit pompé dans un puits P'

t'_D date de début du pompage

t'_F date de fin de pompage

Q''_O débit pompé dans un puits P''

t''_D date de début du pompage

t''_F date de fin du pompage

Q'_{rp} débit se déversant dans la même longueur de rivière et perturbé par le seul puits P'

Q_{rp} débit perturbé par les deux puits P' et P''

$Q\perp = Q_{ri} - Q_{rp}$ préjudice causé à la rivière par les deux puits P' et P''

$V\perp E = \int_{t_{DE}}^{t_{FE}} Q\perp dt$ volume représentant le préjudice d'étiage

$Q'\perp$ et $Q''\perp$ préjudices causés à la rivière par chaque puits P' et P''

$Q'\perp + Q''\perp = Q\perp$

$V'\perp E + V''\perp E = V\perp E$

La période d'étiage (ou plus généralement de basses eaux) d'une durée t_E, commence à l'instant t_{DE} et se termine à l'instant t_{FE} pour un cycle hydrologique donné.

Nous supposons, pour fixer les idées, que deux puits P' et P'' de cette nappe sont soumis à des pompages selon les calendriers indiqués sur le graphique.

Si, seul le pompage P' est mis en route, le débit Q'_{rp} parvenant à la rivière (perturbé par le pompage P') est inférieur au débit Q_{ri} non perturbé. L'aire comprise entre les courbes Q_{ri} et Q'_{rp} représente le volume total soustrait à la rivière : elle est égale à $Q'_o\,(t'_F - t'_D)$, c'est-à-dire à l'aire située sous la courbe Q'_o, c'est-à-dire finalement à V'_o, volume total extrait du puits P'.

Si les deux pompages P' et P'' sont mis en route, le débit Q_{rp} parvenant à la rivière est inférieur au débit Q'_{rp} précédent. L'aire comprise entre Q_{ri} et Q_{rp} représente le volume total soustrait à la rivière par les deux pompages : elle est égale à :

$$Q'_o\,(t'_F - t'_D) + Q''_o\,(t''_F - t''_D) = V'_o + V''_o,$$

volume total extrait des puits P' et P''.

Soit $Q\perp = Q_{ri} - Q_{rp}$; <u>$Q\perp$ représente le préjudice instantané subi par la rivière à l'instant t.</u> Le théorème de superposition nous montre que <u>$Q\perp$ est indépendant de l'état non perturbé Q_{ri}</u> ; donc la courbe $Q\perp$ (t) que nous avons tracée en dessous est une fonction intrinsèque du système et des pompages.

Le préjudice subi par la rivière en période d'étiage est représenté sur les deux graphiques par l'aire achurée ; cette aire a la dimension d'un volume, soit $V\perp E$ ce volume.

Le théorème de superposition nous montre que l'effet des deux pompages est superposable, c'est-à-dire que si $Q'\perp$ et $Q''\perp$ représentent les préjudices instantanés causés à la rivière

respectivement par les deux pompages P' et P'' supposés seuls, leurs effets s'ajoutent linéairement, soit :

$$Q\perp = Q'\perp E + Q''\perp E$$

Il en est de même des aires situées sous ces courbes :

soit $V\perp E = V'\perp E + V''\perp E$

En d'autres termes, le préjudice d'étiage causé à la rivière par plusieurs pompages est la somme des préjudices d'étiage causés à la rivière par chaque pompage pris séparemment.

Il apparait donc que la notion de préjudice instantané peut être réduite à la seule grandeur $Q\perp$ représentant l'effet d'un seul puits sur le système au repos, et que la notion de préjudice d'étiage peut être réduite à la seule grandeur $V\perp E$ représentant l'intégrale de $Q\perp$ entre le début et la fin de l'étiage.

Or pour un puits donné et pour une nappe donnée,

$Q\perp$ dépend de Qo , t_D et t_F

$V\perp E$ dépend de $Q\perp$, t_{DE} et t_{FE}

soit deux fonctions de cinq variables, ce qui est peu maniable.

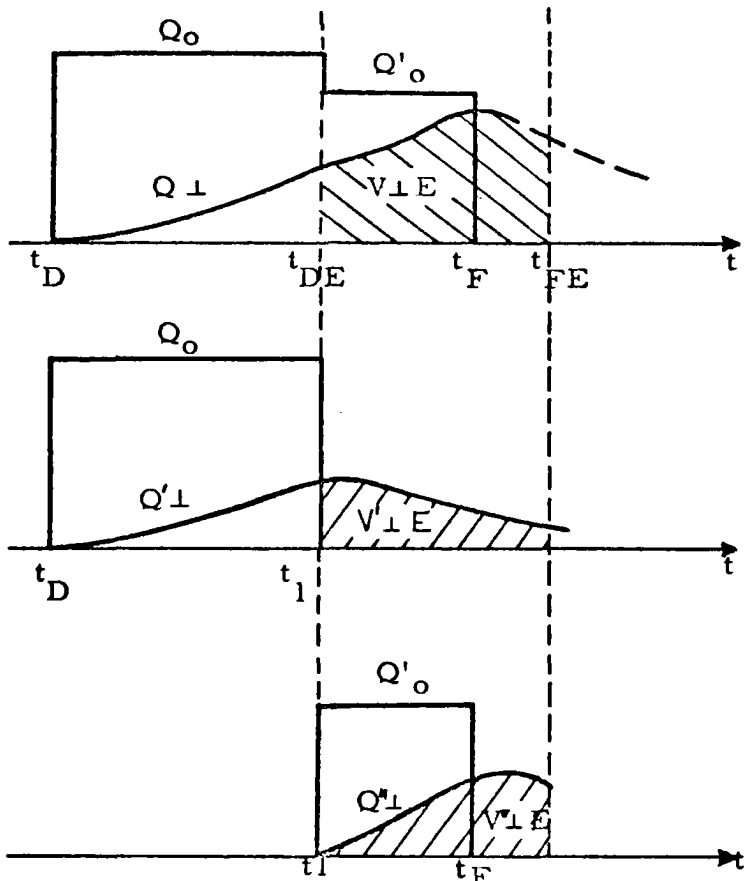
En fait la seule connaissance de

$\frac{Q\perp}{Qo}$ en fonction de t

et de $\frac{V\perp}{Vo}$ en fonction de t $\begin{cases} \text{avec } V\perp = \int_o^t Q\perp \, dt \\ \text{et } Vo = Qo.t \end{cases}$

permet de résoudre les problèmes les plus complexes.

2.22 - Seconde application du théorème de superposition

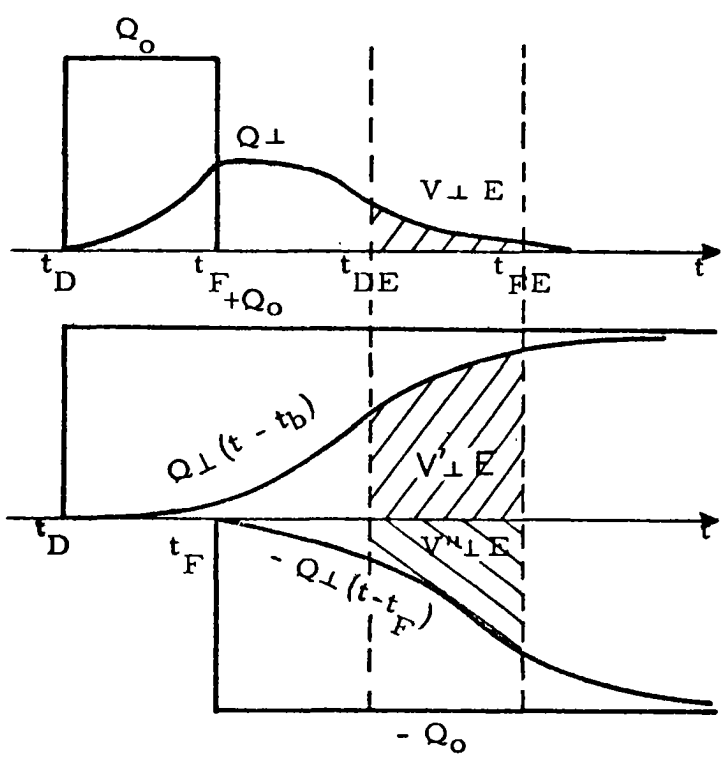


Soit un pompage par paliers mis en route à l'instant t_D et arrêté à l'instant t_F.

On montre que l'effet de ce pompage est le même que si le pompage à débit Q_o avait été arrêté à l'instant t_1 et immédiatement remis en route à débit Q'_o
(ce qui physiquement est évident).

En d'autre terme il est possible de décomposer un calendrier de pompage en "éléments" et d'additionner l'effet de ces éléments pris séparémment.

2.23 - Troisième application du théorème de superposition



Tout calendrier de pompage dans un puits peut être décomposé en "élements"dont les effets sur la période d'étiage sont additifs ; l'un de ces "élements" de pompage est concrétisé par

$Q \perp (Q_o, t_D, t_F)$

$V \perp (Q\perp, t_{DE}, t_{FE})$

Le théorème de superposition nous permet de considérer cet élément de pompage comme résultant de la superposition à un pompage de durée illimitée à débit Q_o mis en route au temps t_D, d'un pompage de durée illimitée à débit $-Q_o$ mis en route au temps t_F (ceci est physiquement évident puisqu'à partir de l'instant t_F, le débit pompé est $Q_o - Q_o = 0$).

Soit $Q\perp = Q\perp_{(t-t_D)} - Q_{(t-t_F)}$

et $V\perp E = V'\perp E - V''\perp E$

Comme $V'\perp E = \int_{t_{DE}}^{t_{FE}} Q\perp_{(t-t_D)} dt = \int_{t_D}^{t_{FE}} Q\perp_{(t-t_D)} dt - \int_{t_D}^{t_{DE}} Q\perp_{(t-t_D)} dt$

et identiquement pour $V''\perp E$ il vient

$$V\perp E = V\perp_{(t_{FE}-t_D)} - V\perp_{(t_{DE}-t_D)} - V\perp_{(t_{FE}-t_F)} + V\perp_{(t_{DE}-t_F)}$$

En d'autres termes, le calcul du préjudice instantané en période d'étiage, ou celui du préjudice global d'étiage, causé à une rivière par un "élément" de pompage dans un puits s'obtient par simple sommation de valeurs particulières des lois $Q\perp(t)$ ou $V\perp(t)$

Enfin, pour un puits et une configuration donnés, le caractère linéaire des équations que nous écrirons nous permettra de toujours présenter ces lois sous la forme :

$$\frac{Q\perp}{Q_o}(t) \quad \text{ou} \quad \frac{V\perp}{V_o}(t)$$

2.3 - NOUVEL EXPOSE du PROBLEME.

Etant donné une nappe en mouvement, en relation avec un ou plusieurs cours d'eau, et un puits dans cette nappe soumis à n calendriers de pompage différents, nous cherchons à évaluer

soit le préjudice instantané causé en période d'étiage au réseau superficiel par ces puits, soit le préjudice global causé durant tout ou partie de la période d'étiage par ces mêmes puits.

1er temps : nous considérons la nappe au repos, en équilibre avec le réseau superficiel.

2ème temps : nous décomposons les calendriers de pompage en "éléments"

3ème temps : supposant connues pour chaque puits les lois $\frac{Q\perp}{Qo}(t)$ et $\frac{V\perp}{Vo}(t)$ nous évaluons l'effet de chaque élément de pompage sur la période d'étiage considérée.(en négligeant l'effet de ces pompages sur les cycles hydrologiques postérieurs - cf. annexe page X).

4ème temps : nous ajoutons tous ces effets élémentaires.

En d'autres termes, tout problème particulier est aisément soluble dès lors que l'on connait, pour une configuration donnée les lois $\frac{Q\perp}{Qo}(t)$ et $\frac{V\perp}{Vo}(t)$ pour toute position du puits dans cette configuration.

2.4 - FONDEMENTS THEORIQUES du PROBLEME (pour mémoire). (voir annexe)

2.5 - CONFIGURATIONS USUELLES de NAPPES ALLUVIALES.

Nous allons maintenant rechercher quels sont les types de configuration de nappes alluviales que l'on peut usuellement rencontrer ; nous définirons chaque configuration par trois "types" à savoir :

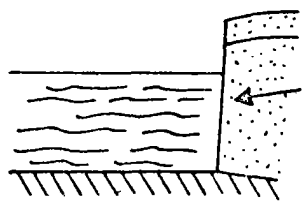
- un type de "rivière" correspondant au contact nappe-rivière ;
- un type de nappe correspondant aux formes et disposition des couches perméables ;
- un type de côteau correspondant au contact nappe-faciès latéral (ce "côteau" pouvant être éventuellemnt constitué par une autre rivière).

2.51 - Types de rivières caractéristiques.

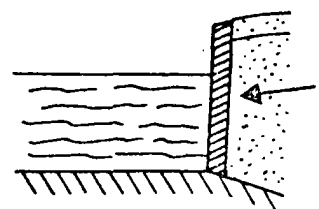
Le contact entre nappe et "rivière" peut revêtir plusieurs aspects, soit en coupe transversale, soit en plan.

a) - En coupe transversale : 6 cas peuvent se présenter.

Cas 1 et 2 : la rivière recoupe entièrement l'horizon aquifère :

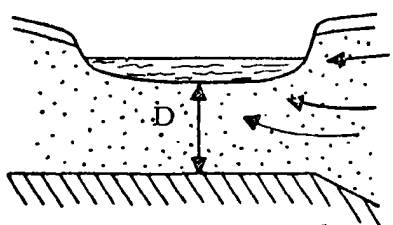


Cas 1 - Contact parfait

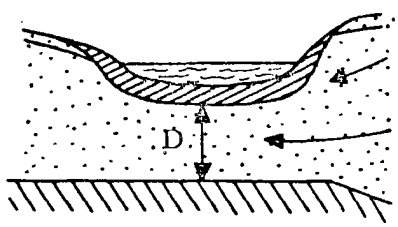


Cas 2 - Berges colmatées

Cas 3 et 4 : la rivière ne recoupe pas l'horizon aquifère

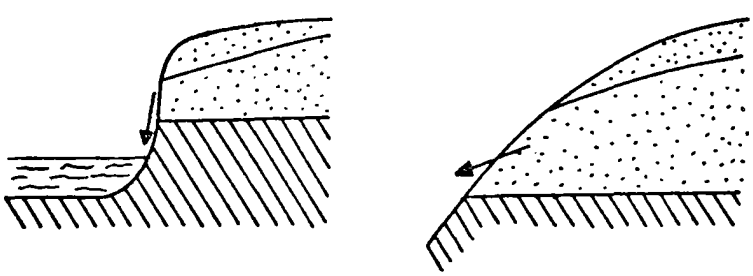


Cas 3 - Contact parfait

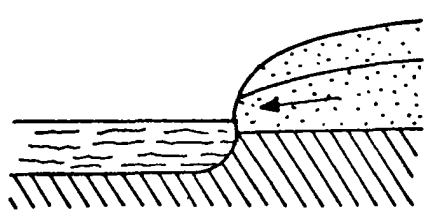


Cas 4 - Lit et berges colmatés

Cas 5 et 6 : la nappe est plus ou moins "perchée" par rapport à la rivière (celle-ci pouvant être à la limite inexistante)



Cas 5 - Nappe perchée ou ligne de sources



Cas 6 - Nappe vive

Pour un point d'observation situé à une distance d'au moins 1,5 D de la rivière, les cas 3 et 4 peuvent être respectivement assimilés aux cas 1 et 2.

Si les hauteurs de suintement sont faibles, les cas 5 et 6 peuvent être assimilés au cas 1 puisque la cote d'exhaure étant fixe, la condition à la limite est du type "à potentiel imposé".

Remarque concernant la réversibilité des écoulements.

Lorsque nous appliquons le théorème de superposition, nous admettons la reversibilité des écoulements à travers le contact puisque nous supposons que l'apport latéral est nul, que la nappe est initialement au repos et que l'écoulement dû à un pompage peut être considéré comme ne s'effectuant que de la rivière vers la nappe.

Or il est clair que le cas 5 est absolument irréversible, il faudra donc s'assurer a posteriori que les préjudices calculés ne concernent que des "manques à gagner".

Nous supposons dans nos calculs que les écoulements des cas 2 et 4 sont totalement réversibles, c'est-à-dire que les pertes de charge subies par l'écoulement à travers le contact sont les mêmes quel que soit le sens d'écoulement (ce point mériterait toutefois une confirmation expérimentale formelle).

Quant au cas 6, il s'apparente au cas 5 pour les préjudices concernant des "manques à gagner" et au cas 2 pour les préjudices concernant des "réalimentations" ; toutefois l'éventualité de pompages susceptibles de créer les conditions de "réalimentation" dans des nappes libres présentant des configurations du type 5 ou 6 peut être pratiquement écartée ; en effet, ces nappes généralement pauvres ne sauraient être soumises à des pompages aussi intensifs sans risques de tarissement.

Les deux types de "rivière" à retenir pour l'instant peuvent donc être symbolisées par :

R P (type "rivière" à contact parfait)

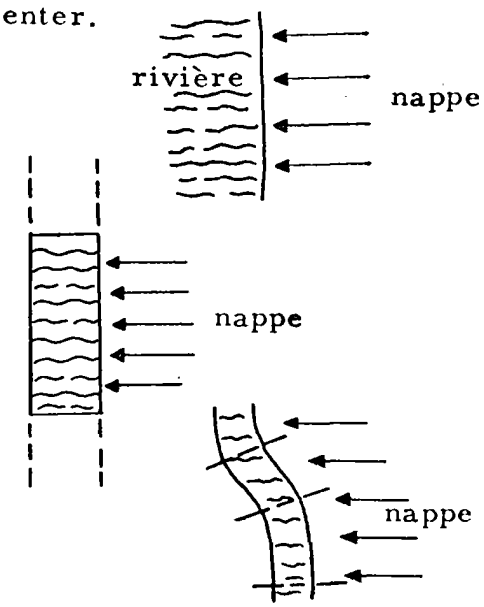
R I (type "rivière" à contact imparfait)

b) - <u>En plan</u> : trois cas peuvent se présenter.

<u>Cas 1</u> : rivière s'étendant sur une longueur droite relativement grande

<u>Cas 2</u> : tronçon de longueur finie d'une rivière ou d'un plan d'eau supposés illimités

<u>Cas 3</u> : berge de la rivière assimilable à une ligne brissée



Dans des cas simples, le troisième cas peut être étudié à partir des résultats du cas 2 par application de la théorie des images (voir page 29 par exemple).

Nous schématiserons ces deux cas sous la forme :

R ∞ (type de "rivière" de longueur infinie)

R F (type de "rivière" de longueur finie)

Soient au total quatre types de "rivières" :

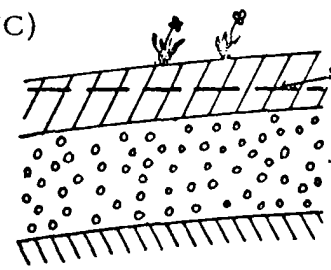
R P ∞ , R P F, R I ∞ et R I F

2.52 - Types de nappe caractéristiques.

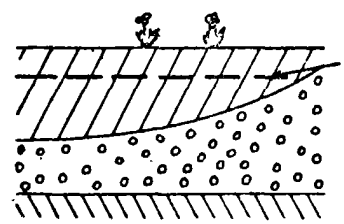
L'aquifère intéressé par des pompages peut se présenter, dans les cas usuels, sous diverses formes simples schématisées par les 6 cas suivants :

Nappes captives (symbolisées par NC)

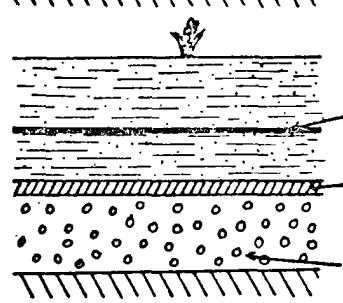
Cas 1 NCU — Nappe d'épaisseur sensiblement uniforme



Cas 2 NCV — Nappe d'épaisseur uniformément variable

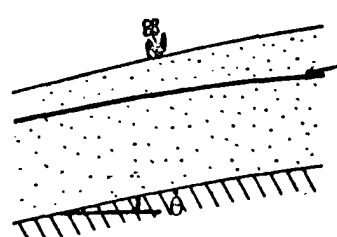


Cas 3 NCH — Nappe captive réalimentée par une éponte conformément au schéma proposé par Hantush

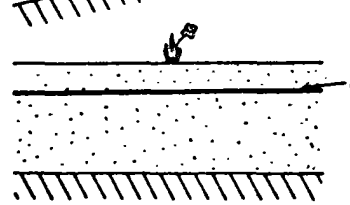


Nappes libres (symbolisées par NL)

Cas 4 NLJ — Nappe libre à substratum incliné (pente $J = tg\ \theta$)



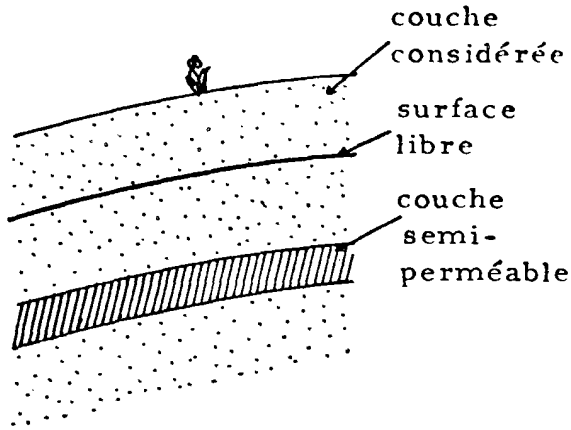
Cas 5 NLO — Nappe libre à substratum horizontal ($J = 0$)



<u>Cas 6</u>

NLH

Nappe libre à réalimentation par le mur conformément au schéma proposé par Hantush



Soit au total 6 types de nappe :

NCU, NCV, NCH, NLJ, NLO, NLH

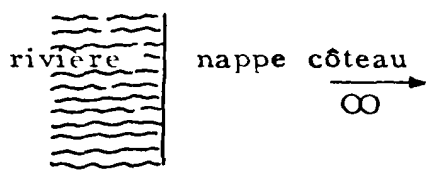
2.53 - <u>Types de "côteaux" caractéristiques.</u>

On peut dénombrer 3 types de "côteaux" symbolisés par la lettre C

<u>Cas 1</u>

C ∞

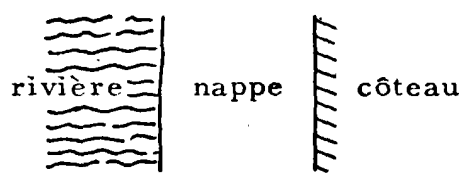
Limite à très grande distance de la rivière (nappe pratiquement semi-infinie)



<u>Cas 2</u>

C //

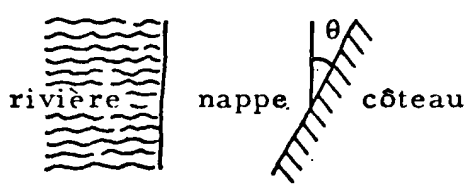
Limite imperméable de longueur relativement grande s'étendant parallelement à la rivière



<u>Cas 3</u>

C θ

Limite imperméable de longueur relativement grande formant un angle θ avec la rivière

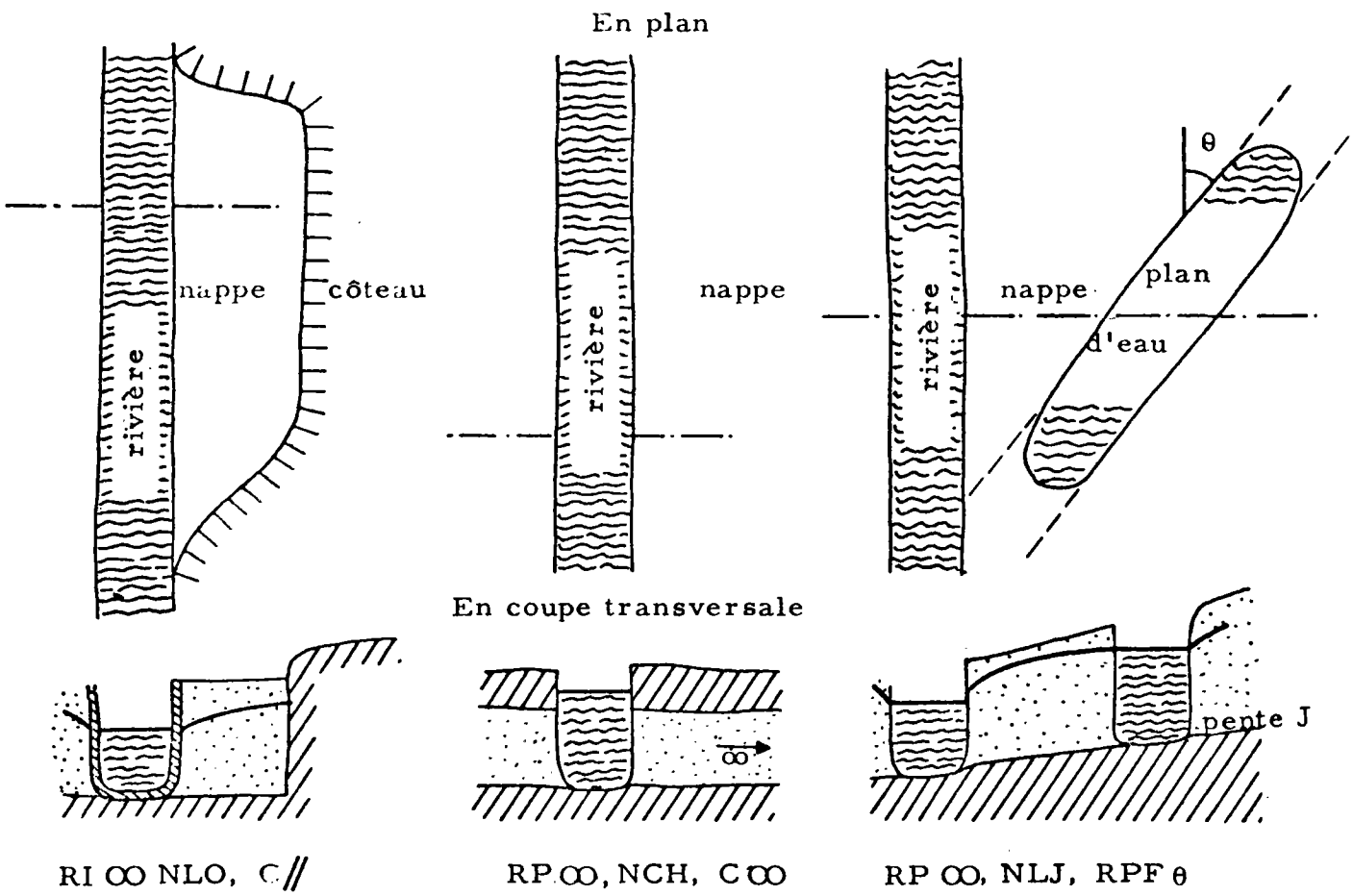


Soit au total 3 types de "côteaux"

C ∞, C // et C θ

Toutefois à ces trois types de "côteaux", il convient d'ajouter pour mémoire les types de "rivières" déjà cités pour l'éventualité de nappes comprises entre deux cours d'eau.

2.54 - Exemples de configurations.



2.6 - PARAMETRES CARACTERISTIQUES d'une CONFIGURATION DONNEE.

Ils sont de trois ordres :

- paramètres caractéristiques de la géométrie des limites du système aquifère, par exemple : distance entre deux limites parallèles, angle de deux limites, etc.
- paramètres caractéristiques des propriétés hydrodynamiques du système aquifère : diffusivité de l'aquifère, colmatage des berges, perméabilité vertical d'épontes semi-parméables, etc.
- paramètres fixant la position du puits considéré par rapport aux limites du système aquifère : distance à la rivière, au "côteau", etc

2.7 - CONCLUSIONS.

Une étude du préjudice causé à un réseau superficiel en période d'étiage par des pompages dans une nappe alluviale se réduit à la détermination des lois $\frac{Q_\perp}{Q_o}(t)$ et $\frac{V_\perp}{V_o}(t)$ pour le système aquifère considéré, puis à des successions d'additions ; une configuration alluviale étant donnée et les différents paramètres caractéristiques du système étant supposés connus, le problème revient à obtenir les grandeurs $\frac{Q_\perp}{Q_o}$ et $\frac{V_\perp}{V_o}$ en fonction du temps et des paramètres caractéristiques du système.

•

• •

3 - DETERMINATION de $\frac{Q_\perp}{Q_o}$ et de $\frac{V_\perp}{V_o}$ pour DIVERS EXEMPLES de CONFIGURATION

Dans un premier exemple, nous détaillerons les calculs afin de mettre en évidence le mode opératoire ; dans les exemples suivants, nous n'insisterons que sur les hypothèses et les conclusions afin de ne pas alourdir cet exposé.

2.1 - CONFIGURATION (RPF, NCU, C ∞) et EXTENSIONS

- Hypothèse

- Nappe d'extension semi-infinie, captive (ou libre dans la mesure où les hauteurs mouillées varient peu et où le substratum est horizontal)(cf. page 49).

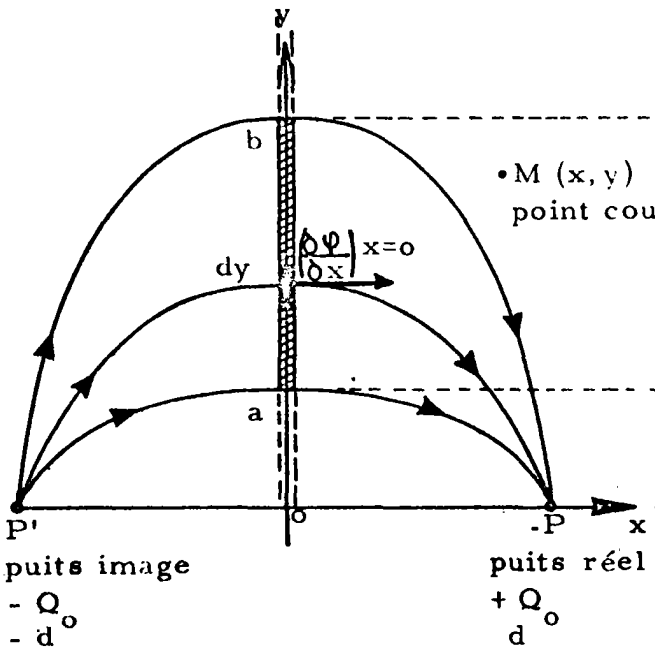
- Couche perméable isotrope et homogène, d'épaisseur constante, ne risquant pas de se "dénoyer" (nappe captive) ou de se "noyer" (nappe libre) au cours du temps: $\nu = T/s \simeq$ constante

pour tout $\begin{cases} M\ (x, y) \\ t \\ \text{direction} \end{cases}$

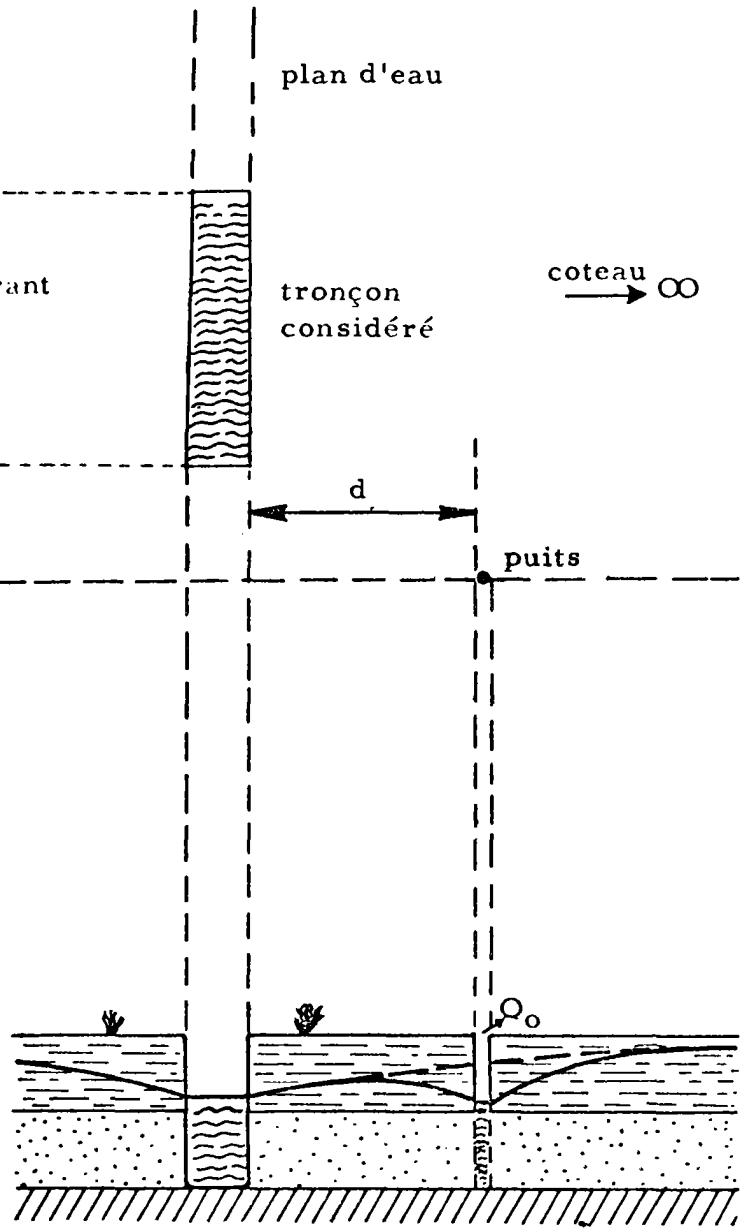
- Plan d'eau supposé illimité.

- Puits à la distance d de l'axe de la berge mis en pompage à l'instant $t = 0$ à débit constant $Q = Q_o$.

- Pas d'hypothèsessur l'écoulement initial de la nappe, ni sur ses conditions d'alimentation.



SCHEMATISATION ANALYTIQUE



CONFIGURATION SCHEMATIQUE

Soit à calculer $\frac{Q\perp}{Q_o}$ et $\frac{V\perp}{V_o}$, débits soutirés à une longueur finie $l = \overline{ab}$ du plan d'eau.
Variables indépendantes : t, x, y.

- <u>Paramètres du problème</u> :

  - géométrie a et b
  - propriétés hydrodynamiques $\nu = T/S$
  - position du puits d

Le segment $\overline{ab}$ est équipotentiel : $\varphi_{\overline{ab}} = \varphi_o = Cte$; donc, le plan d'eau étant supposé illimité, tout se passe comme si un puits "image" systématique de P par rapport à $\overline{ab}$ était soumis à un pompage de débit opposé. Dans un tel milieu fictif illimité, la répartition des potentiels due aux effets de P et P' en un point courant M(x, y) est donné par

$$\varphi(M) = \varphi_o \frac{Q_o}{4\pi T} W\left[\frac{(x-d)^2 + y^2}{4\nu t}\right] - \frac{Q_o}{4\pi T} W\left[\frac{(x+d)^2 + y^2}{4\nu t}\right]$$

avec $W(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

Le débit $Q\perp$ qui traverse $\overline{ab}$ à l'instant t est donné par

$$Q\perp = -T \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x = o, y, t) \cdot dy$$

$$= \frac{Q_o}{\pi} \int_{\frac{a}{d}}^{\frac{b}{d}} \frac{e^{-(\eta^2+1)\mu}}{\eta^2+1} \cdot d\eta \quad \text{avec } \eta = \frac{y}{d} \text{ et } \mu = \frac{d^2}{4\nu t}$$

$$\frac{Q\perp}{Q_o} = \frac{1}{\pi}\int_o^{\frac{b}{d}} \frac{e^{-(\eta^2+1)\mu}}{\eta^2+1} d\eta - \frac{1}{\pi}\int_o^{\frac{a}{d}} \frac{e^{-(\eta^2+1)\mu}}{\eta^2+1} d\eta$$

soit $$\boxed{\frac{Q\perp}{Q_o} = \frac{1}{2} M^{\boxtimes}\left(\frac{b}{d}, \frac{d^2}{4\nu t}\right) - \frac{1}{2} M^{\boxtimes}\left(\frac{a}{d}, \frac{d^2}{4\nu t}\right)}$$

La fonction $M^{\boxtimes}(\alpha, \beta^2)$ à été tabulée et l'abaque n°1 en a été déduite.

Le volume $V\perp$ qui a traversé le segment $\overline{ab}$ entre les instants 0 et t est donné par :

$$V\perp = \int_o^t Q\perp dt$$

soit $$\boxed{\frac{V\perp}{V_o} = C^{\boxtimes}\left(\frac{b}{d}, \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}\right) - C^{\boxtimes}\left(\frac{a}{d}, \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}\right)}$$

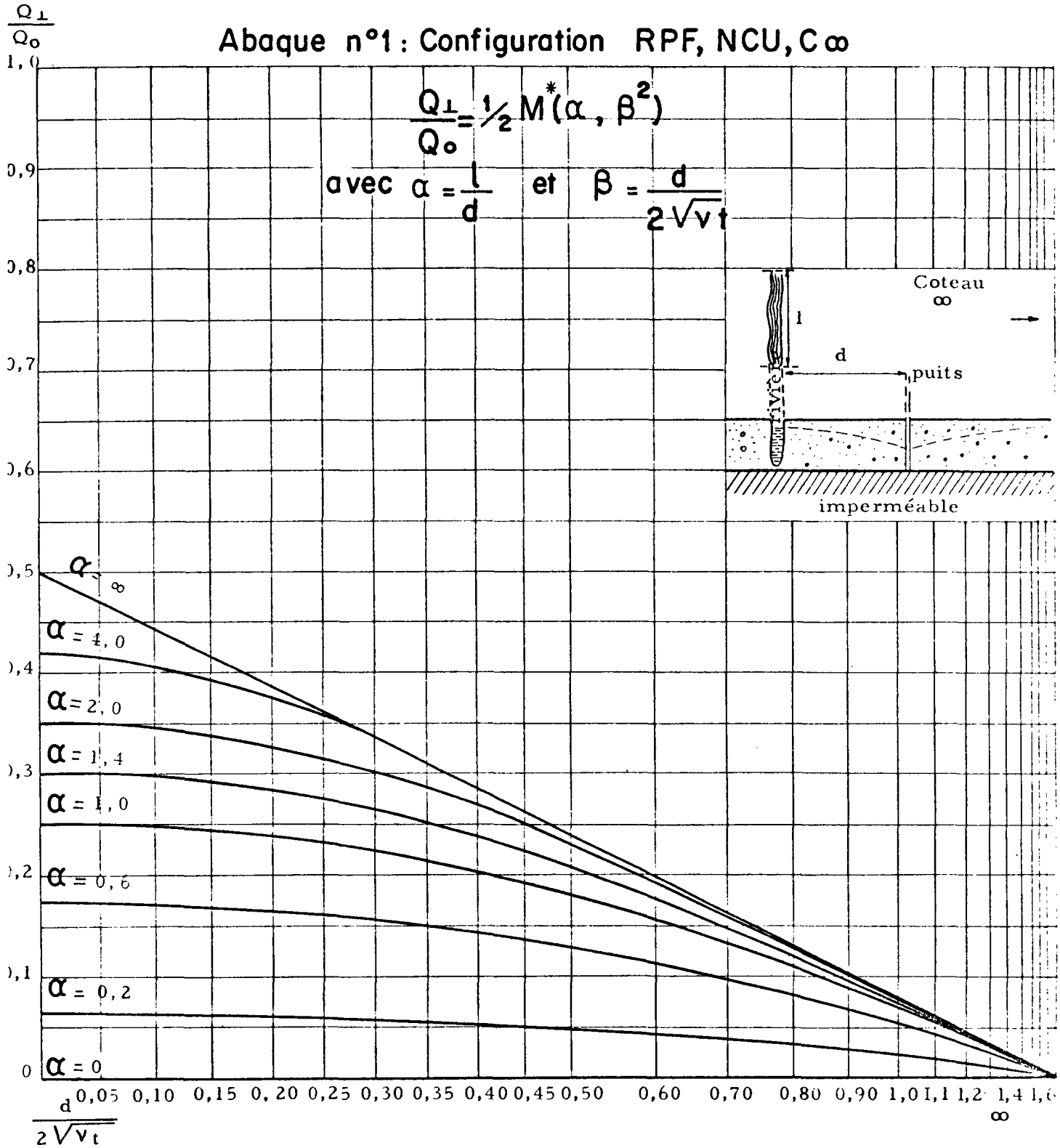
La fonction $C^{\boxtimes}(\alpha, \beta)$ a été tabulée et l'abaque n°2 en a été déduite.

<u>Utilisation des abaques 1 et 2.</u>

Soit à calculer la fraction $\frac{Q\perp}{Qo}$ du débit pompé, en provenance d'une portion du plan d'eau telle que AB', à l'instant t_o.

Connaissant to et ν, on connait pour un puits $\beta o = \frac{d}{2\sqrt{\nu to}}$

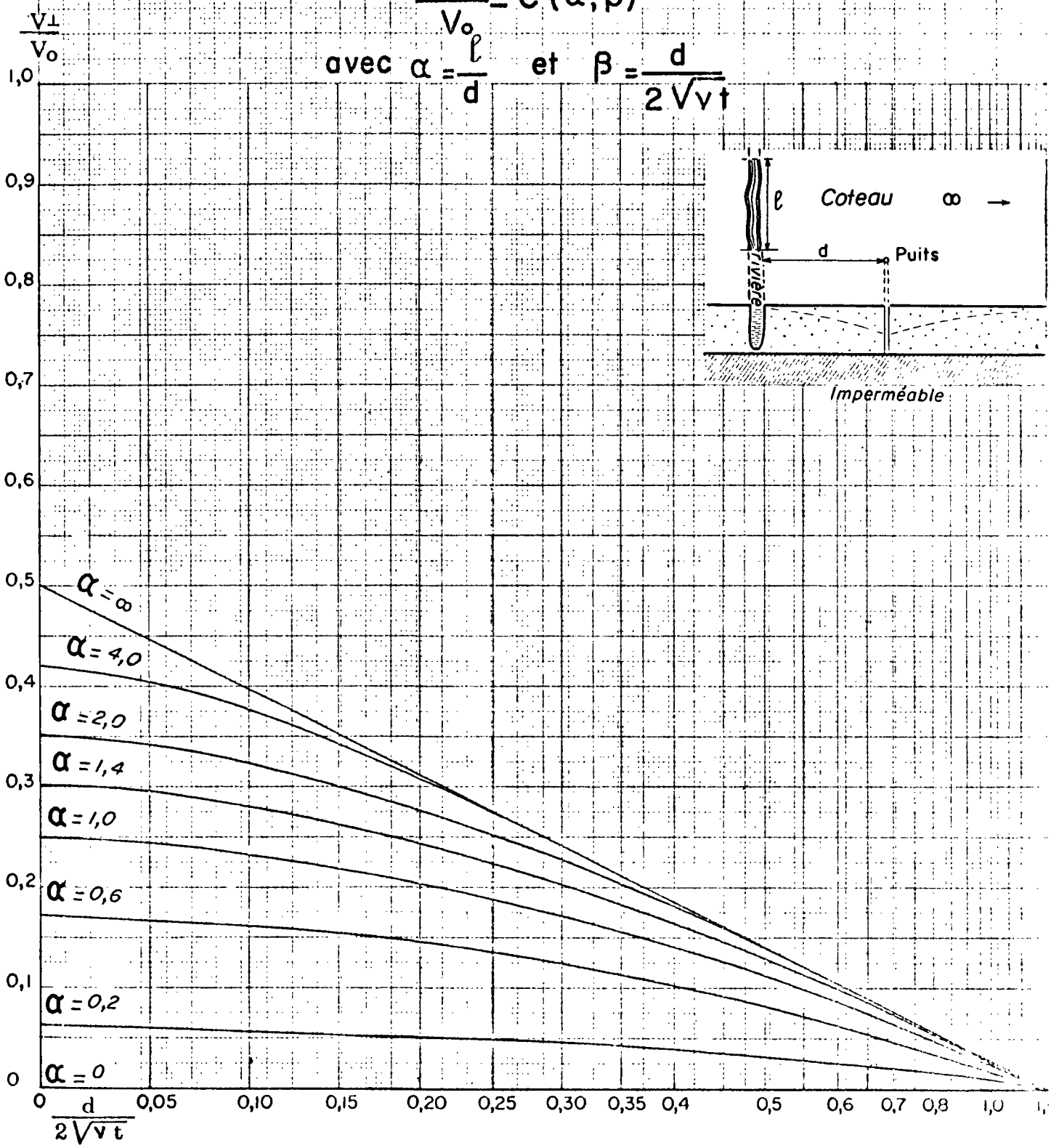
Connaissant a et b, on connait $\alpha_1 = \frac{a}{d}$ et $\alpha_2 = \frac{b}{d}$


Abaque n°1 : Configuration RPF, NCU, C∞
$\frac{Q_\perp}{Q_o} = \frac{1}{2} M^*(\alpha, \beta^2)$
avec $\alpha = \frac{l}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{vt}}$
$\frac{Q_\perp}{Q_o}$
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
α = ∞
α = 4,0
α = 2,0
α = 1,4
α = 1,0
α = 0,6
α = 0,2
α = 0
0,05 0,10 0,15 0,20 0,25 0,30 0,35 0,40 0,45 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 1,0 1,1 1,2 1,4 1,6
∞
$\frac{d}{2\sqrt{vt}}$
Coteau
∞
l
d
puits
imperméable

Abaque n°2: Configuration RPF, NCU, C∞

$$\frac{V_\perp}{V_o} = C^*(\alpha, \beta)$$

avec $\alpha = \frac{\ell}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{vt}}$



L'abaque n°1 nous donne $\left(\frac{Q\perp}{Q_o}\right)_1$ pour $\beta = \beta_o$ et $\alpha = \alpha\ 1$

et de même $\left(\frac{Q\perp}{Q_o}\right)_2$ pour $\beta = \beta_o$ et $\alpha = \alpha\ 2$

D'où $\left(\frac{Q\perp}{Q_o}\right)_{t = t_o} = \left(\frac{Q\perp}{Q_o}\right)_2 - \left(\frac{Q\perp}{Q_o}\right)_1$

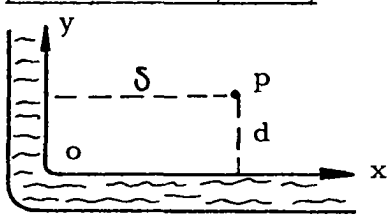
Soit à calculer ensuite la fraction $\frac{V\perp}{V_o}$ du volume pompé en provenance d'une portion du plan d'eau telle que AB, entre les instants o et t_o.

L'abaque n°2 nous donne $\left(\frac{V\perp}{V_o}\right)_1$ pour $\beta = \beta_o$ et $\alpha = \alpha\ 1$

et de même $\left(\frac{V\perp}{V_o}\right)_2$ pour $\beta = \beta_o$ et $\alpha = \alpha\ 2$

D'où $\left(\frac{V\perp}{V_o}\right)_{o \rightarrow t_o} = \left(\frac{V\perp}{V_o}\right)_2 - \left(\frac{V\perp}{V_o}\right)_1$

<u>Première extension</u> : <u>Coude ou confluent à angle droit ou configuration (RP π/2, NCU, C ∞)</u>



De part et d'autre de l'angle droit, la rivière est illimitée, c'est-à-dire de longueur grande vis-à-vis de d et δ . Les autres hypothèses sont inchangées.

Ce problème qui pourrait être traité par la méthode précédente par application aux demi-droites ox et o y de la théorie des images se réduit dans ce cas particulier aux expressions

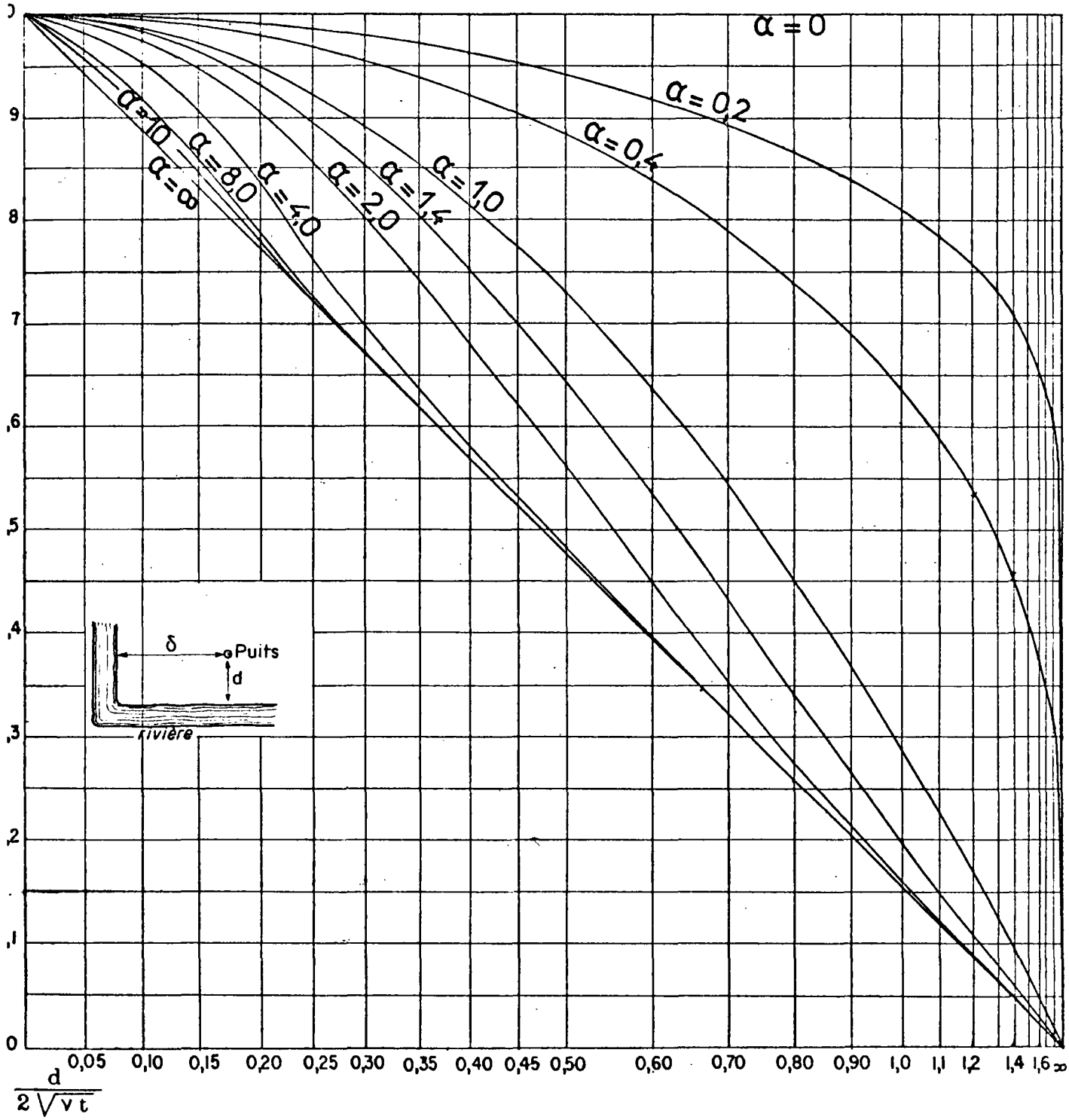
$$\frac{Q\perp}{Q_o} = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}}\right) . \ \mathrm{erf}\left(\frac{\delta}{d} \ . \ \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

Soit $\boxed{\frac{Q\perp}{Q_o} = 1 - \mathrm{erf}\,\beta \ . \ \mathrm{erf}\,\alpha\beta}$ avec $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$

$\alpha = \frac{\delta}{d}$

Abaque n° 3: Configuration $RP\frac{\pi}{2}$, NCU, $C\infty$

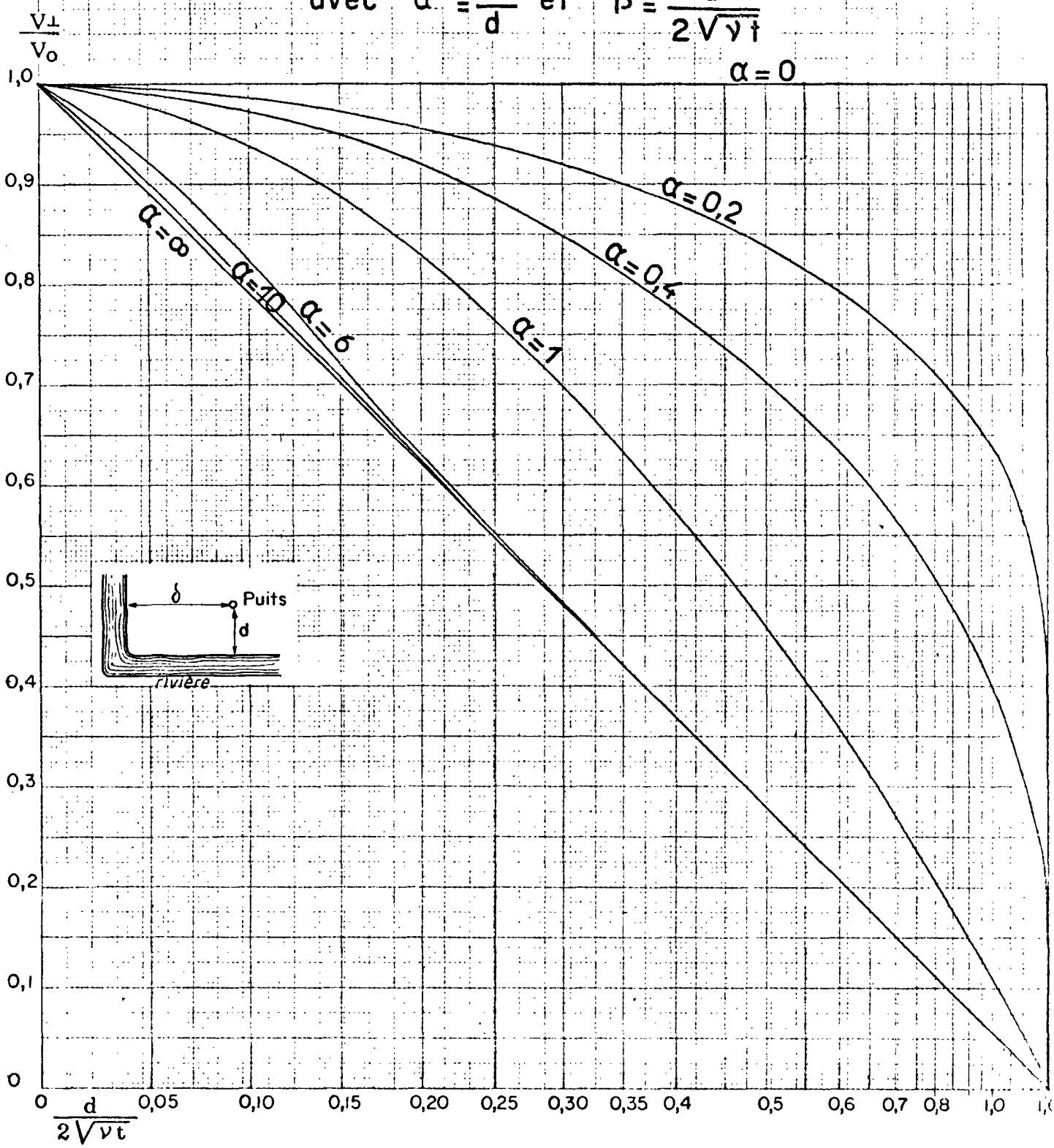
$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = 1 - \text{erf}\ \beta \cdot \text{erf}\ \alpha\beta \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}} \quad \alpha = \frac{\delta}{d}$$



Abaque n°4 Configuration $RP\frac{\pi}{2}$, NCU, C ∞

$$\frac{V_\perp}{V_o} = 1 - S^*(\beta, \alpha\beta)$$

avec $\alpha = \frac{\delta}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$



La fonction erf (u) ayant été tabulée l'abaque n°3 en a été déduite.

En outre $\frac{V_\perp}{V_o} = 1 - \int^{\boxtimes} \left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} , \frac{\delta}{d} \cdot \frac{d}{2\sqrt{\nu t}} \right)$

Soit $\boxed{\frac{V_\perp}{V_o} = 1 - \int^{\boxtimes} (\beta , \alpha \beta)}$

La fonction $\int^{\boxtimes}$ (u, v) ayant été tabulée l'abaque n°4 en a été déduite.

<u>Seconde extension</u> : <u>Configuration (RP∞ , NCU, C∞)</u>

La rivière présente une longueur droite grande vis-à-vis de la distance du puits à la rivière ; les expressions précédentes se réduisent dans ce cas particulier ($\delta \to \infty$) à

$\frac{Q_\perp}{Q_o} = \text{erfc} \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$ ou $\boxed{\frac{Q_\perp}{Q_o} = \text{erfc } \beta}$ avec $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$

et $\frac{V_\perp}{V_o} = 4 i^2 \text{erfc} \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$ ou $\boxed{\frac{V_\perp}{V_o} = 4 i^2 \text{erfc } \beta}$

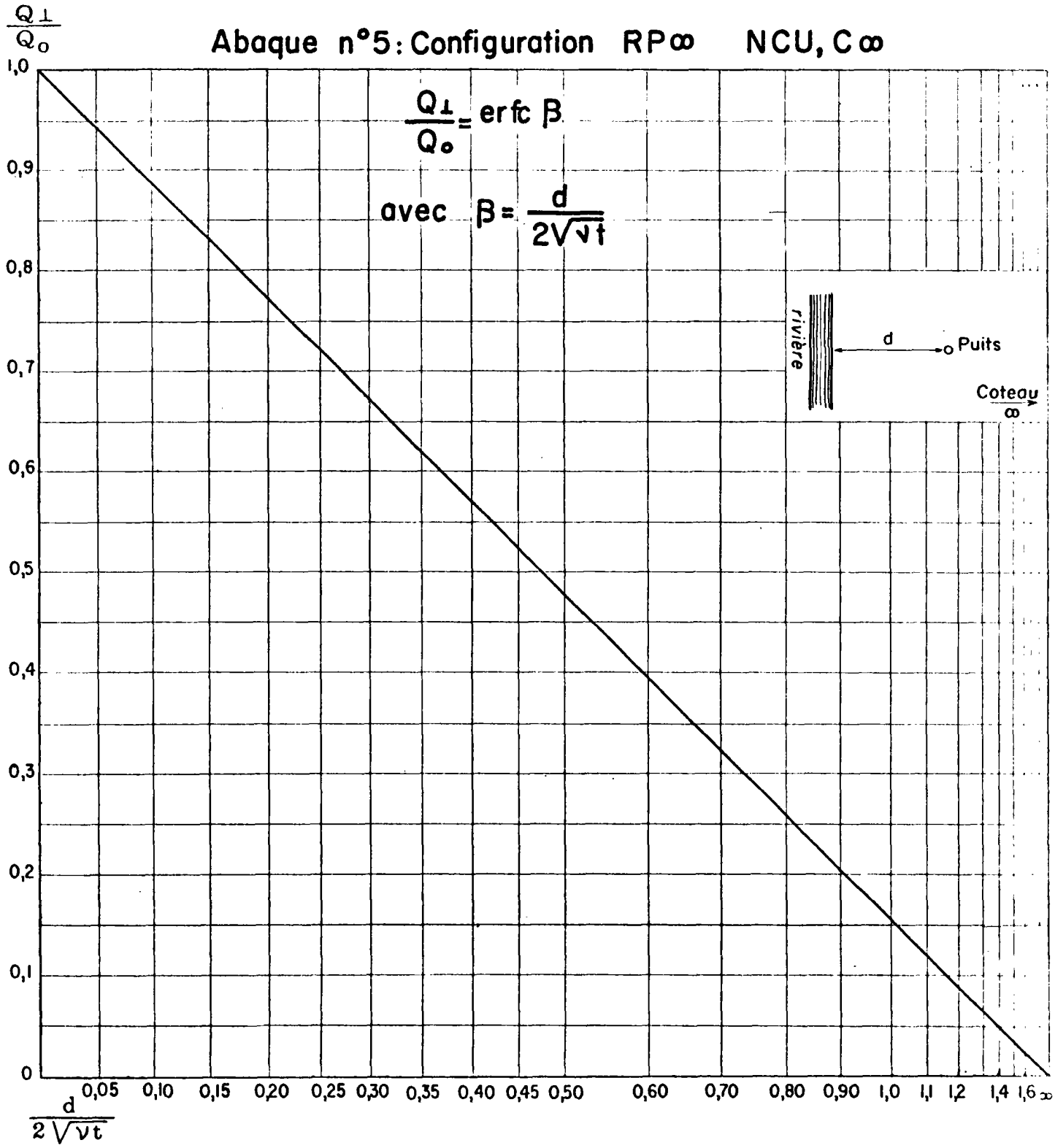
Les fonctions erfc β et $4 i^2$ erfc β ayant été tabulées, les abaques n°5 et 6 en ont été déduites.

<u>Mode de représentation graphique choisie pour les abaques $\frac{Q_\perp}{Q_o} (\alpha, \beta)$ et $\frac{V_\perp}{V_o} (\alpha , \beta)$</u>

Pour toutes les configurations étudiées, les grandeurs $\frac{Q_\perp}{Q_o}$ et $\frac{V_\perp}{V_o}$ sont fonctions de la grandeur adimensionnelle $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$ et d'un ou plusieurs paramètres adimensionnels α_1, α_2 etc...

Nous pouvons représenter ces fonctions sous forme d'abaques à condition de ne conserver qu'un seul paramère α , les autres étant maintenus constants (exemples de la page 45) ; nous avons choisi de représenter $\frac{Q_\perp}{Q_o}$ ou $\frac{V_\perp}{V_o}$ en ordonnée et β en abscisse puisque β intervient constamment.

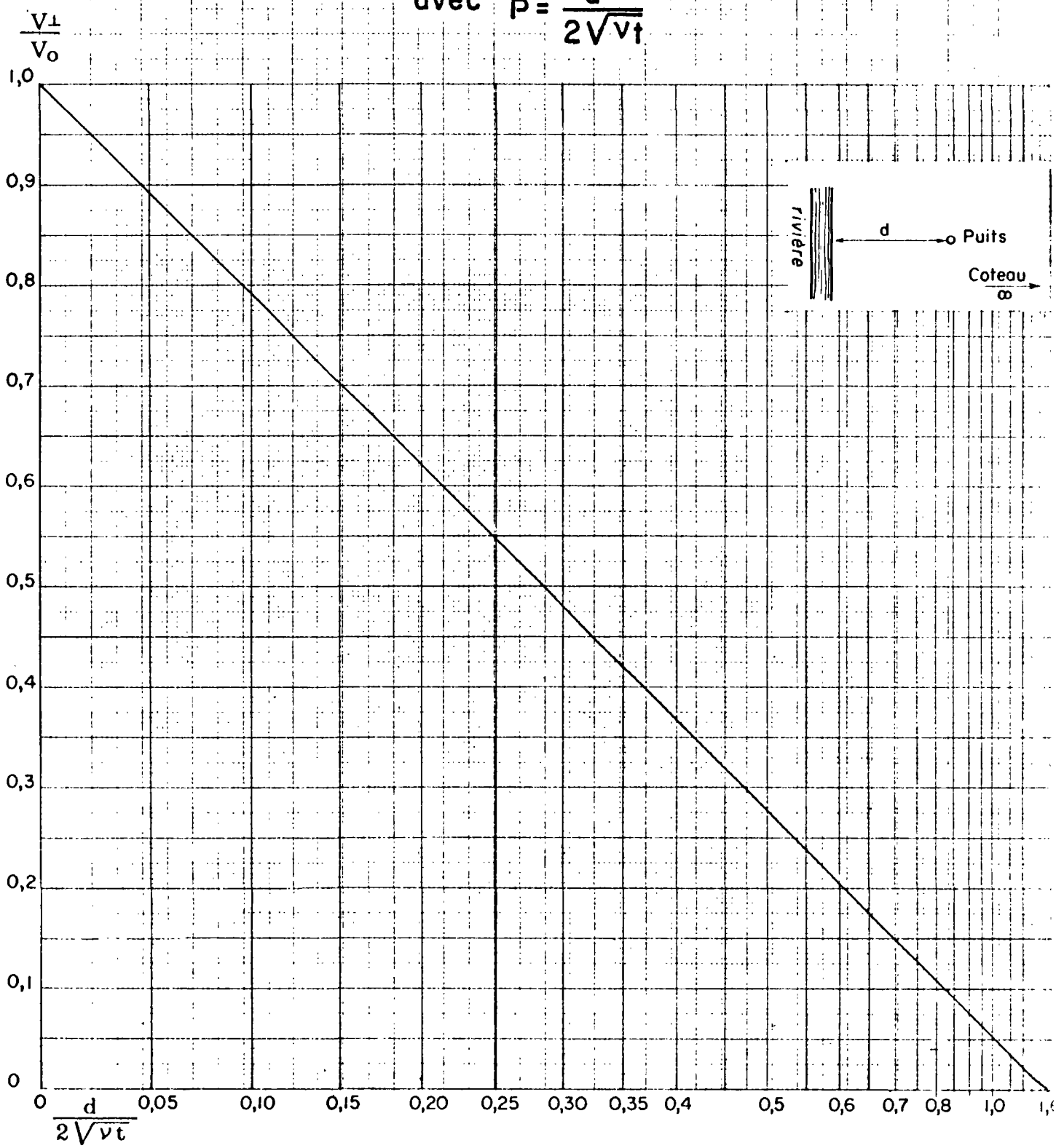
Les fonctions $\frac{Q_\perp}{Q_o} = \text{erf } \beta$ et $\frac{V_\perp}{V_o} = 4 i^2 \text{erfc } \beta$ constituent dans la plupart des cas une limite asymptotique (α tendant vers zéro ou l'infini) ; c'est donc une fonction de référence et nous avons choisi


Abaque n°5 : Configuration RP∞ NCU, C∞
Q⊥/Q₀
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Q⊥/Q₀ = erfc β
avec β = d/2√νt
rivière
d
Puits
Coteau
∞
0,05 0,10 0,15 0,20 0,25 0,30 0,35 0,40 0,45 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 1,0 1,1 1,2 1,4 1,6 ∞
d/2√νt

Abaque n°6 : Configuration RP∞ , NCU, C∞

$$\frac{V_\perp}{V_o} = 4 i^2 \operatorname{erfc}\beta$$

avec $\beta = \dfrac{d}{2\sqrt{\nu t}}$



de construire des diagrammes carrés tels que :

- les échelles de $\frac{Q_\perp}{Q_o}$ et $\frac{V_\perp}{V_o}$ soient linéaires ;
- les fonctions erfc β et $4 i^2$ erfc β soient respectivement représentées par la diagonale du carré.

3.2 - CONFIGURATION (RI ∞, NCU, C ∞)

- Hypothèse

Même hypothèse que page 23 avec en plus :

- présence au contact de la berge d'une mince couche très peu perméable vis-à-vis de l'aquifère schématisant un effet de "colmatage". - (voir croquis page suivante).

Cette mince couche colmatée est artificiellement caractérisée par le facteur K'/b'

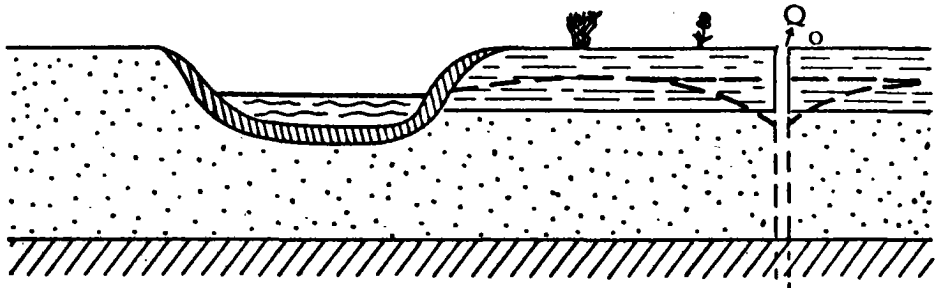
avec K' perméabilité de la couche colmatée

et b' épaisseur horizontale de la couche colmatée.

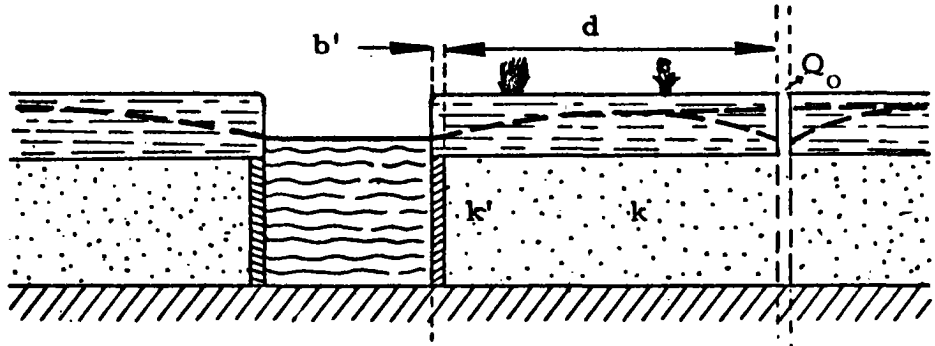
Ce facteur intègre les divers effets de perte de charge au contact de la rivière (tridimensionnalité de l'écoulement, lit ou berge colmaté. etc...) ; il intervient dans les calculs sous la forme K b'/K' avec K' perméabilité de l'aquifère.

Le terme K b'/K' a la dimension d'une longueur ; appelons a ~ K b'/K' cette longueur ; a représente l'épaisseur fictive d'aquifère qu'il conviendrait d'intercaler entre rivière et aquifère pour que, du point de vue des pertes de charges, les milieux réel hétérogène et fictif homogène soient équivalents.

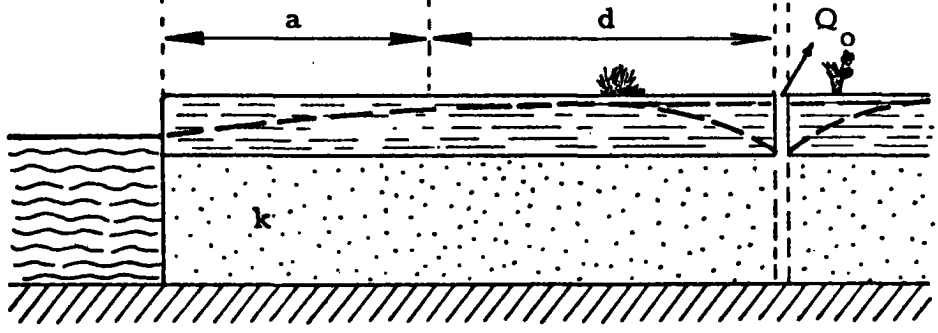
EXEMPLE
de CONFIGURATION
REELLE



CONFIGURATION
SCHEMATIQUE



CONFIGURATION
VIRTUELLE
HOMOGENE



Paramètres du problèmes :

- propriétés hydrodynamiques | de l'aquifère $\nu = T/S$
  | du contact $a = K\,b'/K'$

- position du puits d

Soit, après calculs

$$\boxed{\frac{Q_\perp}{Q_o} = \operatorname{erfc}\beta - e^{\left[\left(\beta + \frac{1}{2\beta\alpha}\right)^2 - \beta^2\right]} \operatorname{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\beta\alpha}\right)}$$

avec $\beta = \dfrac{d}{2\sqrt{\nu t}}$

et $\alpha = \dfrac{a}{d}$

$$\boxed{\frac{V_\perp}{V_o} = 4\,i^2 \operatorname{erfc}\beta - \frac{4}{\sqrt{\pi}}\alpha\beta\, e^{-\beta^2} + 4\alpha^2\beta^2\left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\operatorname{erfc}\beta - e^{\left(\beta + \frac{1}{2\beta\alpha}\right)^2 - \beta^2} \operatorname{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\beta\alpha}\right)\right]}$$

Les fonctions erfc β et i^2 erfc β ayant été tabulées, les abaques n°7 et 8 en ont été déduites.

3.3 - CONFIGURATION (RP ∞, NCU, C//).

- Hypothèses

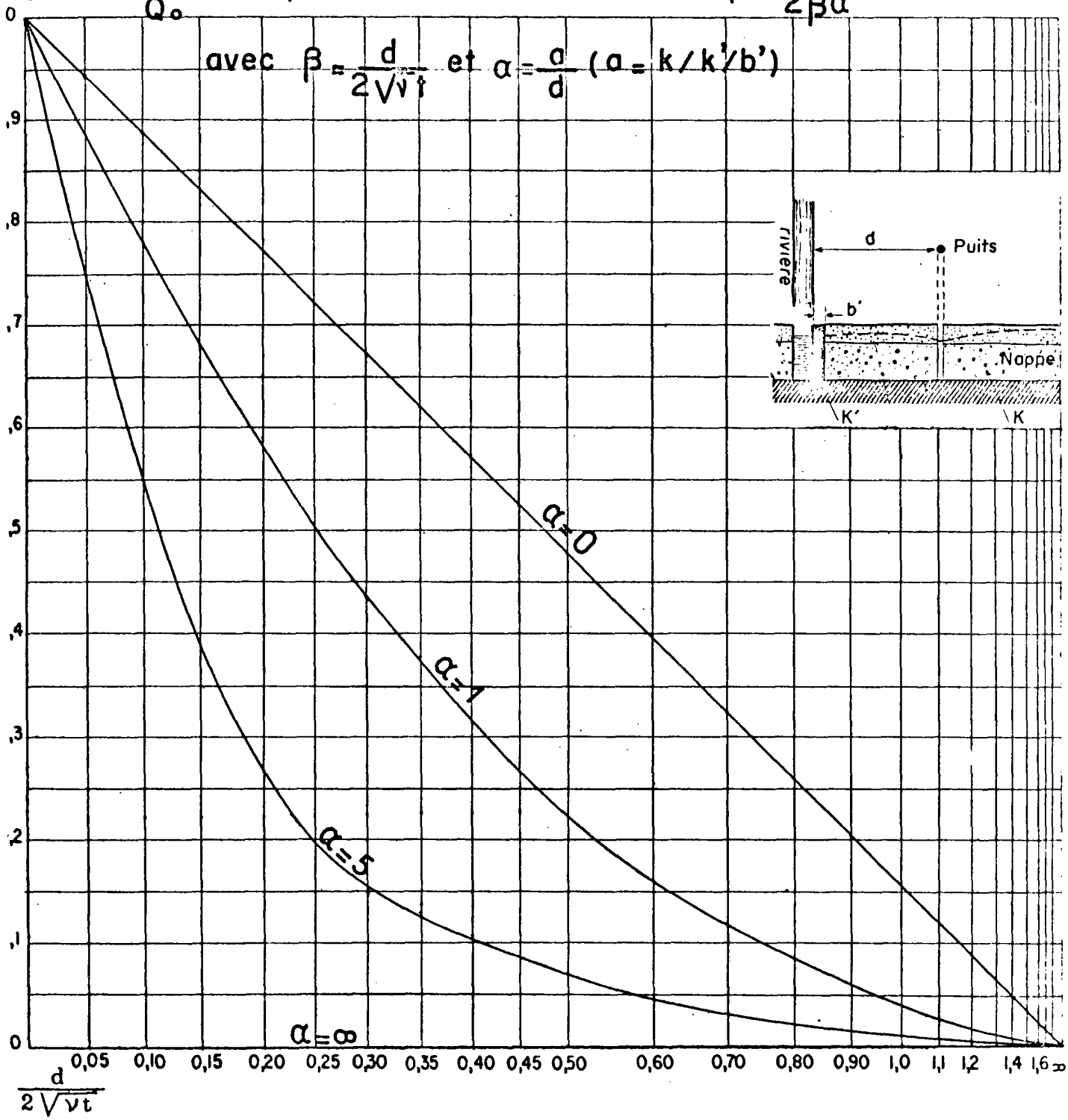
Mêmes hypothèses que page 23 mais avec en plus :

- présence d'un coteau imperméable de longueur infinie et parallèle à la rivière.

Abaque n°7 Configuration RI∞ , NCU, C∞

$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = \operatorname{erfc}\beta - e^{\left[\left(\beta+\frac{1}{2\beta\alpha}\right)^2-\beta^2\right]}\operatorname{erfc}\left(\beta+\frac{1}{2\beta\alpha}\right)$$

avec $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$ et $\alpha = \frac{a}{d}$ $(a = k/k'/b')$

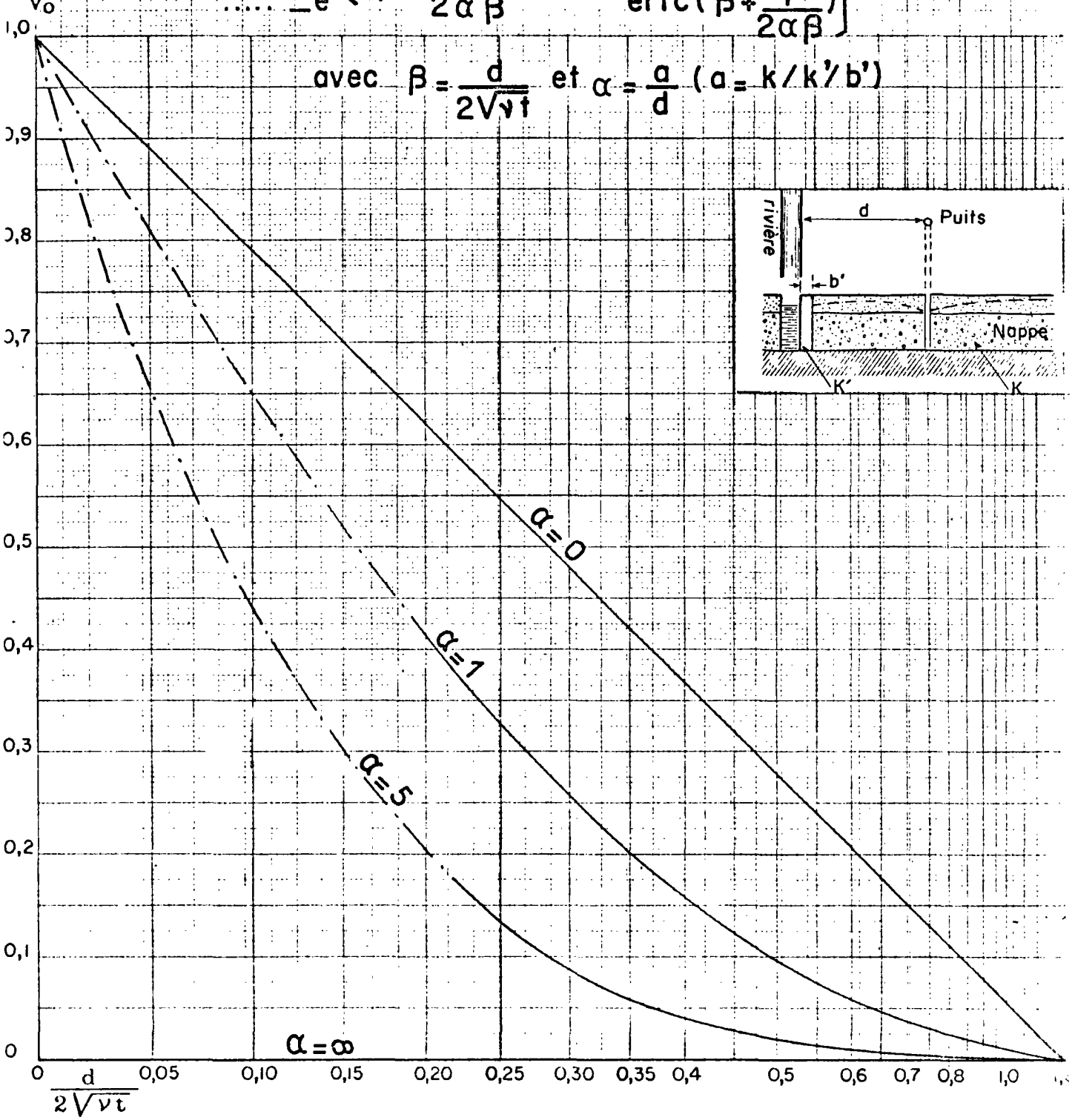


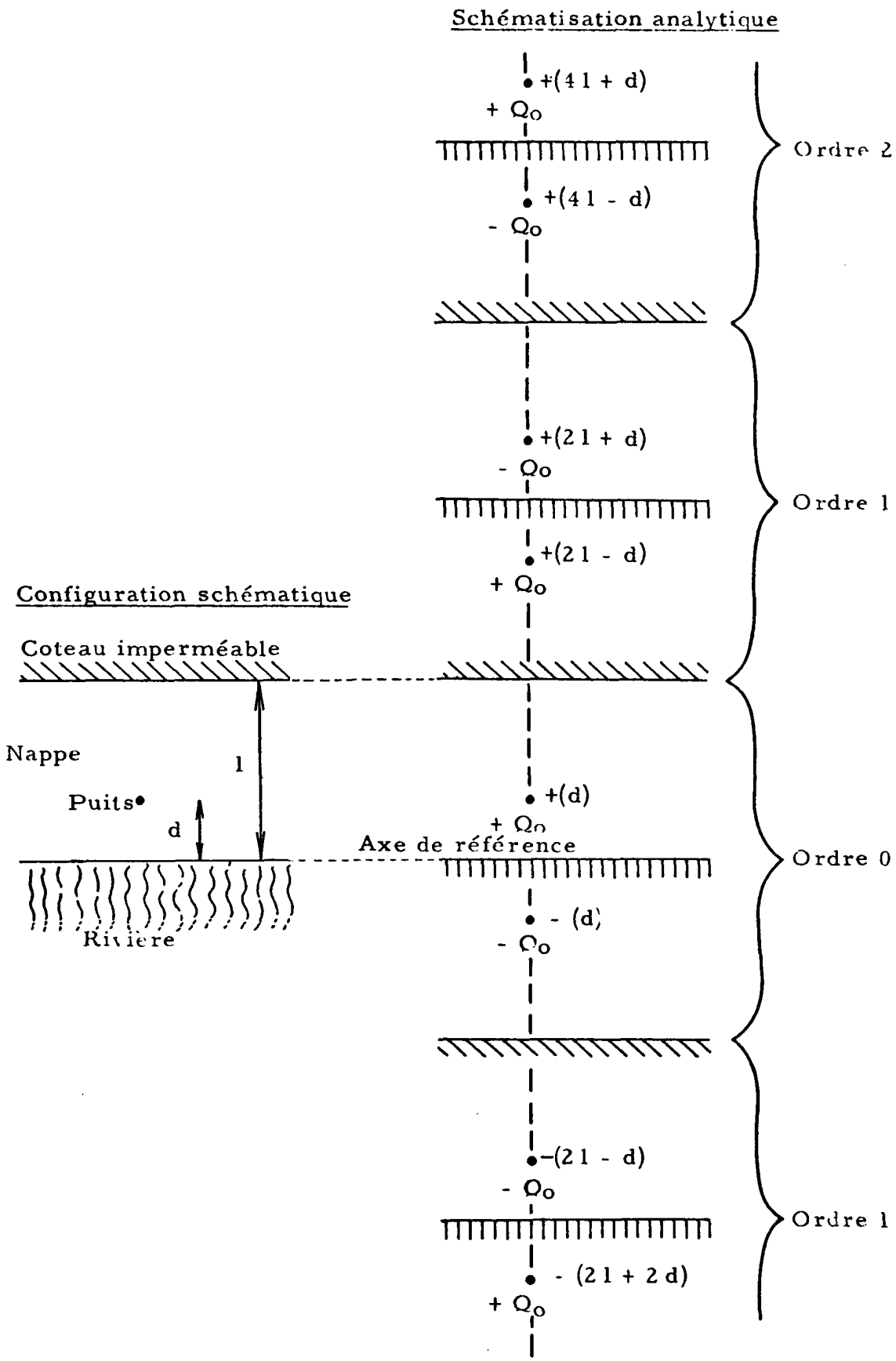
Abaque n°8 Configuration RI∞ , NCU, C∞

$$\frac{V_\perp}{V_o} = 4i^2 \operatorname{erfc}\beta - \frac{4\alpha\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2} + 4\alpha^2\beta^2 \Big[\Big(1+\frac{1}{\alpha}\Big)\operatorname{erfc}\beta \; \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - e^{\left[\left(\beta+\frac{1}{2\alpha\beta}\right)^2-\beta^2\right]} \operatorname{erfc}\Big(\beta+\frac{1}{2\alpha\beta}\Big)\Big]$$

avec $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$ et $\alpha = \frac{a}{d}$ $(a = k/k'/b')$




Schématisation analytique
+(4 l + d)
+ Qo
Ordre 2
+(4 l - d)
- Qo
+(2 l + d)
- Qo
Ordre 1
+(2 l - d)
+ Qo
Configuration schématique
Coteau imperméable
Nappe
l
Puits
d
+(d)
+ Qo
Axe de référence
Ordre 0
Rivière
- (d)
- Qo
-(2 l - d)
- Qo
Ordre 1
- (2 l + 2 d)
+ Qo

Paramètres du problème

- géométrie l
- propriétés hydrodynamiques $\nu = T/S$
- position du puits d

Théorie des images

Le coteau étant imperméable (ligne de flux nul), tout se passe comme s'il était axe de symétrie d'un système homogène infini.

La rivière étant une équipotentielle, tout se passe comme si dans un milieu homogène infini chaque puits à droite de cette ligne avait son symétrique de débit opposé à gauche.

Prenant la rivière comme axe de référence, on dénombre :

P1 :	$+ Q_o (+d)$	puits réel
P2 :	$- Q_o (-d)$	puits image rivière de P1
P3 :	$+ Q_o (2l-d)$	puits image coteau de P1
P4 :	$- Q_o [-(2l-d)]$	puits image rivière de P3
P5 :	$- Q_o (2l+d)$	puits image coteau de P2
P6 :	$+ Q_o [-(2l+d)]$	puits image rivière de P5 etc...

Soit une infinité de puits s'éloignant à l'infini.

1 - On conçoit que tous les puits situés à gauche de l'axe de référence, (c'est-à-dire de la rivière) tous symétriques et de débits opposés à ceux de droite ont pour effet de doubler les influences des puits de droite ;

2 - A droite de l'axe de référence, les puits s'éloignent de l'axe selon les termes de la suite :

d	ordre 0
$2l - d$ $2l + d$	ordre 1

$4\,l - d$ } ordre 2
$4\,l + d$ }
$2\,n\,l \pm d$ ordre n

3 - Selon nos conventions de signe, un débit positif à droite de l'axe de référence correspond à une entrée d'eau dans le système et inversement.

Ordre 0: $\dfrac{Q_\perp}{Q_o} = +\dfrac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\,\dfrac{d}{2\sqrt{\nu\,t}}$

Ordre 1: $\dfrac{Q_\perp}{Q_o} = -\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{erfc}\,\dfrac{2\,l + d}{2\sqrt{\nu\,t}} - \mathrm{erfc}\,\dfrac{2\,l - d}{2\sqrt{\nu\,t}}\right)$

Ordre 2: $\dfrac{Q_\perp}{Q_o} = +\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{erfc}\,\dfrac{4\,l + d}{2\sqrt{\nu\,t}} - \mathrm{erfc}\,\dfrac{4\,l - d}{2\sqrt{\nu\,t}}\right)$

Ordre n : $\dfrac{Q_\perp}{Q_o} = \dfrac{(-1)^n}{2}\left[\mathrm{erfc}\,\dfrac{2\,n\,l + d}{2\sqrt{\nu\,t}} - \mathrm{erfc}\,\dfrac{2\,n\,l - d}{2\sqrt{\nu\,t}}\right]$

4 - Prenant en compte l'influence des puits de gauche et sommant, on trouve :

$$\boxed{\dfrac{Q_\perp}{Q_o} = \mathrm{erfc}\,\dfrac{d}{2\sqrt{\nu\,t}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\mathrm{erfc}\,\dfrac{2\,n\,l + d}{2\sqrt{\nu\,t}} - \mathrm{erfc}\,\dfrac{2\,n\,l - d}{2\sqrt{\nu\,t}}\right]}$$

et

$$\boxed{\dfrac{V_\perp}{V_o} = 4\,i^2\,\mathrm{erfc}\,\dfrac{d}{2\sqrt{\nu\,t}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[4\,i^2\,\mathrm{erfc}\,\dfrac{2\,n\,l + d}{2\sqrt{\nu\,t}} - 4\,i^2\,\mathrm{erfc}\,\dfrac{2\,n\,l - d}{2\sqrt{\nu\,t}}\right]}$$

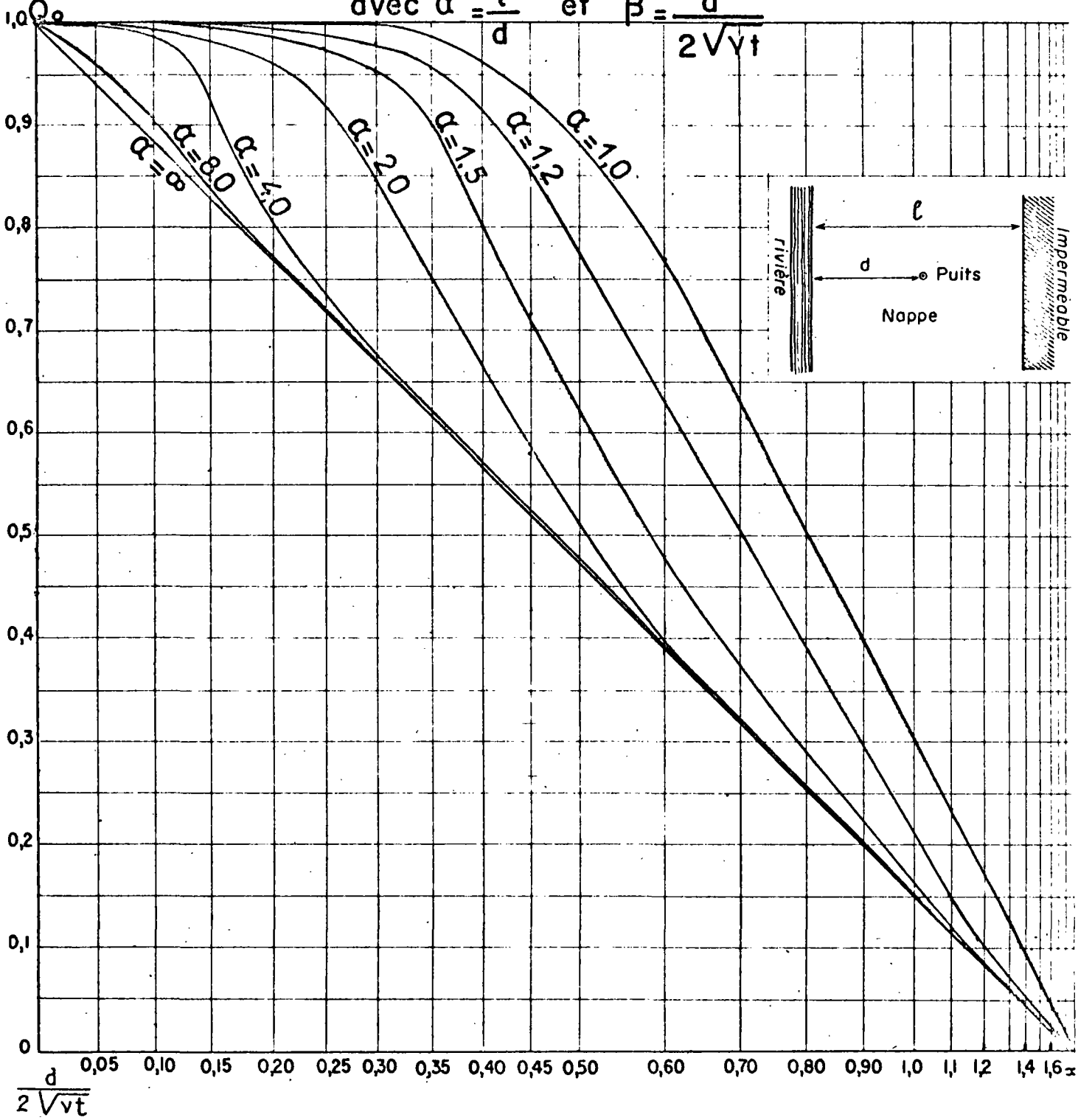
Si l'on appelle $\alpha = \dfrac{l}{d}$ et $\beta = \dfrac{d}{2\sqrt{\nu\,t}}$

il vient : $$\boxed{\dfrac{Q_\perp}{Q_o} = \mathrm{erfc}\,\beta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\mathrm{erfc}\,(2\,n\,\alpha + 1)\,\beta - \mathrm{erfc}\,(2\,n\,\alpha - 1)\,\beta\right]}$$

Abaque n°9 Configuration RP∞ ,NCU, C//

$$\frac{Q_\perp}{Q_0} = \operatorname{erfc}\beta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\operatorname{erfc}(2\alpha n+1)\beta - \operatorname{erfc}(2\alpha n-1)\beta\right]$$

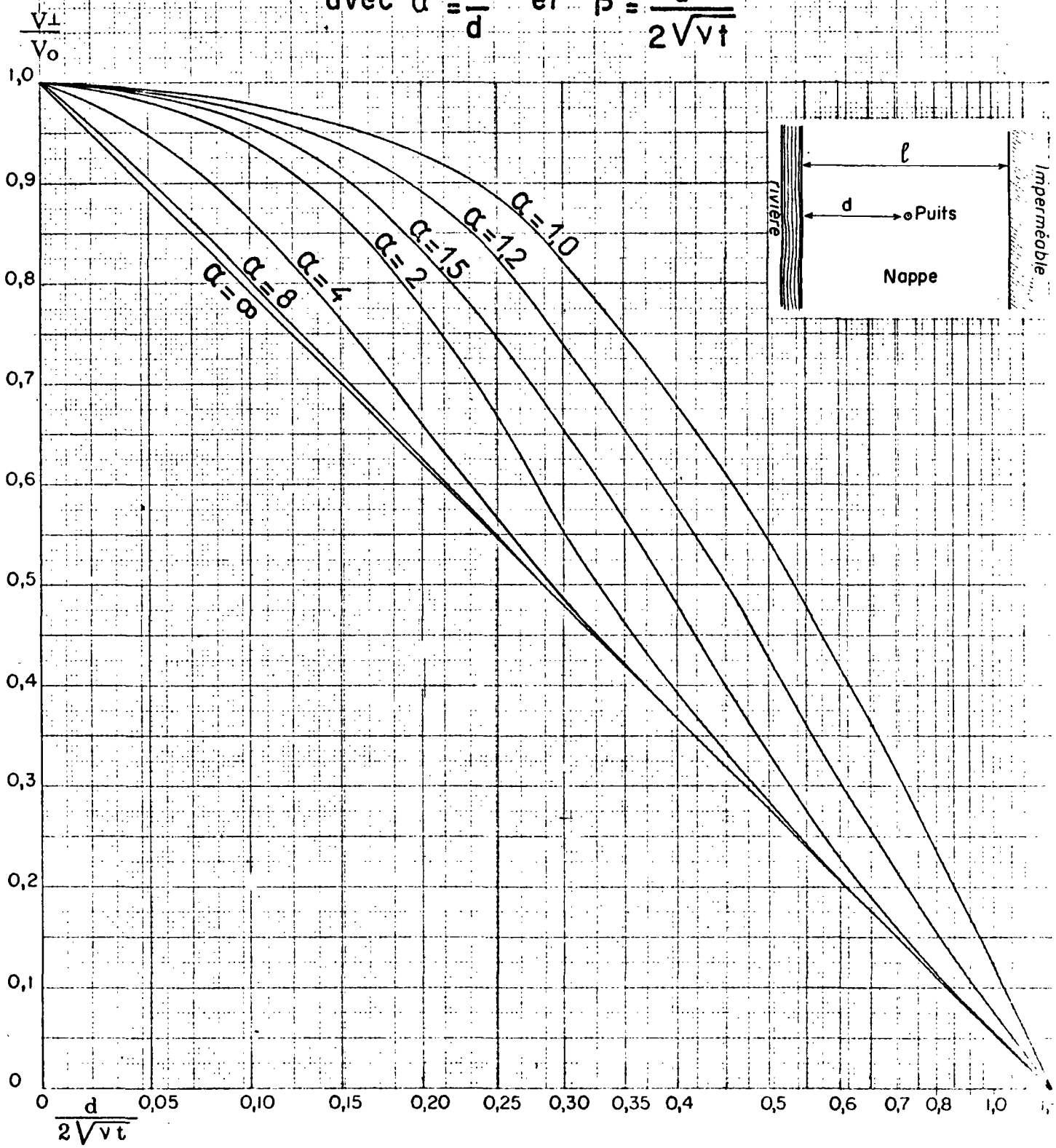
avec $\alpha = \frac{l}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$



Abaque n°10 Configuration RP∞ ,NCU, C//

$$\frac{V_\perp}{V_o} = 4i^2\,\mathrm{erfc}\,\beta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[4i^2\,\mathrm{erfc}(2\alpha n+1)\beta - 4i^2\alpha\,\mathrm{erfc}(2\alpha n-1)\beta\right]$$

avec $\alpha = \frac{\ell}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$



$$\text{et} \quad \boxed{\frac{V_\perp}{V_o} = 4\,i^2 \operatorname{erfc} \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\operatorname{erfc} (2\,n\,\alpha + 1)\,\beta - 4\,i^2 \operatorname{erfc} (2\,n\,\alpha - 1)\,\beta \right]}$$

Les fonctions erfc (u) et $4\,i^2$ erfc (u) ayant été tabulées, les abaques n°9 et 10 en ont été déduites.

3.4 - CONFIGURATION (RP ∞, NCU, C θ)

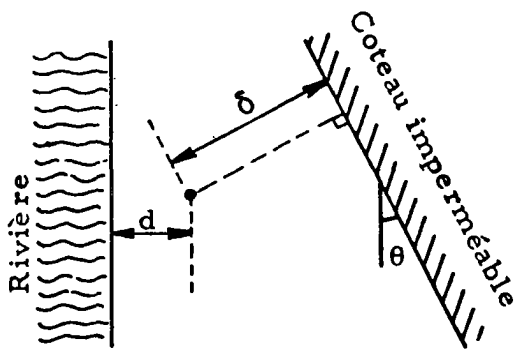
- Hypothèses

Mêmes hypothèses que page 23 mais cette fois :

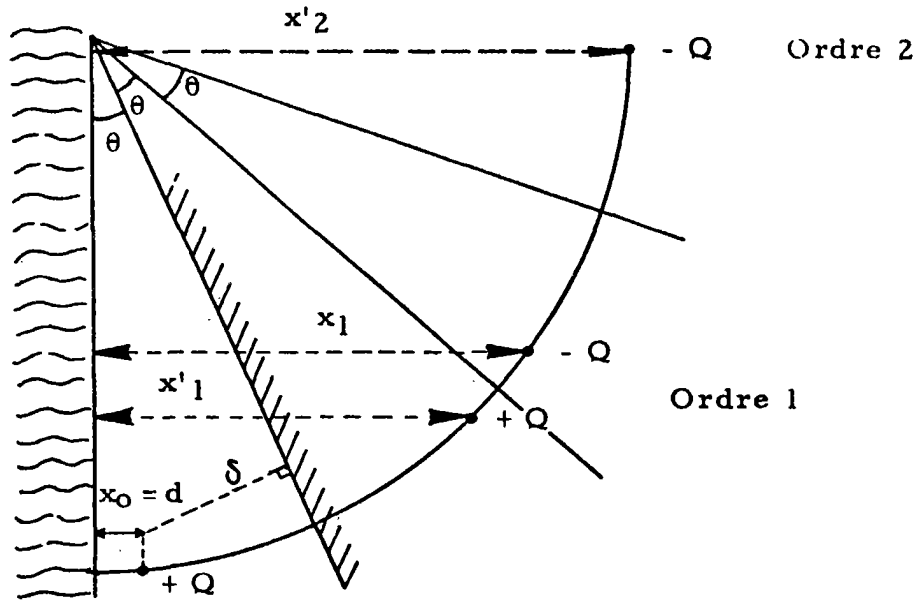
- avec présence d'un coteau imperméable de longueur infinie, formant un angle θ avec la rivière ;

- en supposant que θ est un sous multiple entier de $\frac{\pi}{2}$

soit $\theta = \frac{\pi/2}{p}$



Configuration schématique



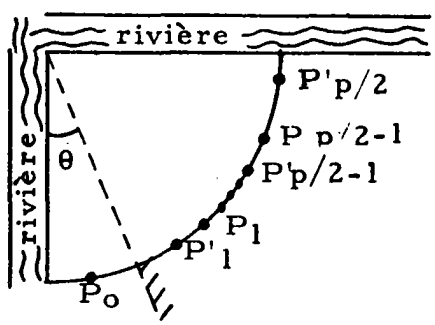
Schématisation analytique

Paramètres du problème

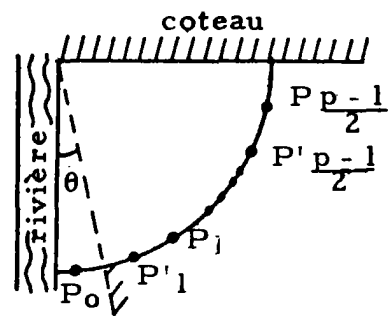
- géométrie θ
- propriétés hydrodynamiques $\nu = T/S$
- position de puits d et δ

Application de la théorie des images

Puisque θ est un sous multiple de $\pi/2$, le problème se ramène aux cas suivants après p-1 symétries :



Si p pair



Si p impair

avec, dans tous les cas, p puits à l'intérieur du cadran.

La solution du problème s'obtient sous la forme :

Si p pair

$$\frac{Q\perp}{Q_o} = M^{*}\left(\frac{X'^{\frac{p}{2}}}{X_o}, \frac{X_o^2}{4\nu t}\right) + (-1)^{\frac{p}{2}-1} M^{*}\left(\frac{X_o}{X'^{\frac{p}{2}}}, \frac{X'^{2\frac{p}{2}}}{4\nu t}\right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\frac{p}{2}-1} (-1)^n \left[M^{*}\left(\frac{X'^{\frac{p}{2}-n}}{X_n}, \frac{X_n^2}{4\nu t}\right) - M^{*}\left(\frac{X^{\frac{p}{2}-n}}{X'_n}, \frac{X'^2_n}{4\nu t}\right)\right]$$

$$\text{et } \frac{V\perp}{V_o} = 2\,C^{*}\left(\frac{X'^{\frac{p}{2}}}{X_o}, \frac{X_o}{2\sqrt{\nu t}}\right) + (-1)^{\frac{p}{2}-1}\, 2\,C^{*}\left(\frac{X_o}{X'^{\frac{p}{2}}}, \frac{X'^{\frac{p}{2}}}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\frac{p}{2}-1} (-1)^n \left[2\,C^{*}\left(\frac{X'^{\frac{p}{2}-n}}{X_n}, \frac{X_n}{2\sqrt{\nu t}}\right) - 2\,C^{*}\left(\frac{X^{\frac{p}{2}-n}}{X'_n}, \frac{X'_n}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right]$$

Les fonctions $M^{*}(\alpha, \beta^2)$ et $C^{*}(\alpha, \beta)$ ont été précédemment tabulées.

S p impair

$$\frac{Q\perp}{Q_o} = \operatorname{erfc}\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} + \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^n \left[\operatorname{erfc}\frac{X_n}{2\sqrt{\nu t}} - \operatorname{erfc}\frac{X'_n}{2\sqrt{\nu t}}\right]$$

$$\text{et } \frac{V\perp}{V_o} = 4\,i^2 \operatorname{erfc}\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} + \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^n \left[4\,i^2 \operatorname{erfc}\frac{X_n}{2\sqrt{\nu t}} - 4\,i^2 \operatorname{erfc}\frac{X'_n}{2\sqrt{\nu t}}\right]$$

Les fonctions erfc (u) et $4\,i^2$erfc (u) ont été précédemment tabulées.

En outre,

$$X_n = d \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{p}}{\sin \frac{\pi}{2p}} \left(\frac{\delta}{d} + \cos \frac{\pi}{2p} \right) + \cos \frac{n\pi}{p} \right]$$

et $$X'_n = d \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{p}}{\sin \frac{\pi}{2p}} \left(\frac{\delta}{d} + \cos \frac{\pi}{2p} \right) - \cos \frac{n\pi}{p} \right]$$

On constate que $\frac{Q\perp}{Q_o}$ et $\frac{V\perp}{V_o}$ sont des fonctions de $\alpha = \frac{\delta}{d}$, $\beta = \frac{d}{2\sqrt{V t}}$, θ

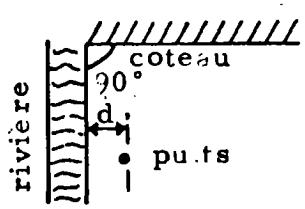
On peut donc représenter ces fonctions sous forme d'abaques pour des valeurs particulières de θ soit:

$\frac{Q\perp}{Q_o}$ $(\alpha, \beta, \theta = \theta o)$

$\frac{V\perp}{V_o}$ $(\alpha, \beta, \theta = \theta o)$

Configuration (R P∞, N C U, C $\theta = \pi/2$)

Application au cas p = 1



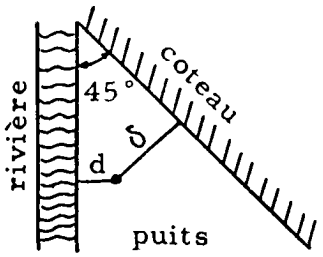
$\frac{Q\perp}{Q_o} = \text{erfc} \frac{d}{2\sqrt{V t}}$	
$\frac{V\perp}{V_o} = 4 i^2 \text{erfc} \frac{d}{2\sqrt{V t}}$	

Donc, une barrière perpendiculaire à la rivière (limitant par là la longueur "influencée" de rivière) n'intervient pas dans le calcul des débits soutirés à la rivière. Tout se passe dans ce cas comme si la rivière était illimitée.

(Les abaques n°5 et 6, précédemment tracées, correspondent donc également à cette configuration).

Configuration (R P ∞, N C U, C $\theta = \pi/4$)

Application au cas p = 2



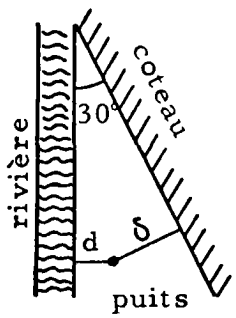
$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{\delta}{d} + 1\right)\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} \,.\, \mathrm{erf}\,\frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$$

$$\frac{V_\perp}{V_o} = 1 - S^{*}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{\delta}{d}+1\right)\frac{d}{2\sqrt{\nu t}}\;,\;\frac{d}{2\sqrt{\nu t}}\right]$$

Les fonctions erf (u) et S^{*} (u, v) ayant été tabulées, les abaques n°11 et 12 en ont été déduites.

Configuration (R P ∞, N C U, C $\theta = \pi/6$)

Application au cas p = 3



$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = \mathrm{erfc}\,\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} + \mathrm{erfc}\left(\sqrt{3}\,\frac{\delta}{d}+1\right)\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} - \mathrm{erfc}\left(\sqrt{3}\,\frac{\delta}{d}+2\right)\frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$$

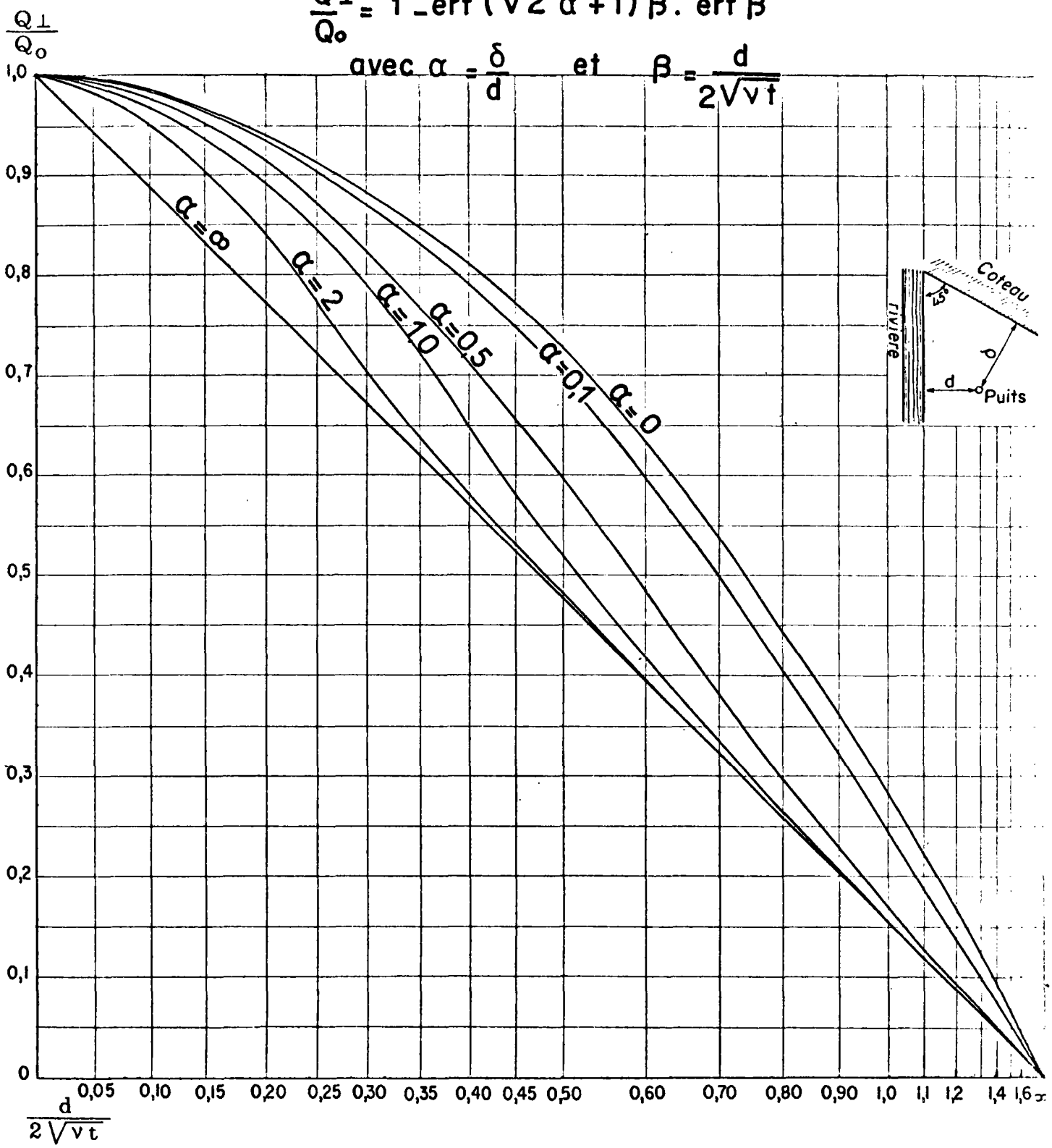
$$\frac{V_\perp}{V_o} = 4\,i^2\,\mathrm{erfc}\,\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} + 4\,i^2\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{3}\,\frac{\delta}{d}+1\right)\frac{d}{2\sqrt{\nu T}} - 4\,i^2\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{3}\,\frac{\delta}{d}+2\right)\frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$$

Les fonctions erfc (u) et $4\,i^2$ erfc (u) ayant été tabulées, les abaques n°13 et 14 en ont été déduites.

Abaque n°11 Configuration RP∞ ,NCU, C π/4

$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = 1 - \mathrm{erf}\,(\sqrt{2}\,\alpha + 1)\,\beta \,.\, \mathrm{erf}\,\beta$$

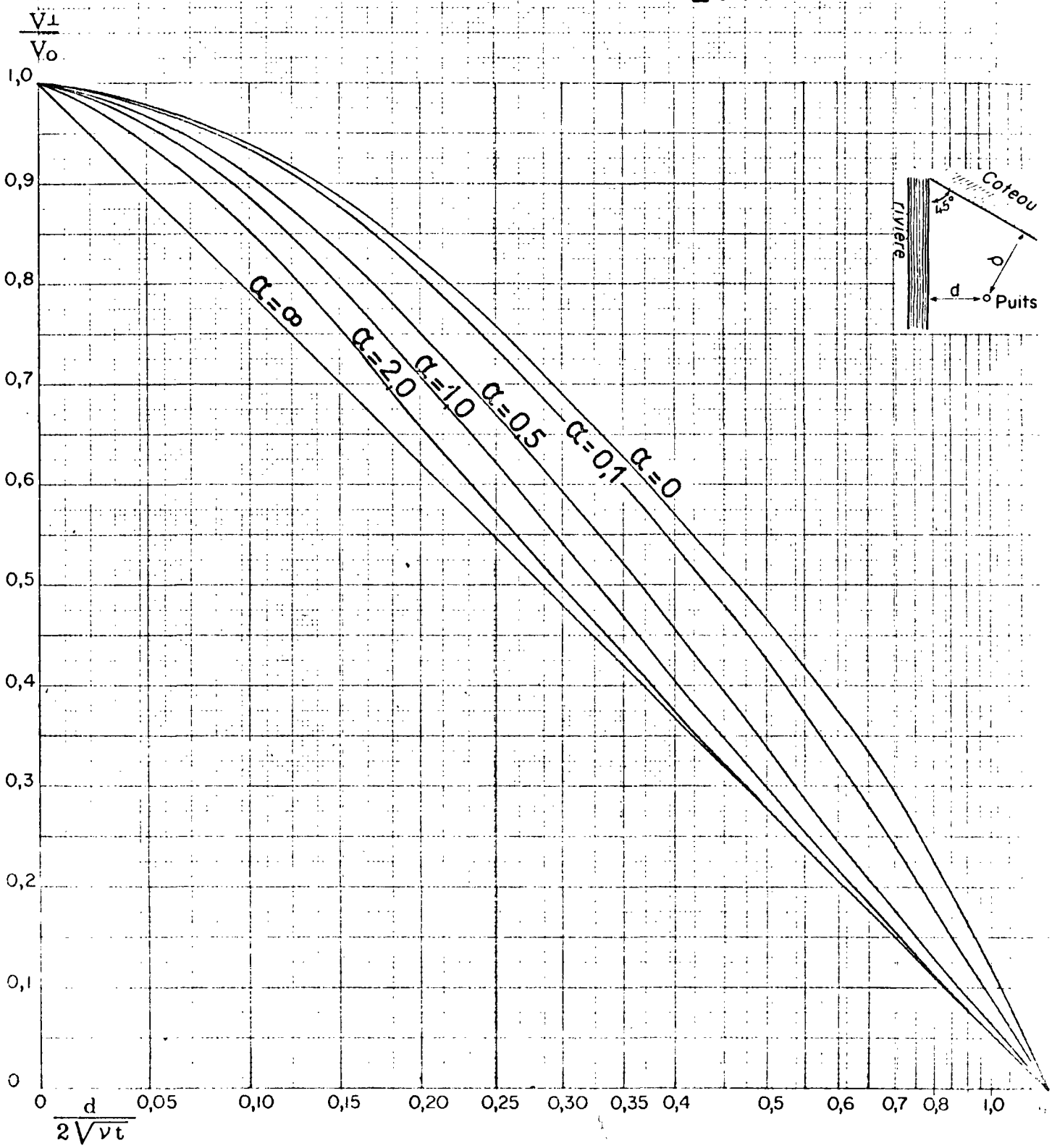
avec $\alpha = \frac{\delta}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{vt}}$



Abaque n°12 Configuration RP_∞, NCU, C $\pi/4$

$$\frac{V_\perp}{V_o} = 1 - S^*\left[(\sqrt{2}\,\alpha + 1)\beta, \beta\right]$$

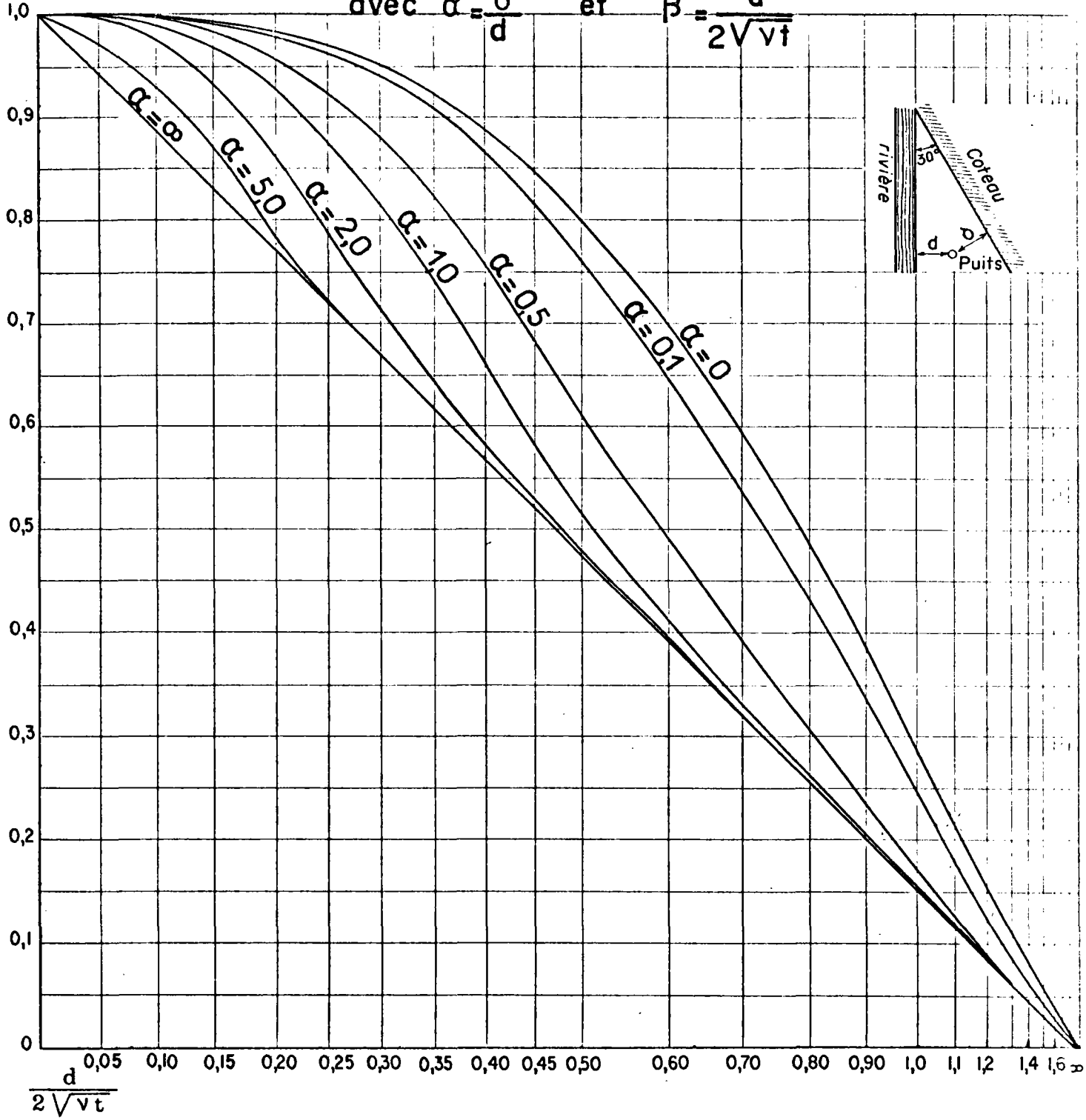
avec $\alpha = \frac{\delta}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$



Abaque n° 13 Configuration RP∞ ,NCU,C π/6

$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = \text{erfc}\ \beta + \text{erfc}(\sqrt{3}\,\alpha + 1)\,\beta - \text{erfc}(\sqrt{3}\,\alpha + 2)\,\beta$$

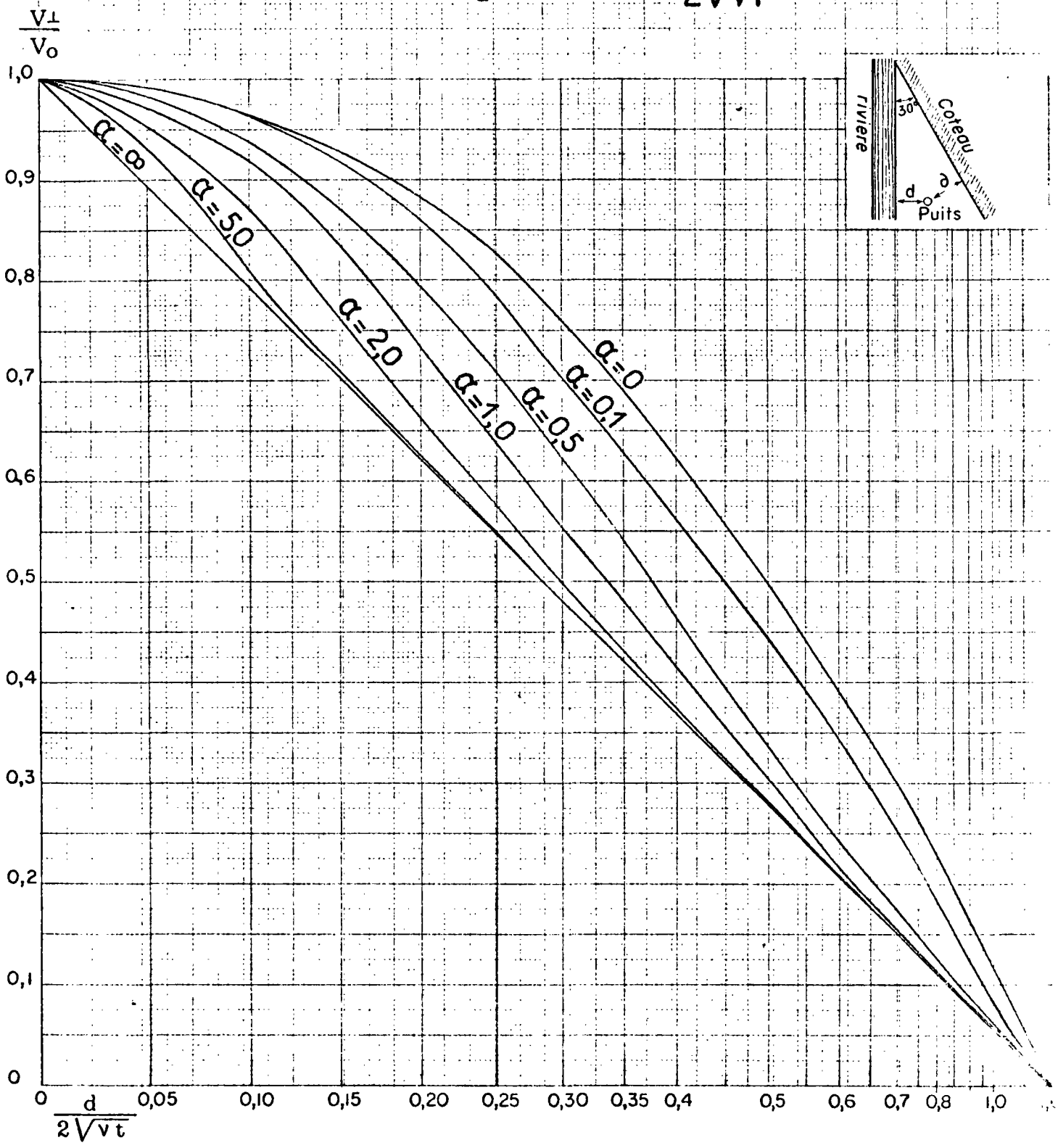
avec $\alpha = \frac{\delta}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{vt}}$



Abaque n°14 Configuration RP∞ ,NCU, C π/6

$$\frac{V_\perp}{V_o} = 4i^2 \operatorname{erfc} \beta + 4i^2 \operatorname{erfc}(\sqrt{3}\,\alpha+1)\beta - 4i^2 \operatorname{erfc}(\sqrt{3}\,\alpha+2)\beta$$

avec $\alpha = \frac{\delta}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{vt}}$

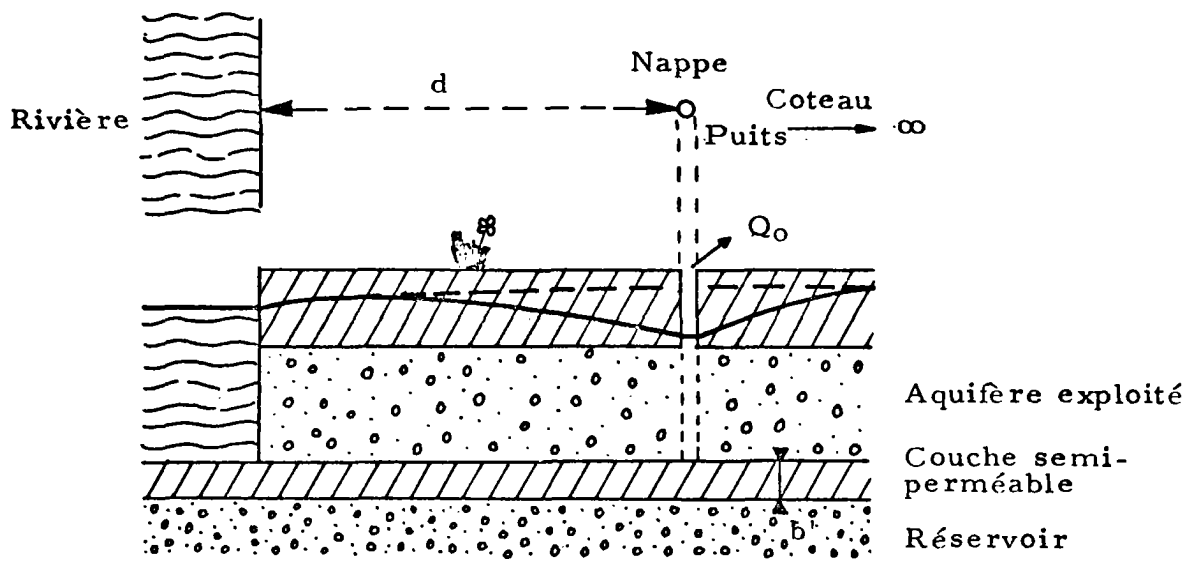


3.5 - CONFIGURATION (RP∞ , NCH, C∞)

- Hypothèses

Mêmes hypothèses que page 23, avec en plus :

- présence d'une couche semi-perméable séparant l'aquifère exploité d'un réservoir de grande capacité vis-à-vis des volumes pompés (les fluctuations de potentiels dans l'aquifère exploité étant supposées n'introduire aucune perturbation sur le potentiel de ce réservoir).



Configuration schématique

Paramètres du problème

- géométrie : b' épaisseur de la couche semi-perméable
- propriétés hydrodynamyques : - de l'aquifère exploité $\nu = T/S$
  - de la couche semi-perméable

$$B = \sqrt{T/K'/b'}$$

(avec K' perméabilité de la couche et T transmissivité de l'aquifère exploité)

- position du puits d.

Les calculs conduisent à :

$$\frac{Q\perp}{Q_o} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{d}{B}} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} + \frac{\sqrt{\nu t}}{B}\right) + e^{-\frac{d}{B}} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} - \frac{\sqrt{\nu t}}{B}\right)\right]$$

Soit en faisant $\frac{B}{d} = \alpha$ et $\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} = \beta$

$$\boxed{\frac{Q\perp}{Q_o} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) + e^{-\frac{1}{\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)\right]}$$

et $$\boxed{\frac{V\perp}{V_o} = \left(\alpha\beta^2 + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) - \left(\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)}$$

La fonction erfc (u) ayant été tabulée, les abaques n°15 et 16 en ont été déduites.

3.6 - CONFIGURATION (RP ∞, NC V)

- Hypothèses

Mêmes hypothèses que page 23 mais cette fois l'épaisseur de la couche exploitée diminue exponentiellement lorsque l'on s'éloigne de la rivière (ou ce qui revient au même la transmissivité de la couche supposée homogène).

Soit $b(x) = b_o\, e^{-\frac{x}{a}}$ ou si $K = cte$ (pour tout x, y)

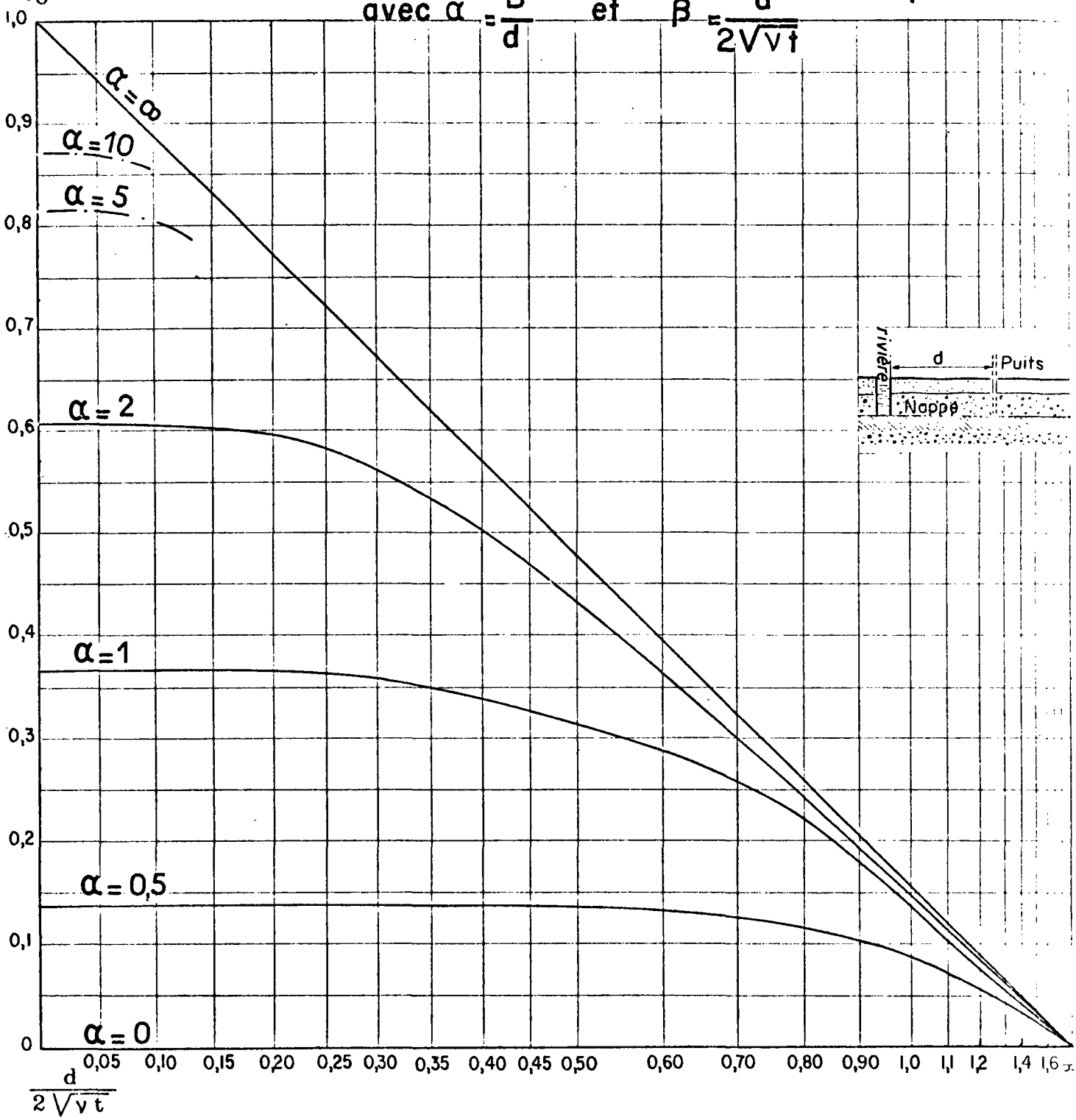
$$T(x) = b(x)\, K$$

$$= b_o\, K\, e^{-\frac{x}{a}}$$

Abaque n°15 Configuration RP∞ ,NCH, C∞

$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = \frac{1}{2}\left[e^{1/\alpha}\,\mathrm{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) + e^{-1/\alpha}\,\mathrm{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)\right]$$

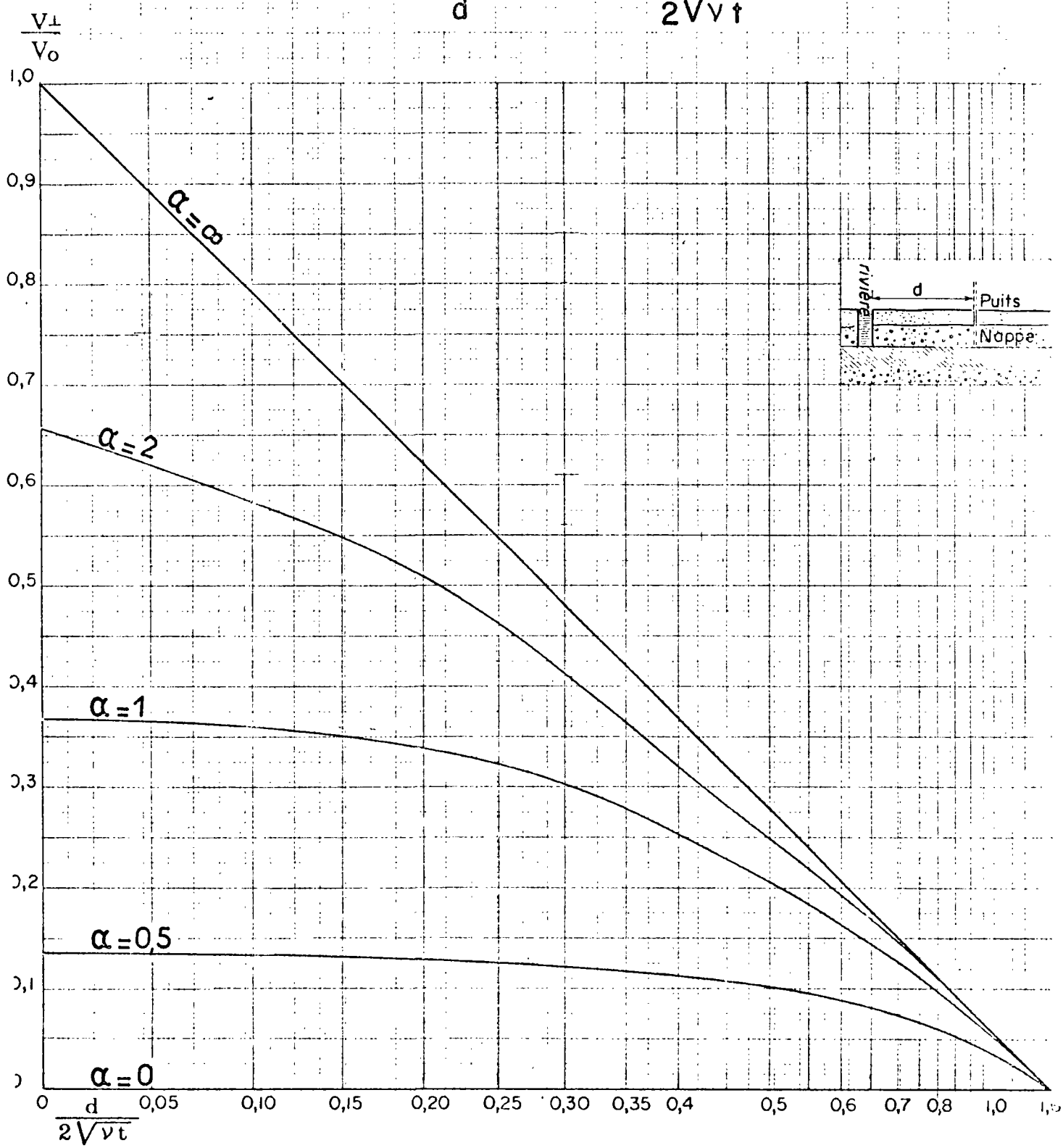
avec $\alpha = \frac{B}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{vt}}$

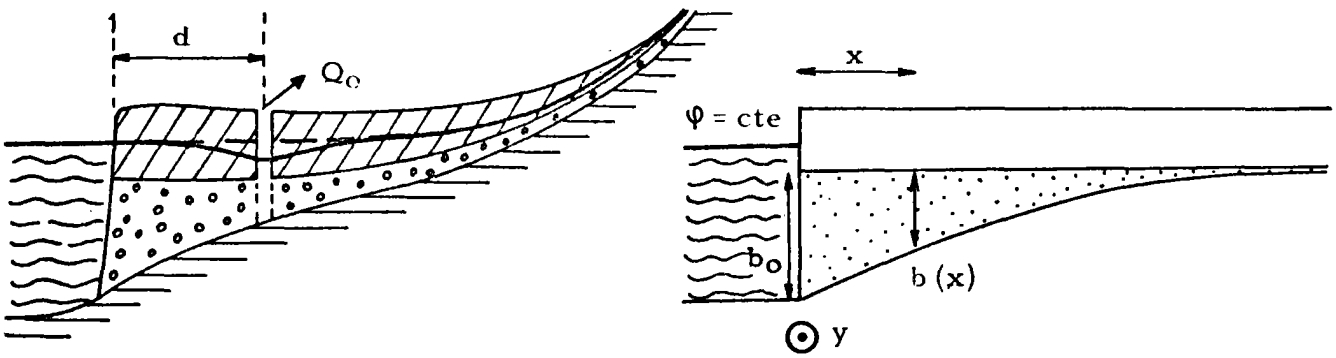


Abaque n°16 Configuration RP∞ ,NCH, C∞

$$\frac{V_\perp}{V_o} = \left(\alpha\beta^2 + \frac{1}{2}\right)e^{1/\alpha}\,\mathrm{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) - \left(\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-1/\alpha}\,\mathrm{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)$$

avec $\alpha = \frac{B}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$





Configuration schématique Schématisation analytique

Exemples :

L'épaisseur d'un sable homogène peut varier conformément au schéma ci-dessus ou la fissuration d'un banc calcaire peut rapidement augmenter aux abords du lit d'une rivière.

Paramètres du problème

- géométrie : a indice de variation de l'épaisseur de la couche

$$a = \frac{x}{\text{Log.}\ \frac{b\ (x)}{b\ (x = o)}}$$

- propriétés hydrodynamiques de la couche $\varphi = T/S$
- position du puits d

Les calculs conduisent à :

$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} + \frac{\sqrt{\nu t}}{a}\right) + e^{-\frac{2d}{a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} - \frac{\sqrt{\nu t}}{a}\right)\right]$$

ou $$\boxed{\frac{Q_\perp}{Q_o} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) + e^{-\frac{2}{\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)\right]}$$

avec $\alpha = \frac{a}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$

De même, on trouve avec les mêmes notations :

$$\boxed{\frac{V_\perp}{V_o} = \left(\alpha\beta^2 + \frac{1}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) - \left(\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{2}{\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)}$$

La fonction erfc (u) ayant été tabulée, les abaques n°17 et 18 en ont été déduites.

<u>Remarque</u> : Les formules précédentes ne sont valables que si :

$$\left| \frac{d\,(b\,(x))}{d\,x} \right| = \frac{2\,b\,(x)}{a} \leqslant 0,2$$

Soit, a fortiori : $\boxed{d \geqslant 10\, b_o}$

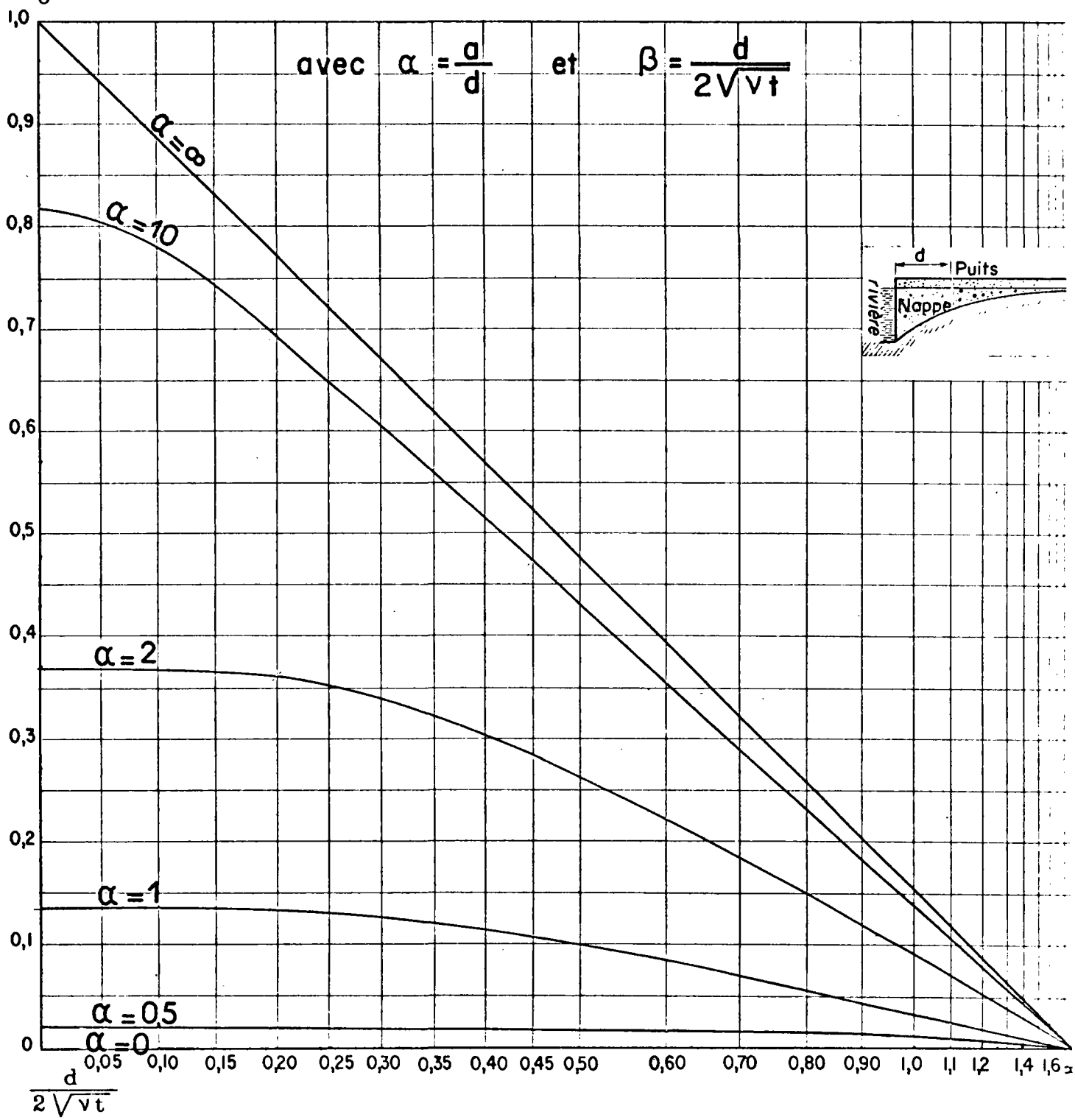
3.7 - CONFIGURATION COMPRENANT une NAPPE à SURFACE LIBRE à SUBSTRATUM INCLINE (NLJ)

- Hypothèses

- Couche homogène et isotrope ;
- Substratum de pente uniforme J (la ligne de plus grande pente étant normale à la rivière) ;
- Rivière atteignant le substratum, à contact parfait avec l'aquifère.

Abaque n° 17 Configuration RP∞ , NCV

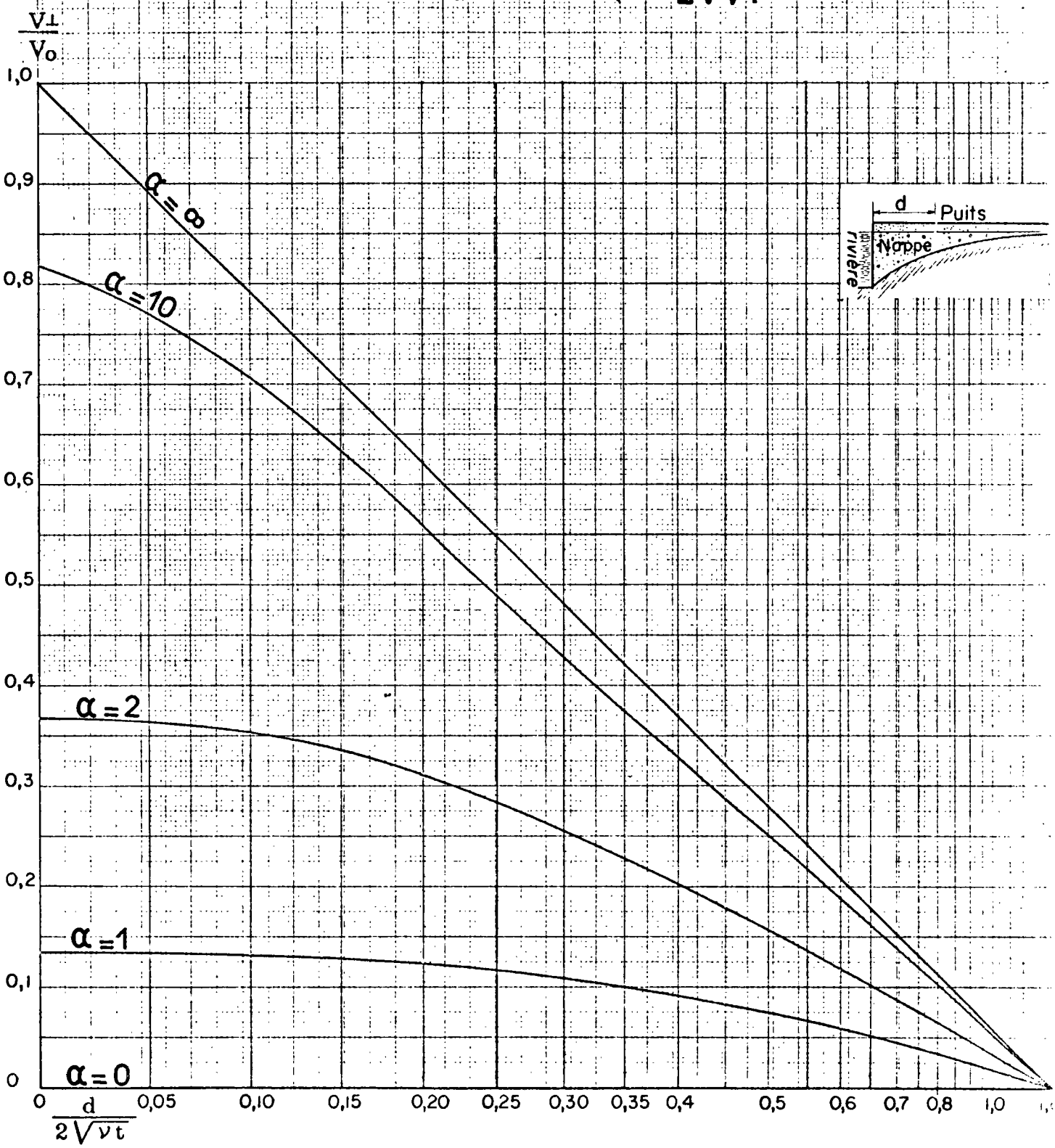
$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) + e^{-2/\alpha}\operatorname{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)\right]$$

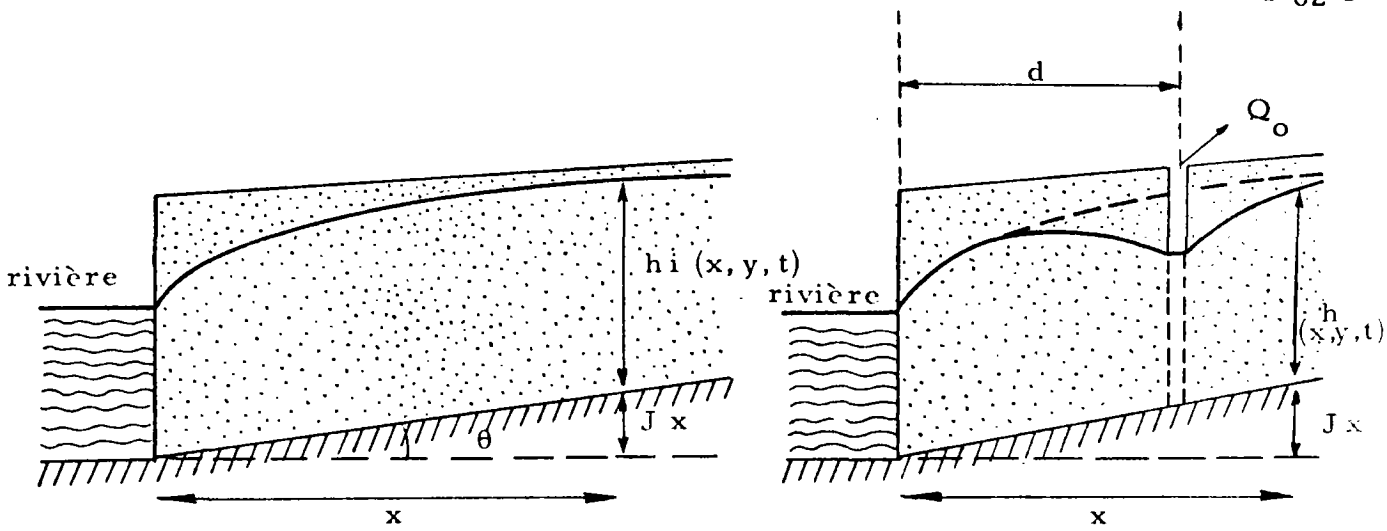


Abaque n° 18 Configuration RP∞ , NCV

$$\frac{V_\perp}{V_o} = \left(\alpha\beta^2 + \frac{1}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) - \left(\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-2/\alpha} \operatorname{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)$$

avec $\alpha = \frac{a}{d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$





Etat non perturbé — Etat perturbé par un pompage

Schématisation analytique (avec J = tg θ)

On montre que l'essentiel des résultats théoriques précédents est applicable au cas des nappes à surface libre sous réserve que les mouvements de la surface libre ne soient pas trop importants.

Premières extensions

Lorsque J = 0, les formules donnant la répartition des potentiels en nappe captive sont identiques à celles obtenues en nappe libre si l'on prend soin de remplacer $h_i^2 - \bar{h}^2$ par $2\bar{h}(\varphi i - \varphi)$.

On constate alors que des débits $\frac{Q\perp}{Qo}$ et les volumes $\frac{V\perp}{Vo}$ sont donnés par des formules identiques.

Par conséquent, les configurations :

RPF, NCU, C∞ et RPF, NLO, C∞

RP π/2, NCU, C∞ et RP π/2, NLO, C∞

RI∞, NCU, C∞ et RI∞, NLO, C∞

RP∞, NCU, C // et RP∞, NLO, C //

RP∞, NCU, C θ et RP∞, NLO, C θ

conduisent à des résultats respectivement identiques.

Secondes extensions

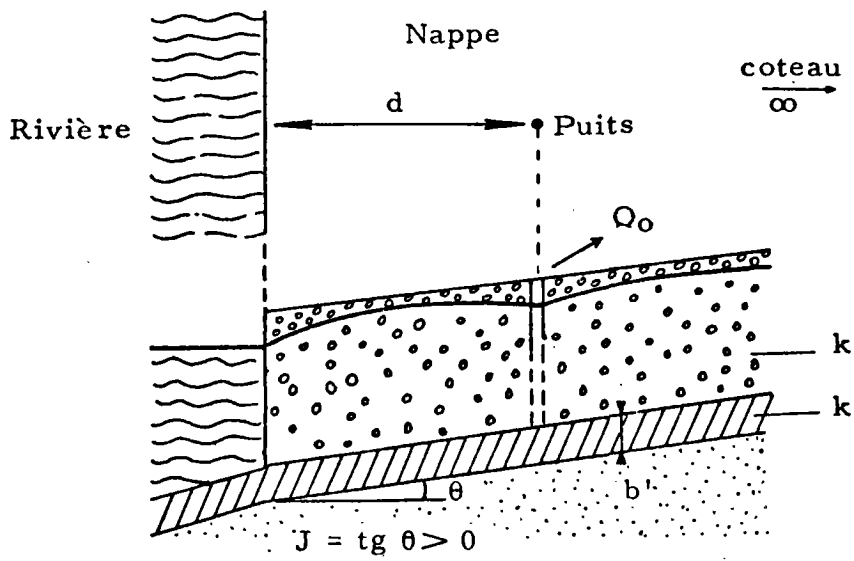
Lorsque $J \neq o$, la pente J intervient systématiquement sous la forme d'un paramètre ; tout problème correspondant à des configurations des types RP∞, NLJ, C // ou RP∞, NLJ, C θ par exemples, implique d'étudier $\frac{Q\perp}{Qo}$ et $\frac{V\perp}{V_o}$ en fonction de $\frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$, J, $\frac{1}{d}$ ou $\frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$, J, $\frac{\delta}{d}$, θ respectivement ; il n'est donc plus question de construire des abaques lorsque trois paramètres ou plus doivent êtrepris en compte et il est nécessaire de ne considérer que des problèmes particuliers (tels que $J = J_o$, $\theta = \theta_o$ par exemple).

Configuration (RP∞, NLJH, C∞)

- Hypothèses

- La rivière de longueur droite relativement grande recoupe entièrement l'aquifère exploité ;
- L' aquifère exploité est homogène et isotrope ;
- L'écoulement s'effectue à surface libre ;
- Une couche semi-perméable de pente uniforme J (dont la ligne de plus grande pente est normale à la rivière) sépare cet aquifère d'un réservoir dont les potentiels ne sont pas influencés par les mouvements de la surface libre ;

- Nous supposons, en outre, que la pente J est faible ($J \leqslant 0,02$), que la surface libre ne varie pas beaucoup (hauteur mouillée moyenne $h_m = \frac{h_i + h}{2} \simeq$ constante) et que le rabattement au puits n'est pas trop important : ($h_i - h_o \leqslant \frac{h_i}{2}$)



Configuration schématique

Paramètres du problème

- géométrie : h m, hauteur mouillée moyenne
  J, pente du substratum semi-perméable ;

- propriétés hydrodynamiques : - de l'aquifère exploité $V = \frac{K}{Ss}$
  - de la couche semi-perméable $B = \sqrt{\frac{K\ hm}{K'/b'}}$

- position du puits : d

Les calculs conduisent aux expression suivantes :

$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = \frac{1}{2}\, e^{\frac{dJ}{2\,\bar{h}m}} \left[e^{d\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,\bar{h}m^2}}} \,.\, \mathrm{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} + \sqrt{\nu t}\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,\bar{h}m^2}} \right) \right.$$

$$\left. + e^{-d\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,\bar{h}m^2}}} \,.\, \mathrm{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} - \sqrt{\nu t}\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,hm^2}} \right) \right]$$

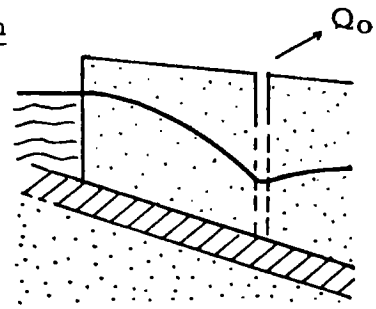
$$\text{et } \frac{V_\perp}{V_o} = \frac{e^{\frac{d\,J}{2\,\bar{h}m}}}{2\sqrt{\nu t}\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,\bar{h}m^2}}} \left[\left[\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} + \sqrt{\nu t}\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,\bar{h}m^2}} \right] \right.$$

$$e^{d\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,\bar{h}m^2}}} \mathrm{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} + \sqrt{\nu t}\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,\bar{h}m^2}} \right)$$

$$- \left[\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} - \sqrt{\nu t}\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,\bar{h}m^2}} \right] e^{-d\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,\bar{h}m^2}}}$$

$$\left. .\,\mathrm{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} - \sqrt{\nu t}\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{J^2}{4\,\bar{h}m^2}} \right) \right]$$

Première extension



Nous avions supposé $J > 0$ (la nappe domine la rivière) ; dans le cas inverse, (physiquement peu probable) les expressions précédentes sont utilisables à condition d'affecter J d'un signe négatif.

Seconde extension

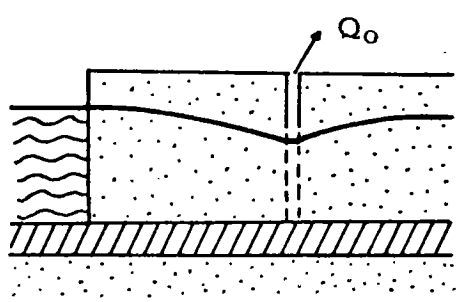
Supposons que la ligne de plus grande pente du substratum semi-perméable, que nous avions supposé précédemment normale à la rivière, lui soit maintenant parallèle : la rivière et la nappe s'écoulent parallèlement sur le substratum incliné selon le sens d'écoulement de la rivière ; dans ce cas tout se passe, du point de vue des échanges entre nappe et rivière, comme si le substratum était horizontal, soit : $J = 0$.

Configuration (RP ∞. NLH, C ∞)

Cas particulier 1

Faisons $J = 0$: substratum horizontal ou bien de pente uniforme selon le sens d'écoulement de la rivière.

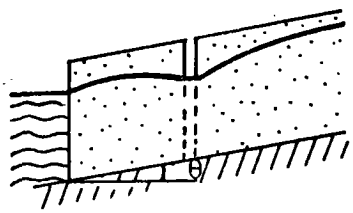
Selon une coupe verticale perpendiculaire à la rivière et passant par le puits, la configuration peut être schématisée ainsi :



Si l'on fait J = 0 dans les expressions de $\frac{Q\perp}{Q_o}$ et $\frac{V\perp}{V_o}$ précédentes, on retrouve les expressions de $\frac{Q\perp}{Q_o}$ et de $\frac{V\perp}{V_o}$ correspondant à la configuration RP∞, NCH, C∞

Donc, les configurations (RP∞, NLH, C∞) et (RP∞, NCH, C∞) conduisent là encore à des résultats identiques

Cas particulier 2 Configuration (RP∞, NLJ, C∞)



$J = t_g\ \theta$

Nous supposons maintenant le substratum imperméable et incliné (la pente selon la direction de la rivière étant $J \leq 0,02$).

Les quantités $\frac{Q\perp}{Q_o}$ et $\frac{V\perp}{V_o}$ s'obtiennent à partir des expressions précédentes en faisant $K'\ b' = 0$ soit $\frac{1}{B} = 0$

D'où $$\boxed{\frac{Q\perp}{Q_o} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{2}{\alpha}}\ \mathrm{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) + \mathrm{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)\right]}$$

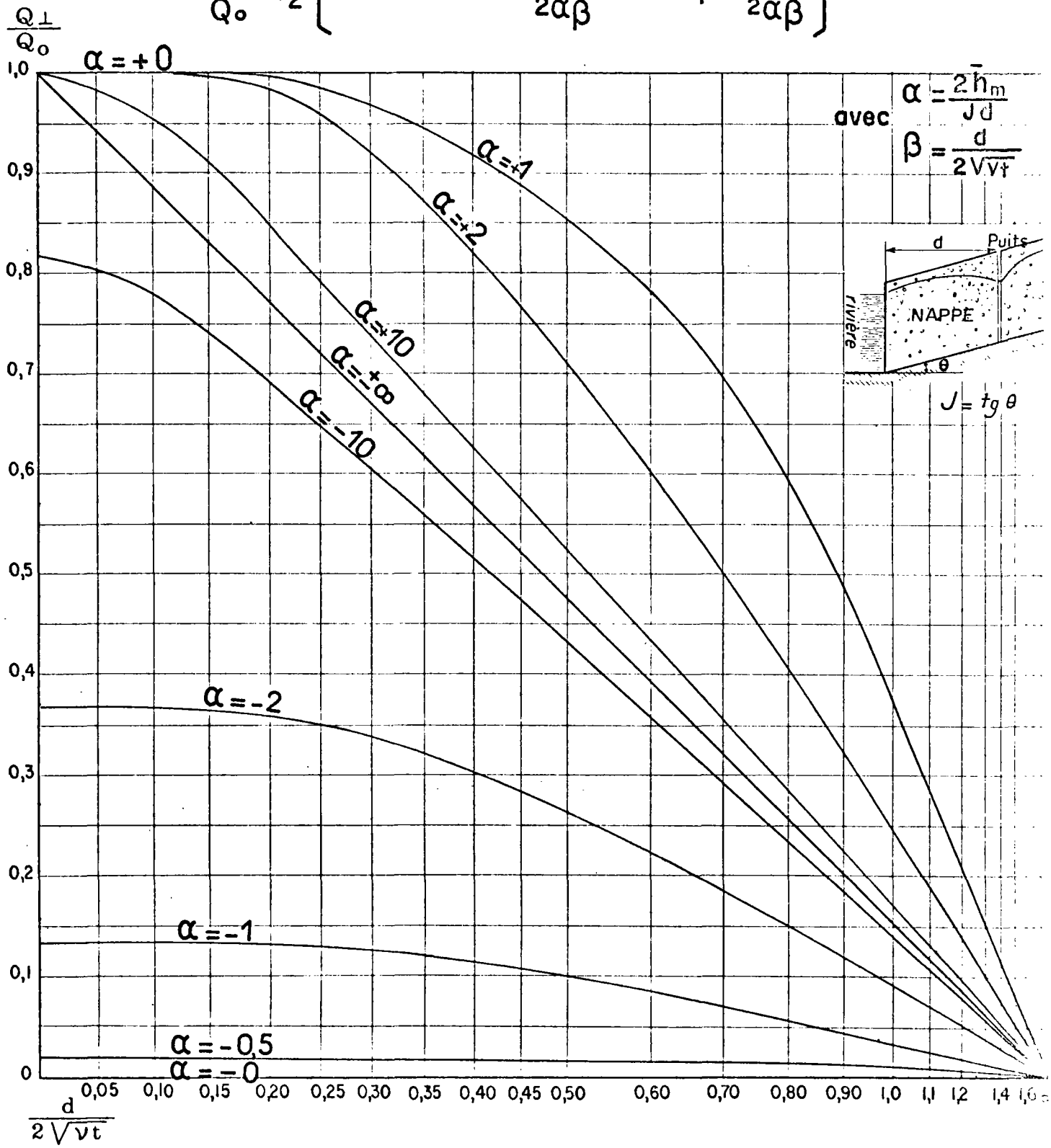
avec $\alpha = \frac{2\,\bar{h}m}{J\,d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$

et $$\boxed{\frac{V\perp}{V_o} = \left(\alpha\beta^2 + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{2}{\alpha}}\ \mathrm{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) - \left(\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)}$$

La fonction erfc (u) ayant été tabulée, les abaques n°19 et 20 en ont été déduites.

Abaque n°19 Configuration RP∞, ,NL J, C∞

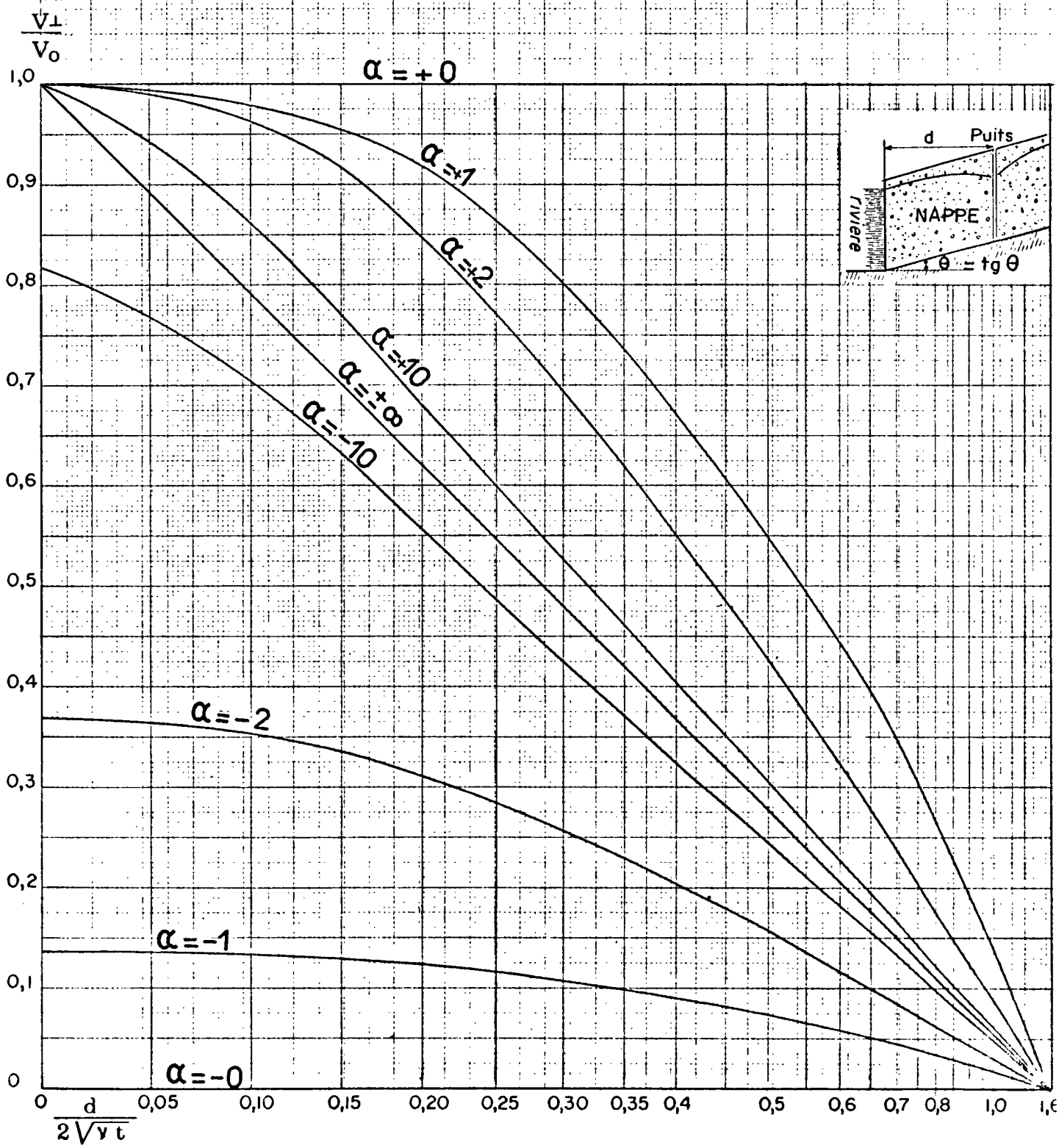
$$\frac{Q_\perp}{Q_o} = \frac{1}{2}\left[e^{2/\alpha}\ \mathrm{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) + \mathrm{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)\right]$$



Abaque n° 20 Configuration RP∞, NLJ, C∞

$$\frac{V_\perp}{V_o} = \left(\alpha\beta^2 + \frac{1}{2}\right) e^{2/\alpha} \operatorname{erfc}\left(\beta + \frac{1}{2\alpha\beta}\right) - \left(\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\right) . \operatorname{erfc}\left(\beta - \frac{1}{2\alpha\beta}\right)$$

avec $\alpha = \frac{2h_m}{J.d}$ et $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$

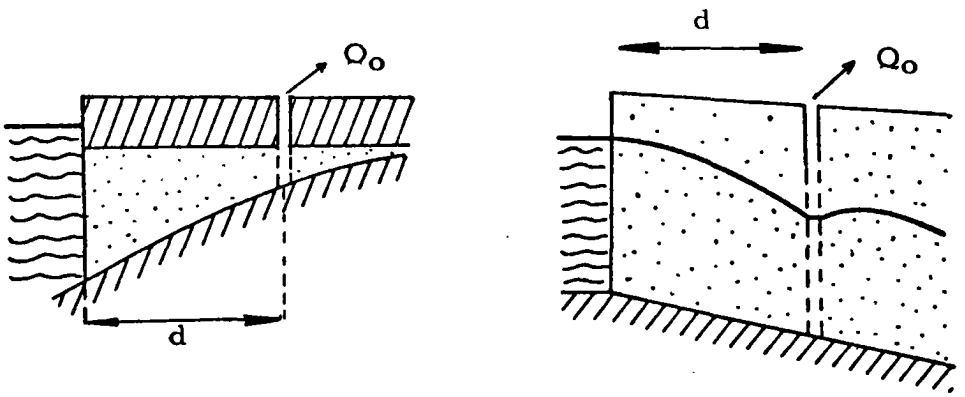


Remarques :

1 - La méthode ne s'applique que pour $|J| \leqslant 0,02$
c'est-à-dire pour : $|\alpha| \geqslant \frac{100 \text{ hm}}{d}$

2 - Si l'on change α en $-\alpha$ on retrouve les résultats de la configuration particulière (RP∞, NCV) étudiée page 55.

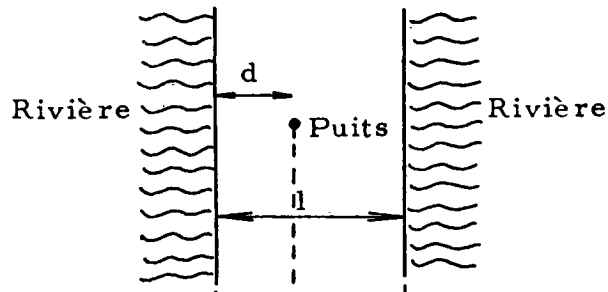
Or changer J en - J revient à changer α en $-\alpha$ par conséquent les configuration (RP∞, NL (J<0) C∞) et (RP∞, NCV) conduisent à des résultats identiques.



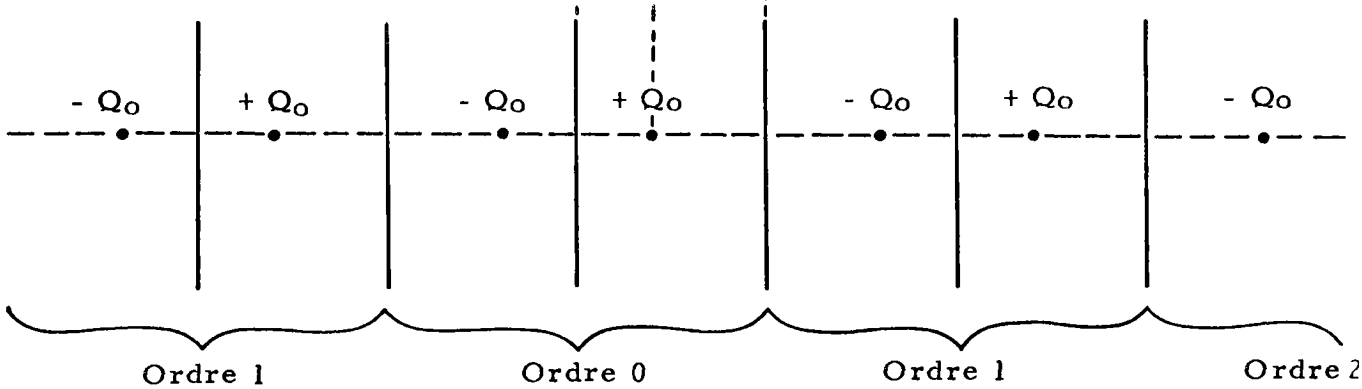
3.8 - CONFIGURATIONS dans LESQUELLES le "COTEAU" est REMPLACE par une SECONDE "RIVIERE"

Etude de la configuration (RP∞, NCU ou NLO, RP∞ //)

Ce problème est identique à celui traité page 37, la seule différence résidant dans la présence d'une rivière droite de longueur infinie à la place du coteau imperméable (les contacts entre nappe et rivières étant supposés parfaits).



Configuration schématique



Schématisation analytique

Dans ce cas les images du puits réel portent alternativement les signes + et - ;

A l'ordre n, nous avons :

- à la distance + (2 n l + d) un puits image de débit (+ Q)
- à la distance - (2 n l + d) un puits image de débit (- Q)
- à la distance + (2 n l - d) un puits image de débit (- Q)
- à la distance - (2 n l + d) un puits image de débit (+ Q)

On constate immédiatement qu'avec les mêmes notations, il vient :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{Q_\perp}{Q_o} &= \operatorname{erfc}\beta + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{erfc}(2n\alpha+1)\beta - \operatorname{erfc}(2n\alpha-1)\beta \\ \frac{V_\perp}{V_o} &= 4i^2\operatorname{erfc}\beta + \sum_{n=1}^{\infty} 4i^2\operatorname{erfc}(2n\alpha+1)\beta - 4i^2\operatorname{erfc}(2n\alpha-1)\beta \end{aligned}}$$

Les fonctions erfc (u) et $4i^2$erfc (u) ayant été tabulées, les abaques n°21 et 22 en ont été déduites.

Nota : On pourrait de même étudier simplement les configurations (RP∞, NCU ou NLO, RP∞ θ) à partir de l'étude de la page 45.

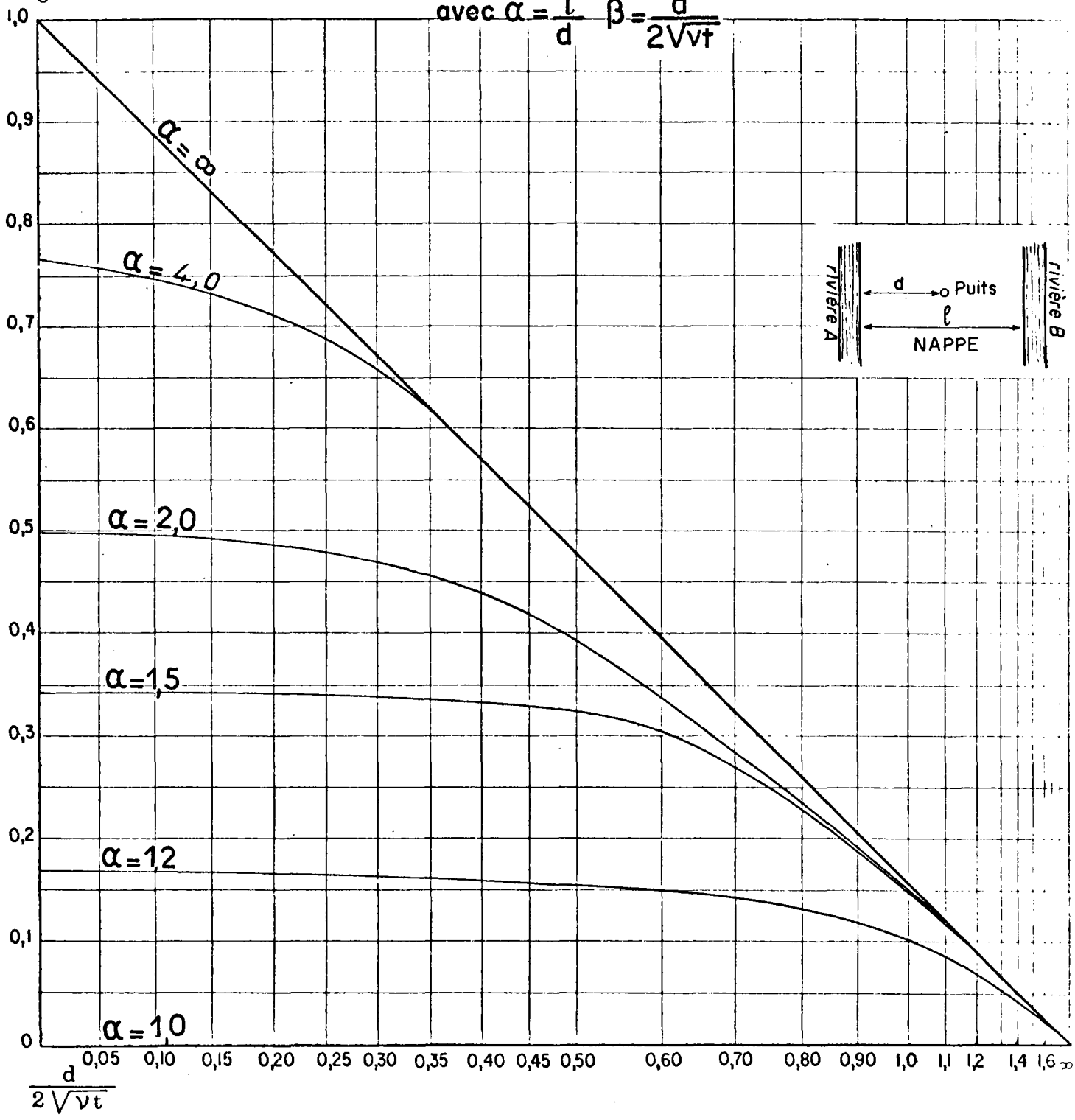
Remarque concernant la précision du tracé des abaques précédents

Les abaques précédents ayant été tracés à partir de calculs manuels (machine à calculer mécanique), leur précision est vraisemblablement insuffisante. Ces abaques pourraient être tracés avec précision après quelques passages sur ordinateur.

Abaque n°21 Configuration RP∞, NCU ou NLO, RP∞ //

$$\frac{Q_{\perp A}}{Q_o} = \operatorname{erfc}\beta - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{erfc}(2n\alpha - 1)\beta \;-\; \operatorname{erfc}(2n\alpha + 1)\beta$$

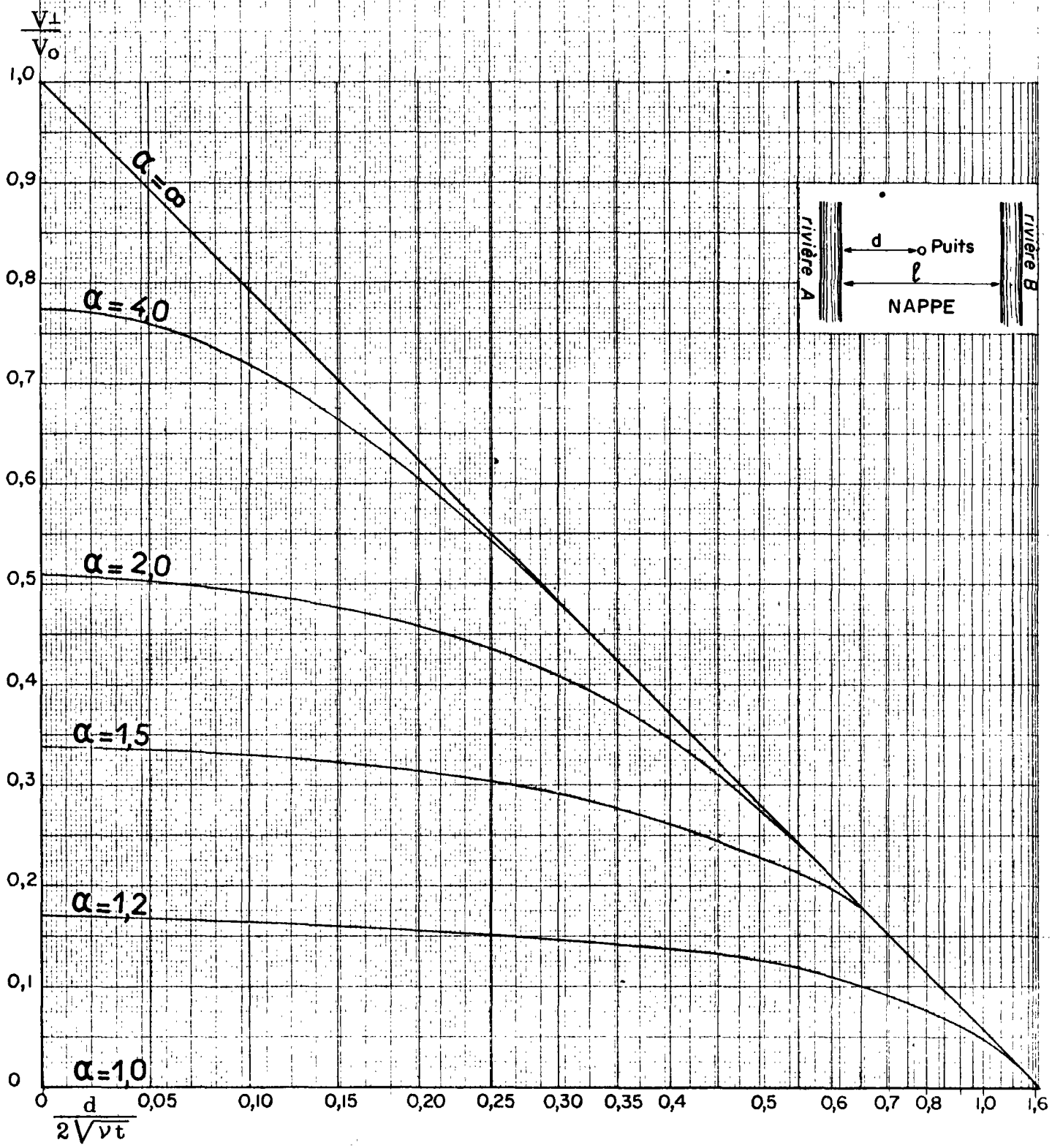
avec $\alpha = \frac{\ell}{d}$ $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$



Abaque n° 22 Configuration RP∞, NCU ou NLO, RP∞//

$$\frac{V_{\perp A}}{V_o} = 4i^2 \operatorname{erfc}\beta - \sum_{n=1}^{\infty} 4i^2 \operatorname{erfc}(2n\alpha - 1)\beta - 4i^2 \operatorname{erfc}(2n\alpha + 1)\beta$$

avec $\alpha = \frac{\ell}{d}$, $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$



4 - SUJETIONS, PRECISION et LIMITES d'UTILISATION de la METHODE ANALYTIQUE

Nous continuons dans ce chapitre à considérer qu'un problème pratique est résolu si pour une configuration et un puits donnés, les lois $\frac{Q\perp}{Q_o}(t)$ et $\frac{V\perp}{V_o}(t)$ peuvent être obtenues avec précision et simplicité.

Nous venons d'étudier un certain nombre de configurations schématiques ; si maintenant nous sommes confrontés à un cas réel, nous devrons :

- disposer d'une connaissance préalable minimum de la zone à étudier ;
- schématiser ce cas réel afin d'être ramené à un problème analytiquement soluble ;
- avoir recours à d'autre méthodes si la réduction précédente est impossible ou si elle est à l'origine d'une trop grande imprécision.

4.1 - CONNAISSANCES PREALABLES MINIMALES de la ZONE CONSIDEREE.

Nous avons vu que les lois $\frac{Q\perp}{Q_o}$ et $\frac{V\perp}{V_o}$ dépendaient :

- du temps ;
- de la position du puits par rapport aux limites ;
- des caractéristiques hydrodynamiques et géométriques de la nappe.

Il est clair que les deux premiers points peuvent toujours être connus avec la précision désirée ; par contre, en ce qui concerne le troisième point, un volume minimum de connaissances sera nécessaire quelle que soit la méthode utilisée et d'autant plus important que l'on désirera connaitre $\frac{Q_\perp}{Q_o}$ ou $\frac{V_\perp}{V_o}$ avec plus de précision.

Il ne saurait être question, dans le cadre de cet exposé, de débattre du problème, au demeurant fort complexe, du volume minimum de connaissance nécessaire à l'obtention d'une précision donnée ; il est toutefois évident que pour chaque zone, un certain nombre de données devra être rassemblé concernant :

- la géométrie des limites ;
- le colmatage du lit et des berges des cours d'eau ;
- la morphologie de l'aquifère exploité et son homogénéité ;
- la possibilité d'échanges entre aquifère exploité et les couches contigües ;
- la présence d'une surface libre éventuelle.

4.2 - PRECISION des RESULTATS DEDUITS de la METHODE ANALYTIQUE PRECEDENTE.

En général, la géométrie des limites et la morphologie de l'aquifère exploité peuvent être convenablement définies. Par contre, il est difficile de connaitre avec précision la répartition spatiale des caractéristiques hydrodynamiques ; on ne dispose fréquemment que d'un échantillonnage statistique de valeurs, parfois même que de quelques valeurs isolées.

Pour appliquer la méthode analytique exposée précédemment il est nécessaire de schématiser le domaine afin de se ramener à un cas simple analytiquement soluble (si cette réduction s'avère impossible, il est nécessaire d'avoir recours à d'autres méthodes plus

élaborées mettant en œuvre des "simulateurs"). Puis il convient de choisir, pour les caractéristiques hydrodynamiques, des valeurs moyennes puisque dans tous les cas étudiés ces caractéristiques sont supposées constantes ; cette nouvelle schématisation risque d'introduire des erreurs systématiques importantes dans l'évaluation de $\frac{Q\perp}{Q_o}$ et de $\frac{V\perp}{V_o}$

Ces caractéristiques peuvent être nombreuses :

- $\nu = T/S$ diffusivité d'une nappe captive ;
- $\nu = K/S_s$ diffusivité d'une nappe libre ;
- B coefficient caractéristique de la semi-parméabilité d'une éponte ;
- a coefficient caractéristique du colmatage du lit ou des berges d'une rivière.

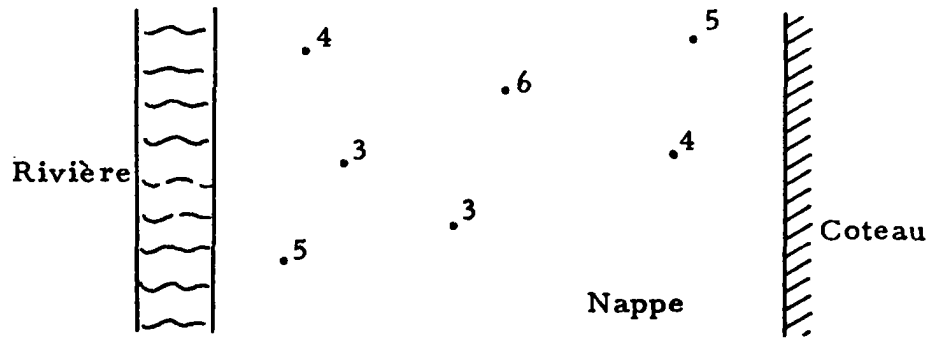
Remarque importante concernant la notion d'hétérogénéité des caractéristiques hydrodynamiques dans un système aquifère donné.

Il est essentiel de bien saisir la différence qui existe entre deux types d'hétérogénéités :

- les hétérogénéités uniformément aléatoires ;
- les hétérogénéités par zones nettement individualisées.

1) - Hétérogénéités uniformément aléatoires :

Exemple : Nappe alluviale limitée par une rivière et un côteau
Distribution uniformément "aléatoire" des valeurs de la diffusivité (exprimées en m^2/s).

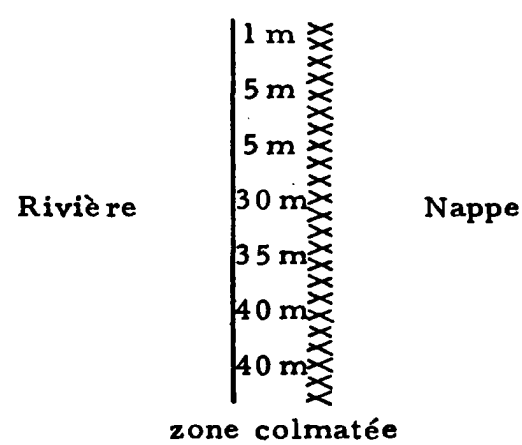


- Diffusivité moyenne 4, 3 m^2/s
- Ecart maximum à la moyenne 6-4, 3 = 1, 7 m^2/s
- Coefficient de dispersion des valeur autour de la valeur moyenne $\frac{1,7}{4,3} \approx 40\%$

Ces hétérogénéités "aléatoires" sont de même nature que l'imprécision sur les valeurs des paramètres hydrodynamiques dûe à la nature expérimentale de leur détermination. Ces deux causes de dispersion peuvent être confondues et sont justiciables des classiques "calculs d'erreurs".

2) - Hétérogénéités par zones nettement individualisées.

Exemple : Nappe alluviale limitée par une rivière plus ou moins colmatée.
Distribution "classée" des valeurs du coefficient de colmatagea :



Une variation spatiale plus ou moins continue des caractéristiques hydrodynamiques, sensible à l'échelle de l'ensemble du système aquifère, ne saurait être assimilée à une distribution "aléatoire". La méthode analytique est alors mise en défaut et il convient d'avoir recours à des méthodes plus élaborées.

Si l'on désire étudier l'incidence d'une dispersion aléatoire des valeurs des caractéristiques hydrodynamiques sur la précision des résultats, il convient de raisonner sur des cas particuliers mettant en jeu une ou plusieurs de ces caractéristiques.

Nous nous bornerons présentement à étudier cette incidence dans le cas d'une configuration (RP∞, NCU ou NLO, C∞) puisque cette configuration figure comme limite asymptotique de tous les cas étudiés.

4.3 - ERREURS SYSTEMATIQUES RESULTANT de la DISPERSION ALEATOIRE des VALEURS du COEFFICIENT de DIFFUSIVITE AUTOUR de la VALEUR MOYENNE CHOISIE, pour la configuration (RP ∞, NCU ou NLO, C∞).

Appelons $\frac{\Delta \nu}{\nu}$ la dispersion des valeurs de ν autour de la valeur moyenne , il vient en dérivant $\frac{Q_\perp}{Q_o} = \text{erfc}\,\frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$ par rapport à ν :

$$\frac{\Delta \frac{Q_\perp}{Q_o}}{\frac{Q_\perp}{Q_o}} = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \; \frac{e^{-\beta^2}}{\text{erfc}\,\beta} \left(\frac{\Delta \nu}{\nu}\right) \qquad \left(\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

et en dérivant $\frac{V_\perp}{V_o} = 4\,i^2\text{erfc}\,\frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$ par rapport à ν

$$\frac{\Delta \left(\frac{V_\perp}{V_o}\right)}{\frac{V_\perp}{V_o}} = \frac{\beta \,.\, 2\,i\,\text{erfc}\,\beta}{4\,i^2\text{erfc}\,\beta} \left(\frac{\Delta \nu}{\nu}\right) \qquad \left(\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

Nous avons figuré sur les diagrammes n° 23 et 24 les variations

de $\dfrac{\dfrac{\Delta Q\perp/Qo}{Q\perp/Qo}}{\Delta \nu/\nu}$ et de $\dfrac{\dfrac{V\perp/Vo}{V\perp/Vo}}{\Delta \nu/\nu}$ en fonction de β

$\dfrac{\dfrac{\Delta Q\perp/Qo}{Q\perp/Qo}}{\Delta \nu/\nu}$ représente $\dfrac{\text{l'incertitude relative sur } Q\perp/Qo}{\text{la dispersion des valeurs de } \nu}$

et $\dfrac{\dfrac{\Delta V\perp/Vo}{V\perp/vo}}{\Delta \nu/\nu}$ représente $\dfrac{\text{l'incertitude relative sur } V\perp/Vo}{\text{la dispersion des valeurs de } \nu}$

On constate que pour $\beta \leqslant 0,85$

$$\frac{\Delta Q\perp/Qo}{Q\perp/Qo} \leqslant \frac{\Delta \nu}{\nu}$$

c'est-à-dire que pour la plupart des valeurs usuelles la précision sur $\dfrac{V\perp}{V_o}$ est meilleure que la précision sur ν pour $\beta \leqslant 0,85$

De même, on constate que pour $\beta \leqslant 0,65$

$$\frac{\Delta V\perp/Vo}{V\perp/Vo} = \leqslant \frac{\Delta \nu}{\nu}$$

c'est-à-dire que pour la plupart des valeurs usuelles, la précision sur $\dfrac{V\perp}{Vo}$ est meilleure que la précision sur ν pour $\beta \leqslant 0,65$

<u>Exemple</u> : Soit une nappe d'extension semi-infinie en relation parfaite avec une rivière rectiligne indéfinie ; la transmissivité de l'aquifère varie localement de 3 à 7. 10^{-2} m^2/s et l'emmagasinement moyen est de 1%.

FIGURE 23

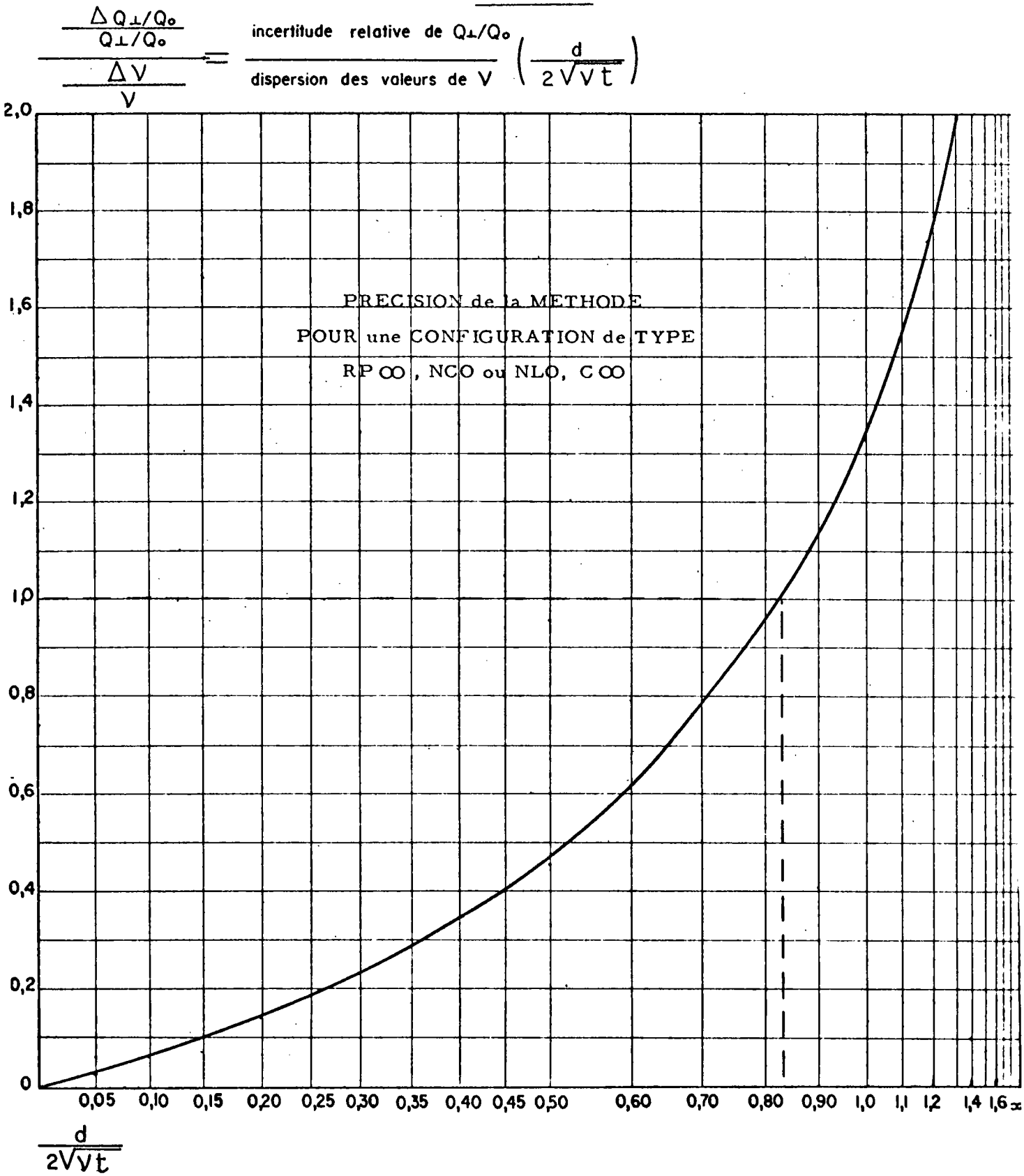
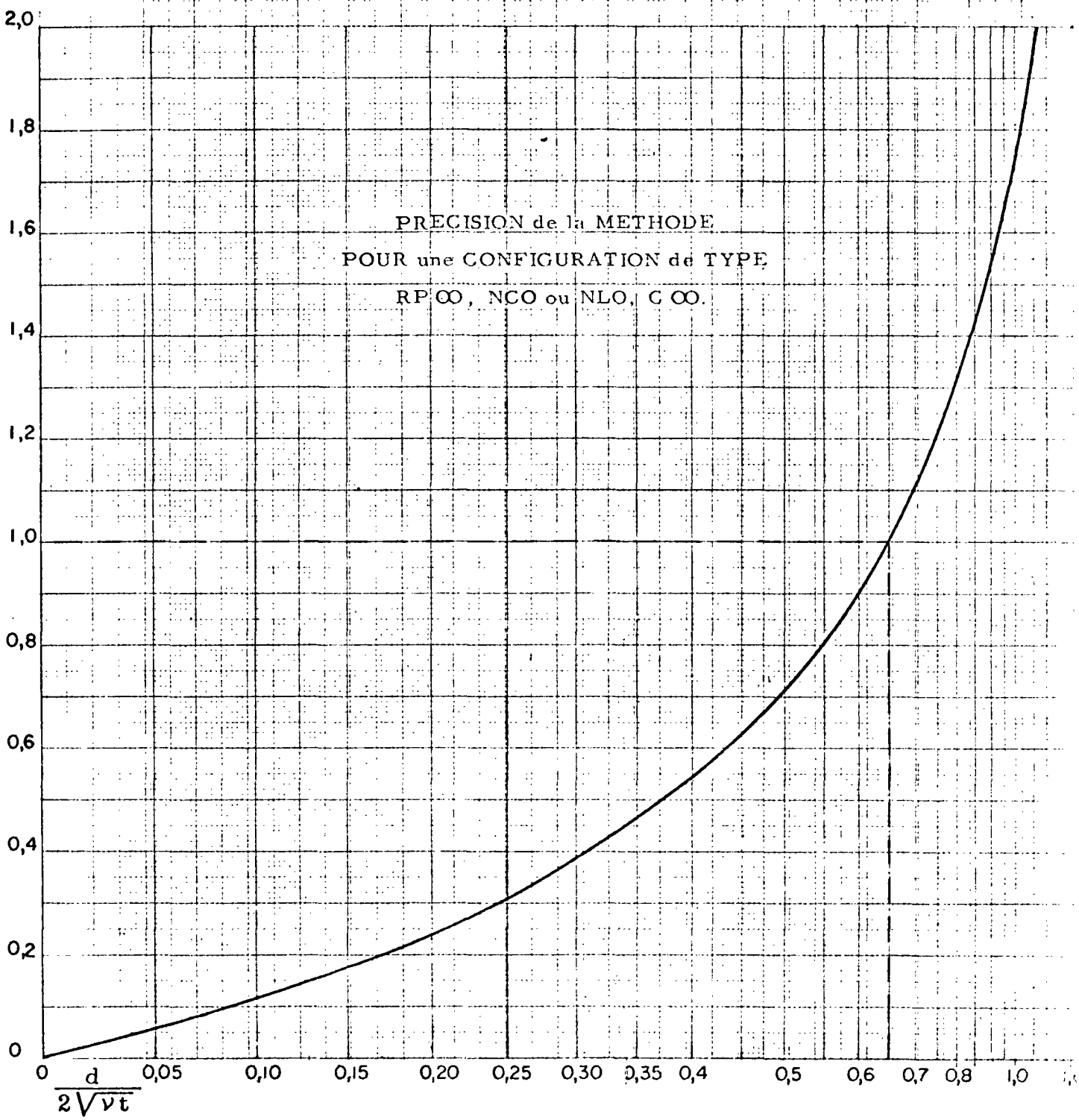

$\frac{\Delta Q_\perp/Q_o}{Q_\perp/Q_o} = \frac{\text{incertitude relative de } Q_\perp/Q_o}{\text{dispersion des valeurs de } V} \left(\frac{d}{2\sqrt{Vt}}\right)$
$\frac{\Delta V}{V}$
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
PRECISION de la METHODE
POUR une CONFIGURATION de TYPE
RP ∞ , NCO ou NLO, C ∞
0,05 0,10 0,15 0,20 0,25 0,30 0,35 0,40 0,45 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 1,0 1,1 1,2 1,4 1,6 ∞
$\frac{d}{2\sqrt{Vt}}$

FIGURE 24

$$\frac{\dfrac{\Delta V_\perp / V_o}{V_\perp / V_o}}{\dfrac{\Delta V}{V}} = \frac{\text{incertitude relative de } V_\perp / V_o}{\text{dispersion des valeurs de } V} \left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t}} \right)$$



Un puits est exploité à 2000 mètres de la rivière.

1° - Au bout de 100 jours, quelle sera la fraction du débit d'exploitation soustraite à la rivière et quelle sera la fraction du volume total extrait qui aura été soustraite à la rivière durant ces 100 jours ?

2° - Quelle sera la précision des résultats compte tenu de l'incertitude qui règne sur les valeurs de transmissivité ?

La diffusivité $\nu = T/S$ varie de 3 à 7 m^2/s

soit $\frac{\Delta \nu}{\nu}$ 40% dispersion des valeurs de ν autour de la valeur moyenne $\nu = 5\ m^2/s$.

Pour t = 100 jours, $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}} = 0,15$

Soit $\frac{Q\perp}{Qo} = 82\%$ et $\frac{\Delta Q\perp/Qo}{Q\perp/Qo} = 10\%$

$\frac{V\perp}{V_o} = 69\%$ et $\frac{\Delta V\perp/Vo}{V\perp/Vo} = 18\%$

En d'autres termes, après 100 jours de pompage, 82% du débit pompé est soustrait à la rivière et 69% du volume extrait du puits durant ces 100 jours est soustrait à la rivière ; bien que la dispersion des valeurs de ν autour de la valeur moyenne soit de 40%, l'imprécision relative sur les débits est de 10% et l'imprécision relative sur les volumes est de 18%.

Il serait impossible de poursuivre plus avant des études générales concemant la précision des résultats fournis par la méthode ; bornons-nous simplement à remarquer que cette précision peut être estimée et qu'elle ne semble pas trop mauvaise compte tenu de la dispersion inéluctable des valeurs des caractéristiques hydrodynamiques

•

• •

5 - EXEMPLE CONCRET d'APPLICATION de la METHODE ANALYTIQUE EXPOSEE PRECEDEMMENT

Nappe alluviale du Val de Loire
dans la région de GIEN

A titre d'exemple, nous avons choisi d'appliquer la méthode analytique précédemment exposée à un cas concret de nappe alluviale : la nappe du Val de Loire entre Sully-sur-Loire et Chatillon-sur-Loire (Loiret).

Dans un premier temps, nous avons sélectionné deux zones que nous avons schématisées ; puis nous nous sommes arbitrairement donné un calendrier de pompages et nous avons décidé d'une période de basses-eaux de la Loire.

Toujours à titre d'exemple, nous avons recherché dans ces deux zones et selon nos hypothèses, la distance minimale devant séparer un puits de la Loire pour que, quelle que soit l'intensité des prélèvements effectués, le volume soutiré à la Loire en période de basses-eaux soit inférieur ou égal à la moitié du volume total extrait de ce puits.

Enfin dans l'hypothèse d'hétérogénéités locales strictement aléatoires, nous avons cherché à évaluer l'imprécision sur ces distances minimales compte- tenu de la dispersion maximale possible des valeurs de la diffusivité hydraulique.

5.1 - DONNEES du PROBLEME.

La carte au 1/50 000e, annexée au présent rapport, fait état de l'extension de la nappe alluviale ($\sim$100 km^2) entre Sully-sur-Loire et Chatillon-sur-Loire (Loiret) et de la forme de ses limites.

Nous avons sélectionné sur cette carte deux zones A ($\simeq$ 16 km^2) et B ($\simeq$ 10 km^2) représentant environ le quart de la superficie totale de la nappe considérée.

Les caractéristiques hydrodynamiques de cette nappe sont très mal connues ; toutefois nous pouvons raisonnablement estimer :

- que la transmissivité de l'aquifère est comprise entre 10^{-3} m^2/s et 10^{-2} m^2/s ;
- que le contact entre la Loire et la nappe est "parfait" (ceci nous est suggéré par l'examen des cartes piézométriques) ;
- que le coefficient d'emmagasinement est de l'ordre de 5% ;
- que le substratum est imperméable et sensiblement horizontal (ceci demanderait évidemment à être confirmé) ;
- que la transmissivité du côteau dominant la zone A est de l'ordre de 10^{-4} m^2/s et que le côteau dominant la zone B est strictement imperméable.

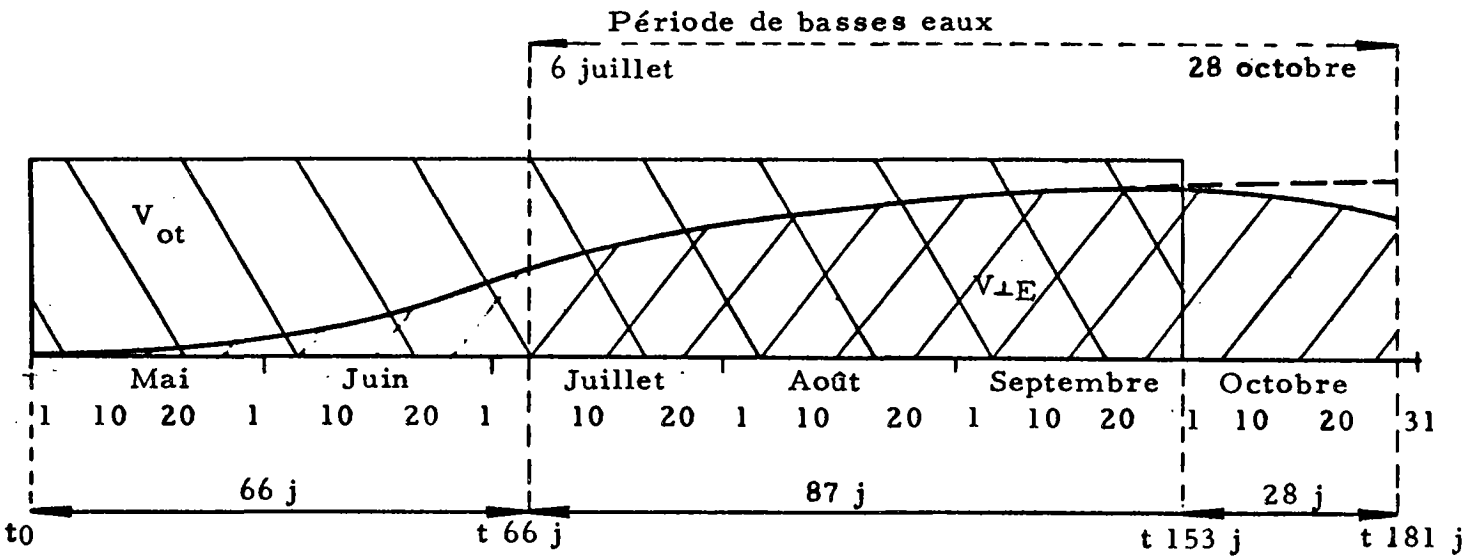
En ce qui concerne la période de basses-eaux, nous avons considéré les relevés pour 1966 de la station de jaugeage de Gien ; l'examen de ces relevés permet de mettre en évidence, entre autres, deux débits caractéristiques intéressants :

- le D. C. 71 jours (débit caractéristique non dépassé durant 71 jours consécutifs)
  soit D. C. 71 j. $\simeq$ 70 m^3/s du 15 Août au 24 Octobre ;
- le D. C. 115 jours (débit caractéristique non dépassé durant 115 jours sensiblement consécutifs)
  soit D. C. 115 j. $\simeq$ 100 m^3/s du 6 Juillet au 28 Octobre.

Nous avons choisi de retenir le second cas et de considérer que la période de basses-eaux est la période durant laquelle la débit ne dépasse pas 100 m^3/s ; cette période des basses-eaux s'étend alors du 6 Juillet au 28 Octobre.

En ce qui concerne le calendrier des pompages effectués dans la nappe, nous avons supposé qu'il s'agit principalement de pompages à vocation agricole et que ceux-ci commencent aux environs du 1er Mai pour s'interrompre aux environs du 1er Octobre.

5.2 - APPLICATION de la METHODE.



Si nous appelons $V_{\perp}E$, la volume soustrait en période de basses-eaux à la Loire par un pompage quelconque à débit constant Qo, et Vot , le volume total extrait de la nappe par ce même puits durant toute la période de pompage, nous nous proposons de définir deux domaines tels que :

- pour l'un $\frac{V_{\perp}E}{Vot} \leqslant 50\%$;
- pour l'autre $\frac{V_{\perp}E}{Vot} \geqslant 50\%$.

En vertu des considérations du paragraphe 2.2, nous pouvons écrire $V_\perp E = V_\perp (0 \rightarrow 181j) - V_\perp (153j \rightarrow 181j) - V_\perp (0 \rightarrow 66j)$

$$Vot = Qo \times 153\ j$$

soit $$\frac{V_\perp E}{Vot} = \frac{V_\perp(181j)}{Qo.\ 153j} - \frac{V_\perp(28j)}{Qo.\ 153j} - \frac{V_\perp(66j)}{Qo.\ 153j}$$

$$\frac{V_\perp E}{Vot} = \frac{V_\perp(181j)}{Vo} \cdot \frac{181}{153} - \left(\frac{V_\perp(28j)}{Vo} \cdot \frac{28}{153} + \frac{V_\perp(66j)}{Vo}\ \frac{66}{153}\right)$$

Soit donc à rechercher la position limite des puits dans la nappe telle que :

$$1,180 \cdot \frac{V_\perp(181)}{Vo} - \left[0,183 \cdot \frac{V_\perp(28)}{Vo} + 0,431 \cdot \frac{V_\perp(66)}{Vo}\right] = 0,5$$

Nous savons que $\nu = 0,11\ m^2/s$ avec $\frac{\Delta \nu}{\nu} = 80\%$

comme $\beta = \frac{d}{2\sqrt{\nu t}}$ il vient

$$\beta\ (181) = \frac{d}{2\sqrt{0,11.\ 181.\ 86.\ 400}} = 0,38\ .\ d\ (Km)$$

$$\beta\ (28) = 0,97.\ d\ (Km)$$

$$\beta\ (66) = 0,63.\ d\ (Km)$$

5.21 - Application à la zone A.

La zone A peut être raisonnablement assimilée à l'intérieur d'un diédre d'angle au sommet 30° limité, d'une part par la Loire, d'autre part par le côteau sableux ; le contraste des transmissivités entre la nappe alluviale ($T \simeq 5,5\ (\pm 4,5)\ 10^{-3}\ m^2/s$) et les

sables de Sologne du côteau ($T \simeq 10^{-4}$ m^2/s) est de 50 en moyenne, les débits qui transitent dans ces deux aquifères sont en gros proportionnels aux transmissivités ; si donc nous supposons le côteau sableux imperméable, nous introduisons des erreurs sur les débits de l'ordre de 2%, ce qui est tout à fait admissible.

La zone A peut donc être assimilée à la configuration schématique RPCO, NLO, C $\pi/6$ et les valeurs de $\frac{V_\perp}{Vo}\left(\frac{\delta}{d}, \frac{d}{2\sqrt{vt}}\right)$ ont déjà été consignées sous forme d'abaque (n° 14).

La condition $\frac{V_\perp E}{Vo} = 0,5$ est matérialisée sur le graphique de la page 89 par une courbe limite que nous avons déterminée point par point :

- entre cette courbe et la loire, $\frac{V_\perp E}{Vo} \geqslant 0,5$
- entre cette courbe et le côteau (et évidemment au delà) $\frac{V_\perp E}{Vo} \leqslant 0,5$.

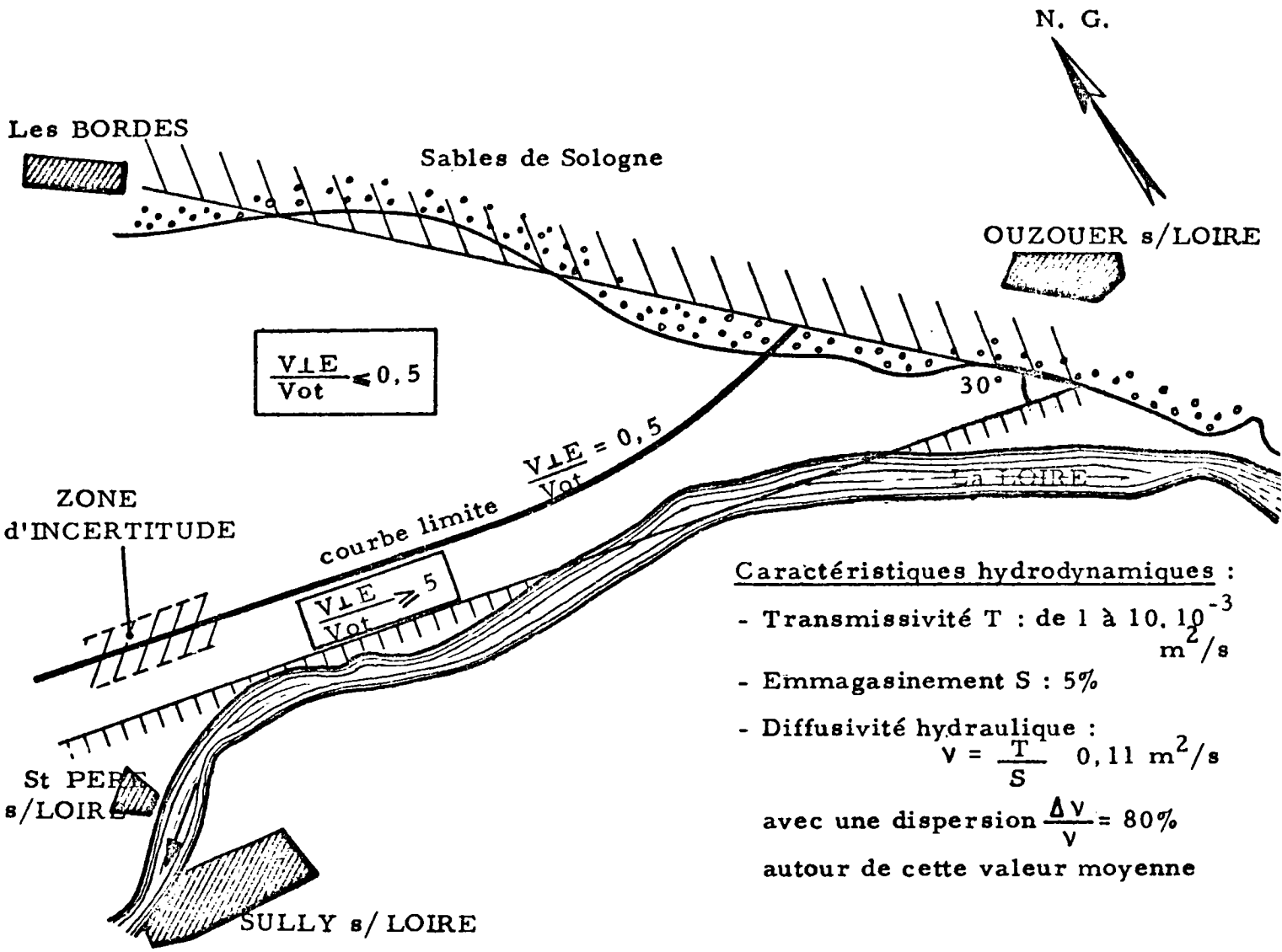
5.22 - Application de la zone B.

La zone B peut être raisonnablement assimilée à l'intérieu d'un rectange limité sur deux côtés par la Loire et un côteau réputé imperméable.

La zone B peut donc être assimilée à la configuration schématique RPCO, NLO, C // (avec $l \simeq 1;65$ km) et les valeurs de $\frac{V_\perp}{V_o}\left(\frac{l}{d}, \frac{d}{2\sqrt{vt}}\right)$ ont déjà été consignées sous forme d'abaque (n° 10).

La condition $\frac{V_\perp E}{Vo} = 0,5$ est matérialisée sur le graphiqu de la page par une parallèle à la rivière située à 760 m de celle-ci :

- entre cette droite et la Loire $\frac{V_\perp E}{Vot} \geqslant 0,5$
- entre cette droite et le côteau $\frac{V_\perp E}{Vot} \leqslant 0,5$.



Caractéristiques hydrodynamiques :

- Transmissivité T : de 1 à 10.10^{-3} m^2/s
- Emmagasinement S : 5%
- Diffusivité hydraulique : $\nu = \frac{T}{S}$ 0,11 m^2/s

avec une dispersion $\frac{\Delta \nu}{\nu} = 80\%$ autour de cette valeur moyenne

ZONE A

Echelle : 1/50.000e

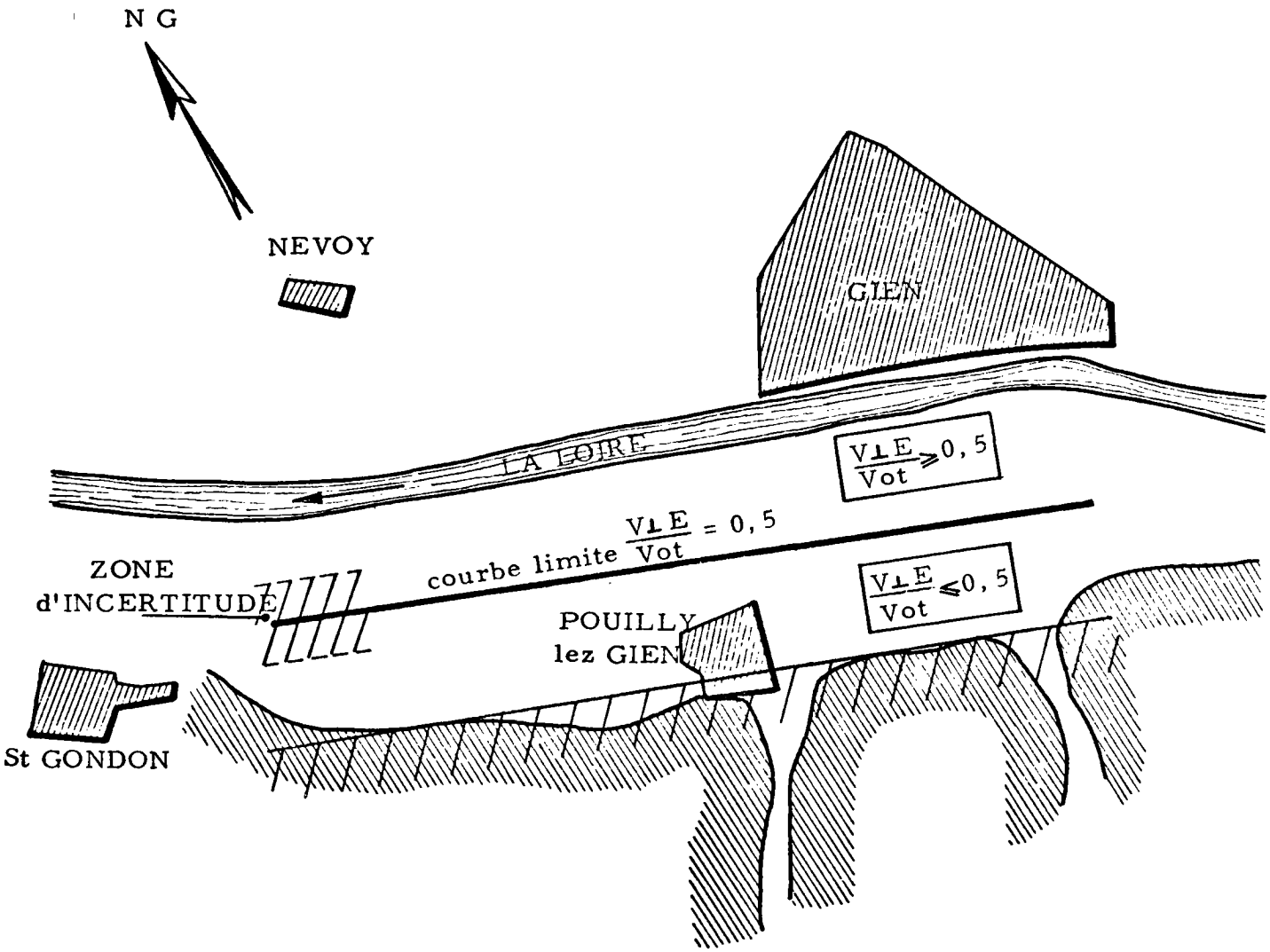
1 km

Limite naturelle

coteau

rivière

Limite schématisée



ZONE B

Echelle 1/50.000e

1 km

Limite naturelle

coteau imperméable

Limite schématisée

rivière

Géoh. 230

5.23 - Précision des résultats compte tenu de la forte imprécision (ou dispersion) sur les valeurs de transmissivité.

Raisonnons, pour simplifier, sur le cas d'une nappe illimitée (nous avons pu constater par exemple que, dans la zoneA, le côteau n'avait d'influence sur la courbe limite que jusqu'à une distance de 3 ou 4 km du sommet du dièdre ; au-delà, la nappe se comporte pratiquement en nappe "semi-infinie").

Rechercher la distance limite do des puits à la rivière telle que $\frac{V\perp E}{Vot} = 0,5$ revient à résoudre l'équation

$$1,18.\frac{V\perp}{Vo}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t} = 181j}\right) - 0,183\frac{V\perp}{Vo}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t = 28j}}\right) - 0,431\frac{V\perp}{Vo}\left(\frac{d}{2\sqrt{\nu t = 66j}}\right) = 0,5$$

sous la forme $\frac{do}{V\nu} = ao$ avec toute la précision désirée.

Si l'incertitude (ou la dispersion) sur ν est $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 80\%$ on voit que $\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\nu}{\nu} = 40\%$.

D'une manière très schématique, nous pouvons donc dire que les courbes limites que nous avons tracées sont telles que les distances séparant ces courbes de la rivière sont connues avec une précision double de celle règnant sur la diffusivité.

Dans le cas de la zone B, ceci équivaudrait à définir la limite par : $460 \leqslant d \leqslant 1060$ m ; on constate ainsi sur cet exemple que si l'on désirait définir cette limite avec plus de précision, une étude des caractéristiques hydrodynamiques plus approfondie devrait être entreprise.

•

• •

6 - UTILISATION des RESULTATS PRECEDENTS en VUE de CONTROLES, d'ACTIONS ou de PREVISIONS

Afin de procéder à des contrôles sur l'utilisation des eaux en période déficitaire, les autorités chargées de la gestion d'un bassin hydrologique peuvent avoir à déterminer l'influence de pompages en nappes alluviales sur le régime de basses eaux du réseau hydrographique :

- raisonnant en termes de débits instantannés, ces autorités pourront, par exemple, chercher à comparer l'hydrogramme d'un cours d'eau perturbé par de forts pompages dans la vallée à l'hydrogramme naturel qui résulterait de l'absence de ces pompages ;

- raisonnant en termes de préjudices, ces autorités pourront par exemple, chercher à évaluer les volumes soustraits au réseau superficiel durant telle ou telle époque de la période de basses eaux.

Une Administration peut également être conduite à entreprendre des actions auprès de certains utilisateurs influençant fortement le régime estival des cours d'eau.

Enfin, lorsque l'implantation de pompages ou de groupe de pompages est envisagée, ces autorités peuvent chercher à en évaluer les répercussions sur le régime estival superficiel.

Quelle que soit la méthode utilisée, la résolution de semblables problèmes nécessite :

- qu'une période hydrologique déficitaire soit définie, pour une zone donnée, à partir de statistiques pluriannuelles (telles que période de DC 10 jours ou de DC 100 jours par exemple).

- que les consommations et les calendriers de pompage des utilisateurs soient suffisamment connus, eu égard à la précision recherchée (ce qui peut entrainer si nécessaire la pose de compteurs volumétriques à relevés périodiques chez certains utilisateurs) ;

- que la morphologie et les caractéristiques hydrodynamiques du système aquifère soient suffisamment connus, eu égard à la précision recherchée.

Ces données étant supposées acquises, nous nous proposons de déterminer le débit $Q_{\perp}$ soustrait au réseau superficiel à un instant donné de la période de basses eaux, ou le volume $V_{\perp}$ E soustrait au même réseau durant tout ou fraction de la période de basses eaux.

1 - Nous avons montré que dans la plupart des configurations classiques de nappes alluviales, on est en droit de dissocier tous les facteurs susceptibles d'influencer le réseau superficiel, d'étudier l'influence de chacun d'eux supposé isolé, et d'en sommer les effets ; ainsi le calendrier de pompage le plus complexe pourra toujours être décomposé en une suite d' "élements" de pompage dont les effets sur le régime estival des eaux superficielles sont additifs. Nous en avons conclu que pour une configuration quelconque de nappe alluviale, la connaissance de lois $\frac{Q_{\perp}}{Q_o}(t, \alpha_1 -- \alpha_n)$ et $\frac{V_{\perp}}{V_o}(t, \alpha_1 -- \alpha_n)$ spécifiques de la configuration, suffisait à résoudre le problème le plus complexe.

Nous rappelons :

- que $\frac{Q_{\perp}}{Q_o}$ représente le pourcentage du débit pompé, directement ou indirectement soustrait au réseau superficiel à l'instant t ;

- que $\frac{V_{\perp}}{V_o}$ représente le pourcentage du débit pompé, directement ou indirectement soustrait au réseau superficiel entre les instants o et t ;

- que les paramètres $\alpha_1 -- \alpha_n$ ne dépendent que de la géométrie du système aquifère, de ses caractéristiques hydrodynamiques ou de la position des puits en pompage.

2 - Nous avons constitué un premier "catalogue" de configurations schématiques usuelles pour lesquelles nous avons donné l'expression explicite des lois $\frac{Q_\perp}{Q_o}(t, \alpha, \ldots \alpha_n)$ et $\frac{V_\perp}{V_o}(t, \alpha \ldots \alpha_n)$. Ces lois se présentant toutes sous forme d'une grandeur adimensionnelle fonction de paramètres adimensionnels, nous les avons représentées sous forme d'abaques universels.

3 - L'utilisation pratique d'un tel "catalogue" pour des problèmes concrets soulève deux difficultés :

a) - Est-il toujours possible de schématiser le système aquifère réel afin de se ramener à une configuration du "catalogue" ?

b) - Quelle précision peut-on en attendre ?

La schématisation du système aquifère réel peut s'avérer laborieuse, voire impossible dans les cas complexes (aquifères multi-stratifiés, cours d'eau plus ou moins nombreux et colmatés, limites très irrégulières, etc...) ; il conviendra alors d'avoir recours à d'autres méthodes d'investigation.

Ce choix souvent délicat de la méthode la mieux adaptée à la résolution d'un problème particulier, devra de toute manière être du ressort du personnel compétent chargé de conduire l'ensemble de l'étude.

Lorsque la schématisation pourra être raisonnablement effectuée, des erreurs systématiques seront de toute manière introduites :

- par la déformation des limites résultant de la schématisation ;

- par l'hétérogénéité naturelle inhérente à toute configuration réelle (et non prise en compte dans les calculs précédents).

Chiffrer pour chaque cas concret la précision de la méthode, revient à évaluer ces erreurs :

- En ce qui concerne les erreurs dues à la déformation des limites, elles ne peuvent évidemment pas être évaluées simplement, et l'on devra s'en remettre à l'estime de l'opérateur (nous inclinons toutefois à penser que pour des schématisations "raisonnables", ces erreurs seront inférieures aux suivantes).

- En ce qui concerne les erreurs introduites par une distribution uniformément aléatoire des hétérogénéités du système hydrodynamiques, elles peuvent être évalués à partir des expression explicites par des calculs classiques d'erreur.

Lorsque la précision de cette méthode sera jugée insuffisante ou bien lorsque des hétérogénéités localement individualisées existeront, il conviendra là encore, de mettre en oeuvre des méthodes plus élaborées susceptibles de prendre en compte les hétérogénéités du système réel.

4 - Il convient d'insister sur le fait que plus la précision recherchée sera grande, plus la quantité d'informations concernant le système aquifère et les pompages devra être importante, et plus la méthode d'investigation choisie devra être élaborée.

Lorsque la méthode analytique précédemment exposée aura été mise en défaut, on devra nécessairement avoir recours à des méthodes mettant en jeu des simulateurs d'écoulement puisque seules ces méthodes permettent de prendre en compte formes géométriques complexes et hétérogénéités.

• • •

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

H.S. CARSLAW and J.C. JAEGER : Conduction of heat in solids. Oxford U. Press, 1959.

R.E. COLLINS : Fluid migration across fixed boundaries in reservoirs producing by fluid expansion. Petroleum transactions, AIME, 1958.

M.S. HANTUSH :
- Growth and decay of groundwater-mounds in response to uniform percolation. Water resources research, 1967.
- Flow of groundwater in sands of nonuniform thickness. Journal of geophysical research, 1962.
- Depletion of storage, leackage and river flow by gravity wells in sloping sands. Journal of geophysical research, 1964.
- Wells near streams with semipervious beds. Journal of geophysical research, 1965.
- Depletion of flow in right-angle stream beds by steady wells. Water resources research, 1967.
- Hydraulic of wells. Advances in hydroscience, 1964 (Vol. 1) Academic Press.

° °
°

ANNEXE : FONDEMENTS THEORIQUES du PROBLEME

1 - Hypothèses et équations fondamentales.

Nous supposons tout d'abord le milieu aquifère isotrope et invariable au cours du temps ; c'est-à-dire que les caractéristiques hydrodynamiques du milieu (perméabilité et emmagasinement) en un point sont invariables dans le temps et en direction et que les limites du domaine aquifère (à l'exception d'une surface libre éventuelle) sont invariables au cours du temps.

Nous supposons en outre dans nos calculs que le milieu est homogène ; c'est-à-dire que la perméabilité du milieu aquifère est invariable dans un espace donné (remarquons toutefois que les considérations du chapitre 2 restent valables en milieu hétérogène ; cette hypothèse ne nuit donc pas à généralité de la méthode développée dans ce chapitre).

L'équation fondamentale régissant l'évolution transitoire des écoulements dans un domaine aquifère de ce type s'écrit :

$$\Delta \varphi + \frac{F(x, y, H, t)}{K} = 1/\nu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

avec $\varphi(x, y, z, t)$ potentiel au temps t en un point M de coordonnées x, y, z.

$F(x, y, H, t)$ débit élémentaire représentant les échanges à l'intérieur du domaine, entre le plan $z = H$ du domaine aquifère et l'extérieur (infiltration de précipitations sur le domaine ou échanges entre couches) ;

$1/\nu = \frac{Ss}{K}$ pour une nappe à surface libre (avec Ss coefficient d'emmagasinement spécifique et K perméabilité hydraulique ou coefficient de Darcy).

ou $1/\nu = \frac{S}{Kb} = \frac{S}{T}$ pour une nappe captive ou à la rigueur pour une nappe à substratum horizontal dont la surface libre varie peu au cours du temps (avec S coefficient d'emmagasinement, T transmissivité de l'aquifère, b épaisseur de la couche, ou épaisseur mouillée d'une nappe libre variant peu).

Un problème d'écoulement est entièrement défini si l'on adjoint à cette équation des conditions initiales et des conditions aux limites ; résoudre le problème consiste pratiquement à obtenir la valeur du potentiel sous la forme explicite $\varphi(x, y, z, t)$

En période estivale - à l'époque où les prélèvements temporaires pour l'agriculture sont les plus intenses-les infiltrations sur le domaine sont négligeables*; en outre, nous nous réservons d'étudier séparément les problèmes faisant intervenir des échanges entre couches (voir pages 54 et 63). Dans ces conditions $F(x, y, H, t) = 0$ et l'équation du mouvement se réduit à :

$$\Delta \varphi = 1/\nu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$ dite "équation de diffusivité."

Remarque.

Les écoulements tridimensionnels que l'on peut rencontrer dans des problèmes de ce genre sont circonscrits au voisinage des limites : par exemple, rivière ou puits n'atteignant pas le substratum, digue reposant sur une couche perméable, etc. On montre qu'en général au delà du voisinage immédiat de la singularité, l'écoulement est à peu près bidimensionnel, c'est-à-dire que

$$\varphi(x, y, z, t) \simeq \varphi(x, y, t)$$ pour tout z

Lorsque la tridimensionnalité de l'écoulement est dûe à la présence d'une surface libre, on montre que la prise en considération de $\bar{h}(x, y, t)$ suffit à l'étude des cas usuels (avec $\bar{h}(x, y, t)$ valeur moyenne de la charge hydraulique mesurée par rapport au substratum).

---

* L'étude de l'influence transitoire de prélèvements continus (alimentation en eau des communes ou des industries) est sans objet puisque rapidement la totalité des débits pompés est soustraite au réseau superficiel.

Nous supposerons donc que les seules variables indépendantes sont x, y, et t.

2 - Le principe de superposition des états transitoires.

Etant donné une nappe alluviale en relation avec un ou plusieurs cours d'eau et soumise à des pompages, il est généralement possible de définir un contour renfermant cette nappe au long duquel ne règnent que des conditions de potentiels ou de débits imposés variables éventuellement dans le temps :

- les cours d'eau constituent des limites à potentiels variables imposés ;
- un côteau pratiquement étanche au droit duquel les eaux de ruissellement s'infiltrent dans la nappe alluviale constitue une limite à débit imposé ;
- lorsqu'un côteau est peu perméable vis-à-vis de l'aquifère alluvial, les gradients de potentiel sur la limite sont relativement grands et l'on peut admettre que les variations de potentiels dûes aux pompages dans la nappe n'introduisent pas de variations importantes de ces gradients ; les débits déversés par le côteau dans la nappe sont donc peu influencés par l'aval et le côteau constitue sensiblement une limite à débit imposé ;
- lorsqu'un côteau est relativement perméable vis-à-vis de l'aquifère alluvial, le débit déversé dans la nappe ne constitue plus un débit imposé puisqu'il peut varier en fonction des potentiels de la nappe ; le contour limitant la nappe devra alors être rejeté suffisamment loin des captages pour que l'influence de ceux-ci ne s'y fasse pas sentir après 5 à 6 mois de pompage.

Le domaine d'écoulement ayant été ainsi défini, et la position des limites étant supposée invariable, nous pouvons appliquer aux phénomènes à étudier le principe de superposition des états transitoires dont nous nous bornerons à rappeler ici certaines conclusions :

1) - L'influence de m pompages sur les potentiels d'une nappe en mouvement peut être considérée comme la superposition de m états dûs à l'influence de chaque pompage pris séparément.

Soit : - $\varphi i\ (x, y, t)$ le potentiel hydrodynamique non perturbé par les pompages ;

- $\varphi\ (x, y, t)$ le potentiel hydrodynamique perturbé par m pompages ;

- $s_j\ (x, y, t)$ la variation de potentiel due à l'influence du jième pompage ;

il vient : $$\varphi\ (x, y, t) = \varphi i\ (x, y, t) - \sum_{j=1}^{m} s_j\ (x, y, t).$$

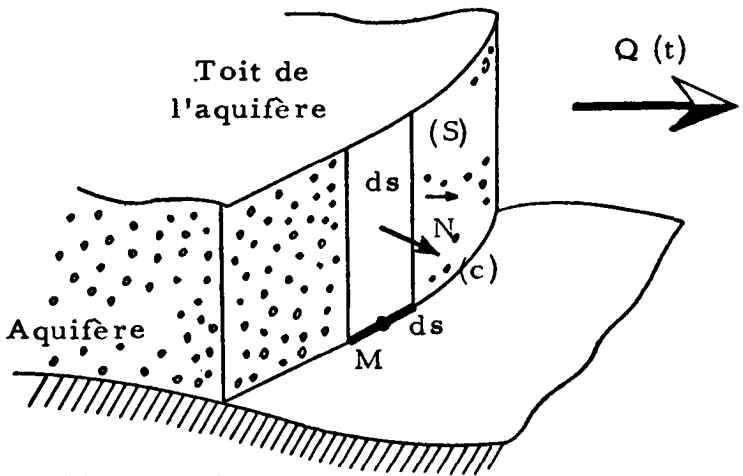
2) - La répartition des potentiles résultant de la mise en production d'un pompage dans une nappe en mouvement peut être considérée comme la superposition à l'évolution transitoire de la nappe sans pompage, de l'évolution transitoire dûe à l'influence du seul puits (la nappe étant alors au repos et les conditions aux limites étant "nulles" : débits d'apport nuls et potentiels imposés tous égaux à un potentiel de référence).

Soit $s_j\ (x, y, t)$ indépendant de $\varphi i\ (x, y, t)$.

3 - Si chaque captage est soumis à des pompages par paliers, l'évolution transitoire des potentiels dûe à chacun des paliers de pompage peut être considérée comme la superposition de deux pompages de signes opposés déphasés de la durée du palier et se poursuivant indéfiniment.

Le principe de superposition des états transitoires s'appliquant à la répartition des potentiels dans un domaine, nous allons montrer que ses conclusions peuvent s'appliquer au calcul des débits d'échange entre cours d'eau et nappes alluviales.

3 - <u>Débit traversant une surface verticale d'aquifère (S) de tracé (C) sur le substratum</u>



La combinaison de la loi de Darcy donnant la vitesse :

$$\vec{V} = - \frac{K}{\omega} \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$$

et de l'équation de continuité :

$$Q\ (t) = \int_{(S)} \vec{V}.\ \vec{N}.\ \omega\ dS$$

conduit à :

$$Q\ (t) = - K\overline{h} \int_{(C)} \frac{\delta}{\delta\ n}\ \varphi\ (x, y, t)\ ds$$

avec :

$Q\ (t)$	débit traversant la surface (S) à l'instant t
$\vec{N}$	vecteur unitaire normal à (S) et de direction n dans le plan (x, y)
dS	un élément de surface de (S)
$M\ (x, y)$	un point de (C)
ds	un élément de (C)

$\bar{h}$ hauteur mouillée moyenne sur (C)

ω porosité

K perméabilité

φ (x, y, t) potentiel hydrodynamique au point M à l'instant t

(avec $T = K\bar{h}$, transmissivité de l'aquifère).

Le potentiel perturbé par l'influence de m pompages étant :

$$\varphi(x,y,t) = \varphi i(x,y,t) - \sum_{j=1}^{m} sj(x,y,t)$$

il vient :

$$Q(t) = -T \int_{(C)} \frac{\partial}{\partial n} \varphi(x,y,t)\, ds$$

$$= -T \int_{(C)} \frac{\partial}{\partial n} \varphi i(x,y,t) + T \int_{C} \frac{\partial}{\partial n} \left[\sum_{j=1}^{m} s_j(x,y,t) \right] ds$$

Le premier terme représente le débit qui aurait traversé (S) en l'absence des pompages, tandis que le second représente la somme des débits supplémentaires qui traversent (S) sous l'influence des pompages.

$$\text{Soit } Q\perp = T \int_{C} \frac{\partial}{\partial n} \left[\sum_{j=1}^{m} s_j(x,y,t) \right] ds$$

$$= \sum_{j=1}^{m} T \int_{C} \frac{\partial}{\partial n} s_j(x,y,t)\, ds$$

En conclusion, le caractère linéaire des expressions autorise les mêmes sommations sur les débits que celles autorisées sur les potentiels par application du principe de superposition des états transitoires.

4 - Volumes traversant un contour entre deux instants t1 et t2 donnés

Soit $V_\perp (t1 \rightarrow t2)$ le volume ayant traversé le contour (C) entre les instants t1 et t2.

$$V_{\perp (t1 \rightarrow t2)} = \int_{t1}^{t2} Q_\perp \, dt$$

ou $$V_{\perp (t1 \rightarrow t2)} = - K \bar{h} \int_{t1}^{t2} \int_C \frac{\partial}{\partial n} \varphi (P, t) \, ds. \, dt$$

Si $\varphi = \varphi 1 + \varphi 2$

nous savons que $Q_\perp = Q_\perp 1 + Q_\perp 2$ soit immédiatement

$$\boxed{V_{\perp (t1 \rightarrow t2)} = V_{\perp} 1_{(t1 \rightarrow t2)} + V_{\perp} 2_{(t1 \rightarrow t2)}}$$

Enfin $$V_{\perp (t1 \rightarrow t2)} = \int_{t1}^{t2} Q_\perp \, dt$$

$$= \int_0^{t2} Q_\perp \, dt - \int_0^{t1} Q_\perp \, dt$$

Soit $$\boxed{V_{\perp (t1 \rightarrow t2)} = V_{\perp (0 \rightarrow t2)} - V_{\perp (0 \rightarrow t1)}}$$

L'ensemble de nos allégations du paragraphe 2. 2 vient ainsi d'être succintement démontré.

5 - Extension des résultats précédents au cas des nappes à surface libre

Au terme d'une théorie approchée, on montre que le principe de superposition des états transitoires peut être appliqué au cas des nappes à surface libre sous réserve de sommer, non plus les variations de potentiel s mais les quantités

$$Z = hi^2 - \overline{h}^2$$

avec $hi\ (x, y, t)$ hauteur de la surface libre au-dessus du substratum (sans pompage) ;

$\overline{h}\ (x, y, t)$ valeur moyenne de la charge hydraulique mesurée par rapport au substratum (avec pompages).

Calcul du débit d'échange $Q_{\perp}$ entre nappe libre et rivière pour une pente uniforme J du substratum (cf. figure page 62)

Soit q_{ix} le débit traversant un élément unitaire de longueur de rivière lors de l'état non perturbé :

$$q_{ix} = - Kh_i \frac{\partial \varphi i}{\partial x}$$

$$= Kh_i \frac{\partial (h_i + Jx)}{\partial x}$$

puisque $\varphi_i(x, y, t) \simeq h_i(x, y, t) + Jx$

Soit q_x le débit traversant le même élément de surface lors de l'état perturbé par un pompage :

$$q_x = -K\,\bar{h}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$= -K\,\bar{h}\,\frac{\partial(\bar{h} + Jx)}{\partial x}$$

puisque $\varphi\,(x,y,t) \simeq \bar{h}\,(x,y,t) + Jx$

L'influence du pompage sur les débits qui traversent la berge ($x = 0$) est concrétisée par :

$$q_\perp = (q_x - q_{ix})_{x=0}$$

Soit $$Q_\perp = \left[K\,h_i\,\frac{\partial(h_i + Jx)}{\partial x} - K\,\bar{h}\,\frac{\partial(\bar{h} + Jx)}{\partial x}\right]_{x=0}$$

$$= 1/2\,K\left[\frac{\partial(h_i^2 - \bar{h}^2)}{\partial x} + 2\,J\,(h_i - \bar{h})\right]_{x=0}$$

Or pour $x = 0$, $h_i = \bar{h}$ = potentiel de la rivière

Donc $$q_\perp = 1/2\left[K\,\frac{\partial(h_i^2 - \bar{h}^2)}{\partial x}\right]_{x=0}$$

et pour une longueur $\overline{ab}$ de rivière donnée :

$$Q_\perp = 1/2\,K\int_a^b \left[\frac{\partial Z}{\partial x}\right]_{x=0} dy$$

avec $Z = h_i^2 - \bar{h}^2$ selon nos notations précédentes.

Nous retrouvons une expression linéaire en Z et nous savons que les termes Z peuvent être sommés lors de la superposition

d'états transitoires ; la théorie établie dans le cas des nappes captives est donc applicable au cas de nappes libres d'écoulant sur un substratum de pente constante (sous certaines réserves énoncées pour chacune des configurations particulières étudiées).

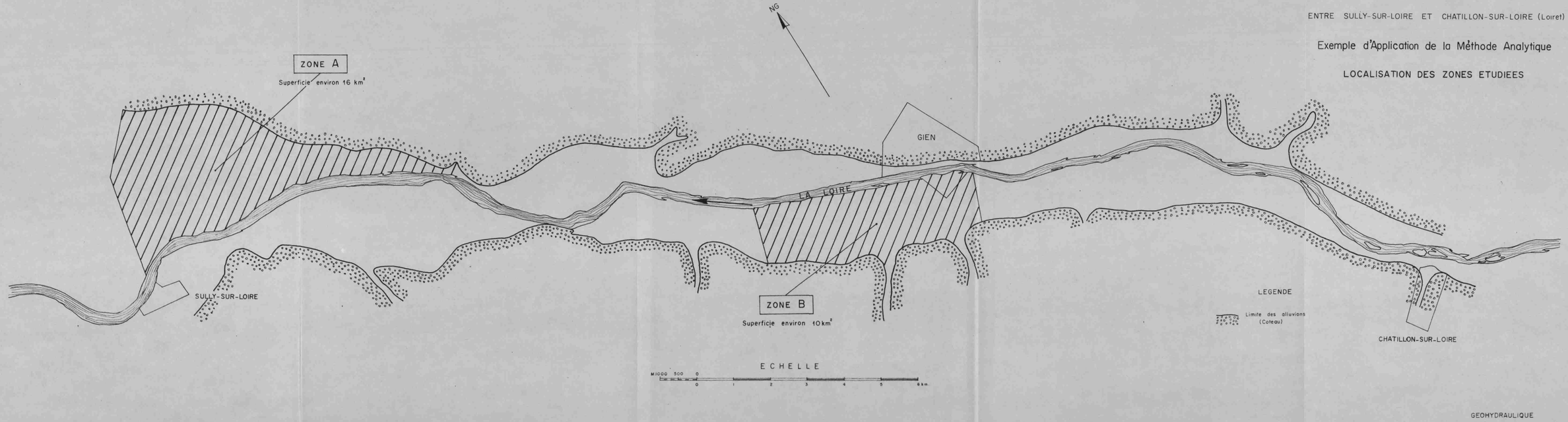
6 - Influence des pluies et des crues hivernales sur les "effets rémanents" de pompages antérieurs.

Dans la présente étude, nous avons étudié l'influence de pompages estivaux temporaires sur le régime d'étiage de l'année considérée ; il n'est toutefois pas exclu a priori que ces pompages puissent présenter une influence rémanente sur l'étiage de l'année suivante ; cette influence rémanente serait d'autant moins négligeable que le lieu de prélèvement est plus éloigné de la rivière et que la nappe est plus "molle".

Dans l'état actuel de nos connaissances théoriques, cette influence rémanente ne peut pas être déterminée simplement puisque des infiltrations hivernales ont contribué à recharger uniformément la nappe notre hypothèse $F(x, y, H, t) = 0$ est en défaut et le principe de superposition des états transitoires ne peut plus être appliqué rigoureusement.

Toutefois, sous l'action conjuguée des pluies et des crues hivernales, les nappes alluviales se rechargent généralement en totalité, effaçant ainsi l'effet des pompages antérieurs.

Néanmoins, pour chaque configuration particulière, il conviendrait de s'assurer de l'existence d'une telle "remise à zéro" hivernale des potentiels de la nappe, et de vérifier en particulier, que d'importantes dépressions causées en période hivernale par des pompages intensifs n'auraient pas pour effet de nuire à la recharge du système.


VAL DE LOIRE
ENTRE SULLY-SUR-LOIRE ET CHATILLON-SUR-LOIRE (Loiret)
Exemple d'Application de la Méthode Analytique
LOCALISATION DES ZONES ETUDIEES
NG
ZONE A
Superficie environ 16 km²
GIEN
LA LOIRE
SULLY-SUR-LOIRE
ZONE B
Superficie environ 10 km²
LEGENDE
Limite des alluvions (Coteau)
CHATILLON-SUR-LOIRE
ECHELLE
M 1000 500 0
0 1 2 3 4 5 6 km
GEOHYDRAULIQUE